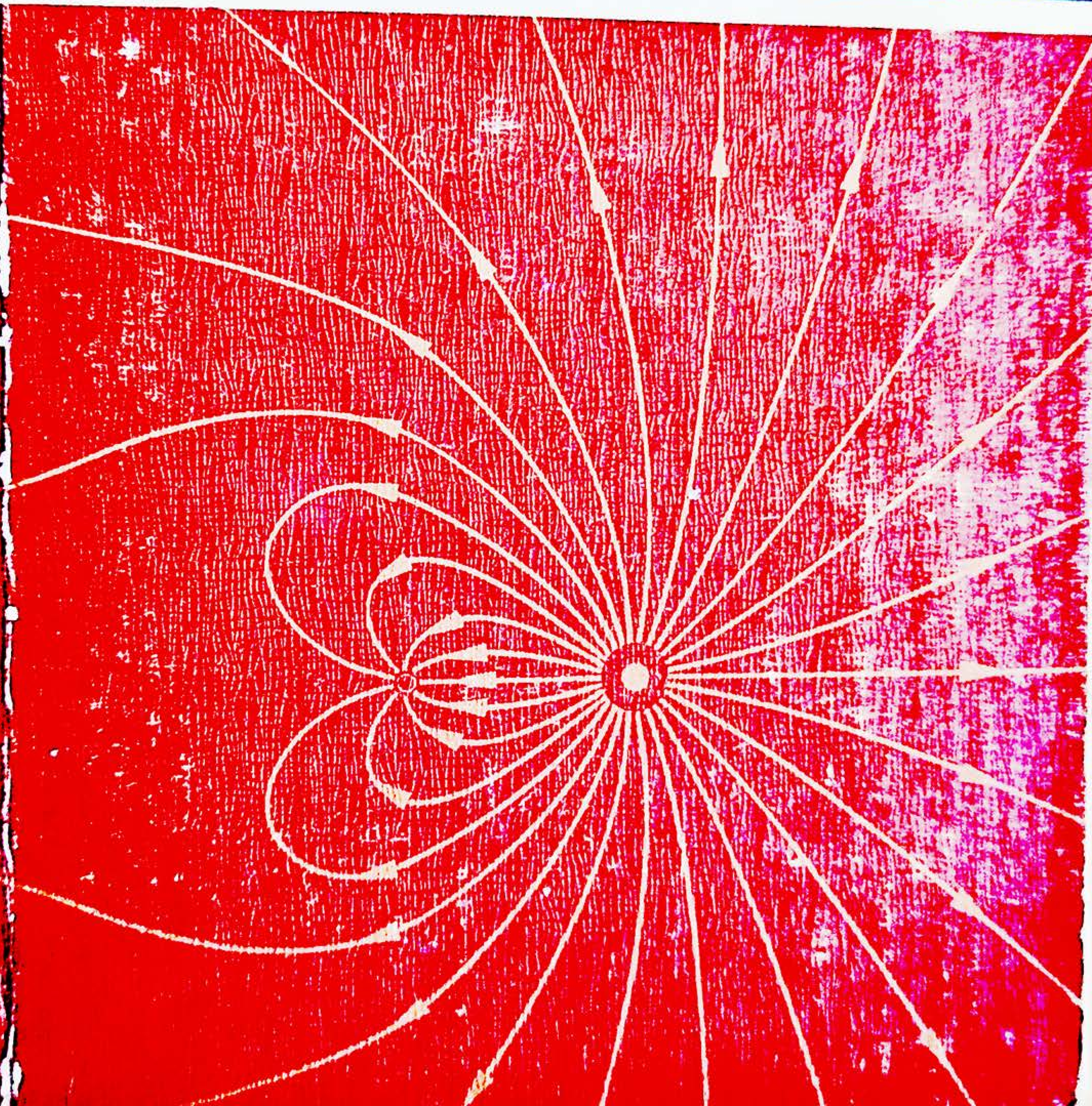
CURSUL DE FIZICĂ BERKELEY

VOLUMUL II

ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM



CURSUL DE FIZICĂ BERKELEY

VOLUMUL II

ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM

EDWARD M. PURCELL
Profesor de fizică la Universitatea Harvard

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — BUCUREŞTI, 1982

Cuprins

Prefața la versiunea în limba română 7
Prefață la cursul de fizică Berkeley 9
Prefață la volumul II 11
Îndrumări metodice 13

Capitolul 1 **Electrostatică: sarcini și cîmpuri** 17
Capitolul 2 **Potențial electric** 53
Capitolul 3 **Cîmpul electric în jurul conductorilor** 99
Capitolul 4 **Curenți electrici** 127
Capitolul 5 **Cîmpul purtătorilor de sarcină în mișcare** 163
Capitolul 6 **Cîmpul magnetic** 201
Capitolul 7 **Inducția electromagnetică și ecuațiile lui Maxwell** 241
Capitolul 8 **Circuite de curent alternativ** 289
Capitolul 9 **Cîmpuri electrice în substanță** 313
Capitolul 10 **Cîmpuri magnetice în substanță** 369
Alte probleme și întrebări 421

Prefaţa la versiunea în limba română

Scrierea unui curs bun de fizică generală este astăzi o sarcină deosebit de grea. Autorii sînt confruntaţi cu necesitatea de a face numeroase opţiuni în materie de conţinut, metodică şi formă, de atitudine, atît faţă de progresele fizicii cît şi faţă de cei ce se iniţiază în tainele ei. O întrunire adecvată a acestor opţiuni poate avea ca rezultat un material cu valoare de referinţă ce se va bucura de o largă circulaţie. Dimpotrivă, o alegere necorespunzătoare a mijloacelor poate să îngreuieze, dacă nu să dăuneze, înţelegerii şi însuşirii disciplinei. La originea acestei situaţii se află, desigur, dezvoltarea foarte rapidă a cercetării ştiinţifice de fizică. Volumul de informaţii creşte continuu, iar importanţa relativă a multor fapte se schimbă. Aceasta creează greutăţi în selectarea corectă a elementelor şi noţiunilor de bază, proces care nu poate fi realizat prin simple adăugiri şi eliminări, ci necesită o muncă de analiză şi sinteză, de evaluare şi ordonare. În acelaşi timp, ritmul rapid de acumulare face ca ceea ce astăzi este surprinzător şi de avangardă, mîine să apară ca vechi şi uneori depăşit. Asimilarea într-un curs universitar a noutăţilor ştiinţifice trebuie făcută astfel încît modificările ulterioare să conserve, pe o perioadă cît mai îndelungată structura logică şi valoarea de cunoaştere a faptelor expuse. Imaginea pe care cursul sau manualul de fizică ţine să o creeze în conştiinţa studentului este aceea a unei ştiinţe a naturii solid constituite şi, totodată, orientată mereu spre progres.

Întregul proces de instruire este de fapt, supus acestor exigenţe, iar numeroasele căutări din întreaga lume privind organizarea şi modernizarea predării fizicii reflectă tocmai conştiinţa că soluţiile actuale pot fi, în continuare, îmbunătăţite.

Modul de organizare şi orientare a procesului de învăţămînt năzuieşte spre formarea unor specialişti cu o gîndire sistematică şi, totodată, independentă şi creatoare. Se ştie că învăţămîntul strict expozitiv-deductiv, cu pretenţia de a da enunţuri definitive unor constatări valabile în general numai pentru cazuri idealizate determină formarea unor specialişti limitaţi, incapabili să vadă dincolo de litera cărţii. Claritatea şi logica internă a unei cărţi nu este contradictorie cu deschiderea sa către faptele reale, care nu pot fi tratate în general exact, putînd fi în schimb, modelate din ce în ce mai adecvat. De aceea, aprecierea valorii unui curs de fizică generală trebuie făcută nu numai din punctul de vedere al clarităţii faptelor prezentate ci, în egală măsură, prin deschiderea pe care o oferă înţelegerii fenomenelor complexe în interdependenţă.

Aplicarea cît mai eficientă a unor asemenea criterii de orientare şi evaluare a materialului didactic constituie o preocupare permanentă a învăţămîntului din ţara noastră, angajat într-un proces de continuă perfecţionare, în pas cu exigenţele progresului şi în acord cu condiţiile deosebite create de statul nostru învăţămîntului şi cercetării ştiinţifice. O serie de cărţi de fizică de bună calitate apărute în ultimii ani demonstrează concret rezultatele acestei preocupări. În acest sens, traducerea în limba română a cursului de fizică al Universităţii din Berkeley poate constitui o contribuţie exemplară.

Cursul, apărut în cinci volume, conţine lecţiile de fizică generală pentru studenţii anilor I—II de la Universitatea Berkeley — S.U.A. Între autori am recunoscut cu

plăcere fizicieni ale căror înaltă competență și autoritate profesională de cercetători le-am putut aprecia din experiența contactelor și colaborării directe.

De data aceasta, specialiști ca Knight, Kittel, Pound, Purcell și alții, sînt în primul rînd, profesori. Scopul lor mărturisit este de a prezenta un ciclu de lecții care să permită atît formarea gîndirii fizice cît și însușirea noțiunilor de bază ale acestei științe. Cele cinci volume — mecanica, electricitatea, oscilații și unde, fizica cuantică, fizica statistică nu constituie unități închise, fiind legate unele de altele prin exemple interesante care se referă la fenomene ce urmează a fi prezentate sau prin referiri la legi și noțiuni discutate anterior. Dezvoltarea cursului se face din aproape în aproape, într-o succesiune firească. Nivelul matematic este accesibil, redus la strictul necesar, în centrul atenției autorilor aflîndu-se explicația sensului fizic al fenomenelor. Se realizează astfel o tratare clară, modernă și unitară a întregului ansamblu al ideilor de bază ale fizicii.

Fiecare volum posedă un material de metodică a predării capitolului respectiv, destinat profesorului cît și unele recomandări ale autorilor către student. Prefețele volumelor dau lămuriri complete asupra conținutului și metodicii. Se scoate astfel în evidență atenția cu care aceste lucrări au fost elaborate, reprezentînd și sub acest aspect un model de lucru care poate fi studiat cu folos și la noi în țară.

Cu toate că materia prezentată în fiecare volum se propune a fi predată într-o perioadă scurtă de timp (8—14 săptămîni), spațiul alocat este suficient pentru ca studentul să poată efectua un studiu individual. În acest scop sînt indicate lucrări bibliografice, sînt date exerciții și probleme și sînt expuse și propuse spre efectuare o serie de experimente pentru acasă. Se încearcă și se reușește, să se aducă „acasă" fizica studiată la facultate.

Pe baza experienței dobîndite în mai mulți ani de predare, cursul a suferit modificări care i-au îmbunătățit conținutul și au permis aducerea lui la o formă cît mai adecvată, didactic și științific.

Dacă se ține seama de faptul că în cadrul programului Berkeley a fost pus la punct și un set de lucrări de laborator, se poate aprecia că acest curs este bine echilibrat, cuprinzînd atît aspectele teoretice cît și cele experimentale esențiale în predarea fizicii generale.

Sînt sigur că lucrarea va fi mult folosită de toți cei care fac primii pași în însușirea meseriei de fizician reprezentînd, alături de alte traduceri și tratate scrise de specialiști români, o carte de referință. Consider că Editura didactică și pedagogică face, prin publicarea traducerii acestui curs, un serviciu real învățămîntului de fizică, precum și învățămîntului tehnic, în general, din țara noastră.

Acad. prof. Ioan Ursu.

Prefaţa la cursul de fizică Berkeley

Acesta este un curs general de fizică de doi ani pentru studenţii ce urmează ştiinţele şi ingineria. Intenţia autorilor a fost de a prezenta elementele de fizică pe cît posibil în modul în care sînt folosite de către fizicienii ce lucrează pe fronturi înaintate ale domeniului lor. Ne-am gîndit să facem un manual care să scoată în evidenţă fundamentele fizicii. Obiectivele noastre particulare au fost de a introduce în mod coerent într-o programă elementară ideile relativităţii restrînse, fizicii cuantice şi ale fizicii statistice.

Acest curs se adresează oricărui student ce a urmat un curs de fizică în liceu. În paralel cu acest curs ar trebui urmat un curs de matematică incluzînd calculul diferenţial şi integral.

În momentul de faţă[1], în Statele Unite se află în lucru cîteva noi cursuri universitare de fizică. Ideea de a elabora cursuri noi aparţine multor fizicieni afectaţi atît de nevoile dezvoltării ştiinţei şi ingineriei cît şi de accentul crescînd pus de studiul ştiinţelor în şcoala generală şi în liceu. Propriul nostru curs a fost iniţiat ca urmare a discuţiei ce a avut loc la sfîrşitul anului 1961 între Philip Morrison de la Universitatea Cornell şi Charles Kittel. Am fost încurajaţi de către John Mays şi colegii săi de la Fundaţia Naţională de Ştiinţă şi de către Walter C. Michels, pe atunci preşedintele Comisiei de fizică universitară. S-a format un comitet neoficial care să îndrume elaborarea cursului în etapele iniţiale. Comitetul a fost alcătuit la început, din Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman şi Jerrold R. Zacharias. Comitetul s-a întrunit pentru prima dată în mai 1962, la Berkeley; la acea dată a elaborat un plan provizoriu a noului curs de fizică. Din cauza obligaţiilor unora dintre membrii iniţiali, comitetul a fost parţial reconstituit în ianuarie 1964 şi acum constă din subsemnaţii. Contribuţiile celorlalţi au fost recunoscute în prefeţele la volumele individuale.

Planul provizoriu şi ideea care a stat la baza elaborării lui au avut o puternică influenţă asupra cursului final. Planul a acoperit în întregime temele şi deprinderile care credem că ar trebui şi ar putea fi însuşite de către studenţii începători în studiul ştiinţei şi ingineriei. N-am avut niciodată intenţia să elaborăm un curs adresat numai absolvenţilor sau studenţilor avansaţi. Ne-am gîndit să prezentăm principiile fizicii din puncte de vedere noi şi unificatoare. De aceea, părţi ale acestui curs pot părea aproape tot atît de noi atît pentru cel care instruieşte cît şi pentru cel instruit. Cele cinci volume ale cursului vor include:

I Mecanica (Kittel, Knight, Ruderman)
II Electricitate şi Magnetism (Purcell)
III Unde şi Oscilaţii (Crawford)
IV Fizica cuantică (Wichmann)
V Fizica statistică (Reif)

---

[1] În ianuarie 1965 (N.T.).

Autorii fiecărui volum au fost liberi să-şi aleagă stilul şi metoda de prezentare potrivite subiectului elaborat.

Activitatea de început la acest curs l-a condus pe Alan M. Portis să conceapă un nou laborator de fizică generală denumit acum Laboratorul de fizică Berkeley. Deoarece cursul scoate în evidenţă principiile fizicii, unor profesori li s-ar putea părea că el nu se ocupă îndeajuns de fizica experimentală. Laboratorul este bogat în experienţe importante şi este făcut să contrabalanseze cursul.

Suportul financiar în vederea apariţiei acestui curs a fost dat de Fundaţia Naţională de Ştiinţă cu un aport indirect din partea Universităţii din California. Fondurile au fost administrate de către Compania pentru servicii de educaţie, o organizaţie constituită pentru a administra îmbunătăţirea programelor generale. Sîntem în mod special îndatoraţi lui Gilbert Oakley, James Aldrich şi William Jones, toţi de la Compania pentru servicii de educaţie pentru sprijinul lor substanţial şi binevoitor. Compania a deschis la Berkeley, sub competenta direcţie a doamnei Mary R. Maloney, un oficiu pentru a ajuta la dezvoltarea cursului şi a laboratorului. Universitatea din California nu a avut o legătură oficială cu programul nostru dar ne-a ajutat în diferite moduri. Pentru acest ajutor dorim să mulţumim în special celor doi preşedinţi consecutivi ai catedrei de fizică, August C. Helmholz şi Burton J. Moyer, cadrelor didactice şi personalului departamentului, lui Donald Coney şi multor altora din Universitate. Abraham Olshen ne-a ajutat mult la problemele iniţiale de organizare.

Corecturile şi sugestiile dumneavoastră vor fi întotdeauna bine primite.

Eugene D. Commins — Edward M. Purcell
Frank S. Crawford, Jr. — Frederick Reif
Walter D. Knight — Malvin A. Ruderman
Philip Morrison — Eyvind H. Wichmann
Alan M. Portis — Charles Kittel, preşedinte

Berkeley, California

Prefață la volumul II

Acest volum al Cursului de fizică de la Berkeley conține electricitatea și magnetismul. Succesiunea temelor, în general, este cea obișnuită; electrostatică, curent continuu, cîmp magnetic, inducție electromagnetică, polarizarea electrică și magnetică a substanței. Și totuși, modul lor de tratare diferă de cel tradițional. Diferența este și mai evidentă în capitolele 5 și 6 în care, pe baza materiei prezentate în volumul I, tratăm cîmpul electric și magnetic al sarcinilor în mișcare ca manifestări ale relativității și invarianței sarcinii electrice. Această tratare atrage atenția asupra unor chestiuni importante ca: conservarea sarcinii, invarianța sarcinii, noțiunea de cîmp. Singurul formalism necesar din teoria relativității speciale este transformarea Lorentz de coordonate și formula compunerii vitezelor. Este important, totuși, ca înainte de a începe studiul acestei părți, studentul să cunoască cîteva idei și situații dezvoltate în volumul I, printre care capacitatea de a vedea lucrurile din diferite sisteme de referință, să aprecieze invarianța și să respecte condițiile de simetrie. În volumul II vom utiliza mult, de asemenea, principiul superpoziției.

Modul de tratare a fenomenelor electrice și magnetice din substanță este în principal „microscopic", bazîndu-se pe natura atomică și moleculară a dipolilor, atît electrici cît și magnetici. Conducția electrică, este, de asemenea, descrisă microscopic pe baza modelului Drude-Lorentz. Evident, unele chestiuni rămîn deschise pînă cînd studentul își însușește fizica cuantică din volumul IV. Dar noi vorbim liber despre molecule și atomi ca despre structuri electrice cu dimensiuni, formă și rigiditate, despre orbite electronice și spin. Încercăm să tratăm atent o chestiune care uneori este ocolită sau conținută în cursuri introductive, noțiunea de cîmpuri macroscopice **E** și **B** în substanță.

În vol. II, bagajul de cunoștințe matematice al studentului este îmbogățit cu noțiuni de calcul vectorial — ca gradient, divergență, rotor și laplacean. Aceste noțiuni sînt corespunzător dezvoltate în capitolele de la început.

În versiunea inițială volumul II a fost predat la Universitatea din California. El a beneficiat de observațiile aduse de mai multe persoane avînd legătură cu cursul de la Berkeley și în special de contribuțiile lui E. D. Commins și F. S. Crawford Jr., care au predat primii cursul. Ei și studenții lor au descoperit numeroase porțiuni care trebuiau clarificate sau chiar corectate; multe din revizuiri s-au bazat pe sugestiile lor. Observațiile critice ale studenților la ultima versiune au fost strînse de Robert Garen, care a ajutat și la aranjarea problemelor. Observații critice prețioase am primit, de asemenea, de la J. D. Gavenda care a predat cursul în versiunea inițială la Universitatea din Texas și de la E. F. Taylor de la Universitatea Wesleyan. Într-un stadiu anterior Allan Kaufman a contribuit cu idei. A. Felzer a prelucrat cea mai mare parte a primei noastre schițe constituind primul „test studențesc".

Acest mod de tratare a electricității și magnetismului a fost încurajat nu numai de comitetul nostru inițial format pentru scrierea cursului dar și de colegi de la Institutul de Tehnologie din Massachusetts (M.I.T.) care lucrau în paralel pentru un nou curs. Dintre ultimii J. R. Tessman de la Centrul de îndrumare a profesorilor M. I. T. și Universitatea din Tuft ne-a ajutat în mod special și ne-a influențat la formularea inițială

El a predat cursul în versiunea inițială la MIT și de observațiile sale critice s-a ținut seama în multe din transformările și corecturile ce-au urmat.

Publicarea versiunii preliminare și a revizuirilor succesive a fost apoi văzută de doamna Mary R. Malonay. Cea mai mare parte a manuscrisului a fost dactilografiată de doamna Lila Loweller. Ilustrațiile în ultima formă au fost realizate de Felix Cooper.

Autorul acestui volum rămîne profund îndatorat prietenilor săi din Berkeley și mai ales lui Charles Kittel, pentru stimularea și încurajarea constantă care a făcut ca această sarcină grea să fie plăcută.

E. M. Purcell

Îndrumări metodice

Materia conținută în volumul II poate fi suficient de bine parcursă într-un semestru de 14–15 săptămîni. Aceasta înseamnă că un student, care și-a însușit materialul cuprins în volumul I, este capabil să studieze cu atenție materialul de bază, să citească fără a se grăbi prea mult celelalte părți ale textului și să facă cunoștință cu cel puțin una sau două probleme speciale introduse în exerciții. Cu toate acestea, este necesară o selectare și planificare rațională a materialului. Volumul cursului depășește numărul temelor ce pot fi *studiate* cu atenție într-un semestru. O serie de paragrafe pot fi și trebuie omise la prima citire sau să fie recomandate doar ca lectură facultativă. În indicațiile de mai jos vom preciza paragrafele ce sînt mai mult sau mai puțin obligatorii. Spunem „mai mult sau mai puțin" întrucît în final decide profesorul, în funcție de posibilitățile și interesul studenților, de timpul disponibil și de punctul de vedere personal al profesorului asupra subiectului respectiv.

Problemele

Au fost propuse mult mai multe probleme decît ar corespunde posibilităților studenților. Ele se împart în două categorii. Problemele de la sfîrșitul fiecărui capitol se referă direct la cunoștințele de bază prezentate în capitolul respectiv și constituie exerciții obligatorii. Dacă studentul întîmpină dificultăți serioase cu una din acestea, înseamnă că el nu și-a însușit una din cunoștințele fundamentale. Lista de probleme, pentru fiecare capitol, se continuă la sfîrșitul cărții în paragraful intitulat „Alte probleme și întrebări". Deși diferența dintre cele două categorii de probleme nu este întotdeauna prea mare, problemele suplimentare au un caracter mai general și sînt, de obicei, mai interesante decît cele date la sfîrșitul capitolului. Unele dintre ele introduc aplicații noi sau chiar teme noi. O demonstrație omisă uneori în text este dezvoltată pe baza indicațiilor și discuțiilor din problemă. Aceste probleme și întrebări urmăresc diferite scopuri: dau de gîndit studenților buni, sugerează domeniul larg de aplicații al ideilor studiate, chiar dacă nu sînt rezolvate ci pur și simplu citite. Unele probleme pot servi ca puncte de plecare în studiul unor chestiuni speciale. (Un exemplu este problema 4.25 despre dioda cu sarcină spațială limitată). De fapt, este util ca în timpul lecției să se rezolve două sau trei probleme de acest fel. Întrebările suplimentare pot fi deseori folosite ca punct de plecare pentru o discuție la curs.

Experimente de curs

Experimentele de curs sînt deosebit de importante. Nici o carte nu poate da studentului o reprezentare completă asupra electricității și magnetismului. Cărțile tind să fie prea teoretizate mai ales în cazul subiectelor ce au o minunată structură logică. Nici această carte nu face excepție. Studenții trebuie să pună mîna pe magneți, să bobineze, să producă descărcări, să vadă un instrument electric sensibil, să cunoască un instrument foarte precis. Ei trebuie să sesizeze efectul unui megawatt cît și a unui

microwatt. Laboratorul din Berkeley este bun pînă la un punct. Trebuie, însă, folosite orice alte mijloace pentru a introduce studentul în lumea în care cîmpul electric nu mai este doar un simbol ci ceva palpabil.

Examenele

În această carte multe probleme sînt tratate la un nivel destul de ridicat. Credem că studentul va profita de pe urma unei asemenea expuneri. Totuşi nu trebuie să fim tentaţi să examinăm la acelaşi nivel. Experienţa noastră arată că examinările relativ simple sînt cele mai bune.

Capitolul 1. (Electrostatică: sarcini şi cîmpuri) Cuprinde o expunere directă a ideilor fundamentale. Materialul este destul de arid şi poate fi însoţit, chiar de la început, de experienţe de electrostatică.

Paragrafe facultative: 1.6.

Capitolul 2. (Potenţial electric) În acest capitol nu se introduc prea multe noţiuni noi de fizică, dar se dezvoltă noţiuni noi de matematică. Acest material trebuie parcurs cu grijă, într-un ritm corespunzător nivelului de înţelegere şi pregătire al studenţilor. Orice chestiune din acest capitol va fi necesară mai curînd sau mai tîrziu. Operatorul rotor, totuşi, nu va fi prea mult folosit pînă la cap. 6. În scopul diluării materialului, dacă se consideră necesar, citirea paragrafelor 2.15 pînă la 2.18 poate fi amînată pînă atunci. Este necesar ca studenţii să înţeleagă intuitiv natura divergenţei şi rotorului. În text sînt introduse cîteva chestiuni ajutătoare ca figurile 2.32 şi 2.34 şi cîteva exerciţii, dar acestea nu suplinesc expunerea, schiţarea pe tablă, discuţiile.

Paragrafe facultative: nici unul.

Capitolul 3. (Cîmpul electric în jurul conductorilor) Acest capitol poate fi parcurs destul de repede. Condensatorul plan-paralel, introdus aici, va reapare frecvent. Legate de teorema unicităţii apar unele idei importante; nebanalitatea acestei teoreme este cel mai bine pusă în evidenţă prin discuţii. Introducerea metodei de relaxare şi a metodei variaţionale pentru problemele la limită din electrostatică nu este prea obişnuită la această etapă, dar studenţii par interesaţi de aceste probleme care, înainte de toate, sînt mult mai utile şi instructive decît tradiţionalele trucuri cu „imagini". Cu toate acestea, întregul paragraf (3.8) poate fi sărit fără consecinţe. La fel şi paragraful 3.6, care introduce coeficienţii capacitivi şi intenţionează să prezinte pe scurt, folosind exemple concrete, cum pot fi descrise sistemele liniare în general. O lipsă a acestui capitol este faptul că nu cuprinde nici o descriere a instrumentelor sau experienţelor referitoare la cîmpuri: electroscoape, voltmetre electrostatice etc. Pentru a ne introduce în realitate, sînt necesare aici experimente de curs şi lucrări de laborator.

Paragrafe facultative: 3.6, 3.8.

Capitolul 4. (Curenţi electrici) Noţiunea de densitate de curent de volum este introdusă mai devreme şi se explică din punct de vedere microscopic transportul de sarcină prin ioni. Fizica ce stă la baza legii lui Ohm este studiată pe calea modelului clasic Drude-Lorentz. Acest material din paragraful 4.4 poate fi tratat mai mult sau mai puţin profund după cum permite programa. Nici una din problemele ce urmează nu este legată de el. Dar noţiunile de fizică cuprinse aici sînt importante şi, prin urmare, ar trebui ca studentul să-l citească. Tratarea circuitelor de curent continuu a fost trecută la noţiuni fundamentale. El poate fi extins uşor în direcţiile necesare prin exemple şi probleme. Studenţii au efectuat în Laboratorul de la Berkeley lucrări practice cu circuite cu mult înaintea acestui capitol.

Paragrafe facultative: 4.5, 4.6, 4.10.

Capitolul 5. (Cîmpul purtătorilor de sarcină în mişcare) În urma studierii volumului I şi din lucrările de laborator, studentul cunoaşte cîmpul magnetic şi forţa $q(\vec{v} \times \vec{B})$ exercitată asupra sarcinii în mişcare. Este bine ca înaintea începerii capitolului să se reia aceste

noţiuni. Înaintea începerii paragrafului 5.3, se vor face experienţe simple de interacţiuni magnetice şi mai ales cu forţa ce acţionează între doi curenţi paraleli. În acest capitol, studentul va privi interacţiunile magnetice dintr-un punct de vedere nou. Invarianţa sarcinii este un fapt fizic fundamental. Pentru a-l aprecia, definirea sarcinii în sistemul purtător de sarcină în mişcare trebuie făcută cu grijă.

Un prim scop al capitolului este înţelegerea clară a cîmpului electric al unui purtător de sarcină în mişcare. Cheia înţelegerii este transformarea cîmpului electrostatic în sistemul de referinţă în mişcare. Aici este necesară, discutarea amănunţită a noţiunii de cîmp. Studentul va privi cu suspiciune deducerea legii generale de transformare dacă nu va înţelege demonstraţia din paragraful 5.5; ea îi va apărea ca un caz foarte special. Cîmpul electric al particulelor relativiste este o interesantă surpriză pentru majoritatea studenţilor, chiar şi pentru cei mai pretenţioşi care se aşteaptă mai curînd la un cîmp „retardat". Aici, radiaţia este doar un mic pas înainte şi deşi am amînat-o pentru volumul III, se poate, totuşi, arăta studenţilor cum apare radiaţia de frînare (v. prob. 5.8) şi radiaţia sincrotronică. Paragraful 5.8, care ia mai mult timp pentru a demonstra ceva ce studentul a luat de bun, poate fi mult scurtat dacă studenţii au studiat transformările pentru forţă din volumul I. În ultimul paragraf rezultă dependenţa de viteză a forţei. Detaliile de calcul sînt mai puţin importante decît înţelegerea deducerii. Poate fi subliniată simplitatea şi exactitatea rezultatului.

Paragrafe facultative: nici unul.

Capitolul 6. (Cîmpul magnetic) Se reintroduce inducţia cîmpului magnetic **B**, originea căreia a fost expusă. Relaţia integrală $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$, dedusă pentru curenţi rectilinii, este pur şi simplu postulată ca fiind valabilă pentru orice curent continuu în general. (Continuarea deducerii ar fi implicat particule cu sarcină accelerate). Din mai multe motive am introdus în acest capitol potenţialul vector. Aşa cum este folosit aici şi mai departe în capitolul 10, nu este complicat. Orice student care se ocupă de fizică trebuie să se familiarizeze cu el. Deşi nu există neclarităţi în text, trebuie ţinut cont de diferenţa dintre un vector axial şi unul polar şi trebuie să fim atenţi în continuare la studiul lui **E** şi **B** în interiorul substanţei, referitor la deosebirea esenţială în simetria dintre sursele cîmpului electric şi magnetic. În acest capitol, totuşi, accentul trebuie pus pe cîmpul magnetic. Legile de transformare pentru cîmpuri în vid, pot fi ilustrate prin cîteva exemple. Problema 6.15, de exemplu, este una din cele care pot fi rezolvate şi discutate. Paragrafele 6.8 şi 6.9 nu sînt indispensabile (deşi prima parte a paragrafului 6.9 este importantă în clarificarea unei anumite chestiuni) şi pot fi indicate ca lectură facultativă.

Paragrafe facultative; 6.8, 6.9.

Capitolul 7. (Inducţia electromagnetică şi ecuaţiile lui Maxwell) Pentru a face introducerea în acest capitol poate fi folosită o mare varietate de demonstraţii experimentale. Echivalenţa despre care s-a discutat în paragrafele 7.2, 7.3 şi 7.4 poate fi foarte clar pusă în evidenţă cu ajutorul unui galvanometru balistic sensibil, cu bobine în mişcare şi magneţi. (Nu ezitaţi să aduceţi magneţi permanenţi, deşi în text ei nu sînt menţionaţi pînă la capitolul 10!). Acest capitol nu prezintă probleme speciale iar posibilităţile ilustraţiilor practice ale inducţiei sînt nelimitate. În două puncte expunerea noastră poate părea superficială şi pripită; (1) paragraful 7.8 în care se expun dificultăţile autoinducţiei, cu scopul de a introduce la început inducţia mutuală, (2) paragraful 7.12 unde se discută rolul curentului de deplasare.

Din experienţa noastră ştim că aceste chestiuni tratate neatent pot eventual nelinişti un student care meditează; ele ar fi putut fi tratate direct de la bun început. Odată cunoscute ecuaţiile lui Maxwell este greu să rezişti tentaţiei de a vorbi despre undele electromagnetice şi în ultima parte a paragrafului 7.13 intrăm puţin în domeniul volumului III.

Paragrafe facultative: 7.7; ultima parte din 7.13.

Capitolul 8. (Circuite de curent alternativ) Se parcurg doar părţile elementare ale teoriei curentului alternativ. Sperăm ca această introducere modestă să completeze cunoştinţele practice obţinute de studenţi în laborator. Exerciţiile cu reprezentări complexe îl vor pregăti pentru studiul volumului III. Dacă timpul permite, profesorul poate extinde această prezentare ce poate fi făcută uşor urmînd calea obişnuită. Sau, poate sări întreg capitolul dacă studenţii săi încep studiul amănunţit al circuitelor de curent alternativ la cursul de electrotehnică. În acest caz, paragraful 8.1 trebuie studiat la capitolul 7 unde urmează logic după paragraful 7.10.

Paragrafe facultative: (toate cu excepţia paragrafului 8.1).

Capitolul 9. (Cîmpuri electrice în substanţă) Fără o planificare atentă, timpul rămas pentru capitolele 9 şi 10 s-ar putea să fie prea scurt. Acestor capitole trebuie să li se atribuie mai mult de o cincime din întregul curs-trei sau mai bine patru săptămîni dintr-un semestru de 14 săptămîni. Aici ne-am propus în principal să facem cunoscut studentului structura electrică a substanţei; teoria formală a cîmpului macroscopic este pe locul al doilea. De exemplu, dacă timpul ne presează, putem renunţa la exemplul clasic al sferei dielectrice în favoarea dipolilor moleculari induşi şi permanenţi. (Totuşi, unul din paragrafele lungi — 9.13, poate fi oricum omis la prima citire cu excepţia studenţilor foarte bine pregătiţi). Este necesară folosirea cunoştinţelor de chimie ale studenţilor, oricum ar fi ele. Acest subiect este terenul comun al fizicienilor şi chimiştilor şi fundamentele sale privesc în mod egal şi pe viitorii specialişti în biologie moleculară şi pe fiziologi. Folosiţi-le în spiritul lui Debye!

Paragrafe facultative; 9.6, 9.10, 9.11, 9.13, 9.17.

Capitolul 10. (Cîmpuri magnetice în substanţă) Acest capitol cere ceva mai puţin timp decît cap. 9, şi la fel ca şi cap. 9 el deschide mai multe perspective pentru ca profesorul să-şi conducă studenţii în incursiuni fascinante. Dacă timpul este scurt, se pot expune doar rezultatele paragrafelor 10.3 şi 10.4, fără demonstraţii, înaintea analizei clasice amănunţite a diamagnetismului, introdus în paragraful 10.5, începînd cu ec. (23). De asemeni ne putem opri mai puţin asupra chestiunii cîmpurilor macroscopice în substanţă, chestiune la care studentul poate reveni mai tîrziu cînd are absolută nevoie de ea. Tratarea cîmpului magnetic macroscopic se face paralel cu tratarea cîmpului electric în cap. 9. În ambele cazuri se evită folosirea ipoteticilor „cavităţi". Sintetizarea noţiunilor din figura 10.19 poate folosi ca ghid profesorului în expunerea sa.

Capitolul 1

Electrostatica: sarcini şi cîmpuri

1.1. Sarcina electrică 18
1.2. Conservarea sarcinii 19
1.3. Cuantificarea sarcinii 21
1.4. Legea lui Coulomb 22
1.5. Energia unui sistem de purtători de sarcini 26
1.6. Energia electrică a unei reţele cristaline 30
1.7. Cîmpul electric 32
1.8. Distribuţii de sarcină 36
1.9. Flux 37
1.10. Legea lui Gauss 39
1.11. Cîmpul unei distribuţii sferice de purtători de sarcină 42
1.12. Cîmpul unei sarcini liniar distribuite 44
1.13. Cîmpul sarcinii distribuite pe un plan infinit 45
Probleme 47

microwatt. Laboratorul din Berkeley este bun pînă la un punct. Trebuie, însă, folosite orice alte mijloace pentru a introduce studentul în lumea în care cîmpul electric nu mai este doar un simbol ci ceva palpabil.

Examenele

În această carte multe probleme sînt tratate la un nivel destul de ridicat. Credem că studentul va profita de pe urma unei asemenea expuneri. Totuşi nu trebuie să fim tentaţi să examinăm la acelaşi nivel. Experienţa noastră arată că examinările relativ simple sînt cele mai bune.

Capitolul 1. (Electrostatică: sarcini şi cîmpuri) Cuprinde o expunere directă a ideilor fundamentale. Materialul este destul de arid şi poate fi însoţit, chiar de la început, de experienţe de electrostatică.

Paragrafe facultative: 1.6.

Capitolul 2. (Potenţial electric) În acest capitol nu se introduc prea multe noţiuni noi de fizică, dar se dezvoltă noţiuni noi de matematică. Acest material trebuie parcurs cu grijă, într-un ritm corespunzător nivelului de înţelegere şi pregătire al studenţilor. Orice chestiune din acest capitol va fi necesară mai curînd sau mai tîrziu. Operatorul rotor, totuşi, nu va fi prea mult folosit pînă la cap. 6. În scopul diluării materialului, dacă se consideră necesar, citirea paragrafelor 2.15 pînă la 2.18 poate fi amînată pînă atunci. Este necesar ca studenţii să înţeleagă intuitiv natura divergenţei şi rotorului. În text sînt introduse cîteva chestiuni ajutătoare ca figurile 2.32 şi 2.34 şi cîteva exerciţii, dar acestea nu suplinesc expunerea, schiţarea pe tablă, discuţiile.

Paragrafe facultative: nici unul.

Capitolul 3. (Cîmpul electric în jurul conductorilor) Acest capitol poate fi parcurs destul de repede. Condensatorul plan-paralel, introdus aici, va reapare frecvent. Legate de teorema unicităţii apar unele idei importante; nebanalitatea acestei teoreme este cel mai bine pusă în evidenţă prin discuţii. Introducerea metodei de relaxare şi a metodei variaţionale pentru problemele la limită din electrostatică nu este prea obişnuită la această etapă, dar studenţii par interesaţi de aceste probleme care, înainte de toate, sînt mult mai utile şi instructive decît tradiţionalele trucuri cu „imagini“. Cu toate acestea, întregul paragraf (3.8) poate fi sărit fără consecinţe. La fel şi paragraful 3.6, care introduce coeficienţii capacitivi şi intenţionează să prezinte pe scurt, folosind exemple concrete, cum pot fi descrise sistemele liniare în general. O lipsă a acestui capitol este faptul că nu cuprinde nici o descriere a instrumentelor sau experienţelor referitoare la cîmpuri: electroscoape, voltmetre electrostatice etc. Pentru a ne introduce în realitate, sînt necesare aici experimente de curs şi lucrări de laborator.

Paragrafe facultative: 3.6, 3.8.

Capitolul 4. (Curenţi electrici) Noţiunea de densitate de curent de volum este introdusă mai devreme şi se explică din punct de vedere microscopic transportul de sarcină prin ioni. Fizica ce stă la baza legii lui Ohm este studiată pe calea modelului clasic Drude-Lorentz. Acest material din paragraful 4.4 poate fi tratat mai mult sau mai puţin profund după cum permite programa. Nici una din problemele ce urmează nu este legată de el. Dar noţiunile de fizică cuprinse aici sînt importante şi, prin urmare, ar trebui ca studentul să-l citească. Tratarea circuitelor de curent continuu a fost trecută la noţiuni fundamentale. El poate fi extins uşor în direcţiile necesare prin exemple şi probleme. Studenţii au efectuat în Laboratorul de la Berkeley lucrări practice cu circuite cu mult înaintea acestui capitol.

Paragrafe facultative: 4.5, 4.6, 4.10.

Capitolul 5. (Cîmpul purtătorilor de sarcină în mişcare) În urma studierii volumului I şi din lucrările de laborator, studentul cunoaşte cîmpul magnetic şi forţa $q(\vec{v} \times \vec{B})$ exercitată asupra sarcinii în mişcare. Este bine ca înaintea începerii capitolului să se reia aceste

1.1. SARCINA ELECTRICĂ

Primilor ei cercetători electricitatea le-a apărut ca un fenomen uluitor. Pentru a smulge corpurilor „focul ascuns", cum era numit uneori, pentru a le aduce într-o stare puternic electrizată, pentru a produce un curent staționar, se cerea multă inventivitate. Părea că fenomenele obișnuite ale naturii, cu excepția fulgerului, începînd cu înghețarea apei și pînă la creșterea unui copac, nu au nici o legătură cu comportarea neobișnuită a obiectelor electrizate. Acum știm că proprietățile fizice și chimice ale materiei — de la atom la celula vie — sînt în mare parte determinate de forțele electrice. Atingerea acestui stadiu al cunoașterii îl datorăm savanților secolului al XIX-lea Ampère, Faraday, Maxwell și mulți alții, care au descoperit natura electromagnetismului, cît și fizicienilor și chimiștilor secolului al XX-lea, care au descifrat structura atomică a materiei.

Teoria clasică a electromagnetismului se ocupă cu studiul sarcinilor electrice, a curenților electrici și a interacțiunilor lor, presupunînd că toate aceste mărimi pot fi măsurate independent una de alta și cu precizie din ce în ce mai mare. Aici prin „clasic" se înțelege pur și simplu „necuantic". În teoria clasică a electromagnetismului, ca și în mecanica clasică, legile cuantificării sînt ignorate. De fapt, teoria clasică era aproape de stadiul actual al dezvoltării ei încă înainte de descoperirea lui Planck, păstrîndu-și deplina valabilitate și în prezent. Nici revoluția produsă în concepțiile noastre de fizica cuantică, nici dezvoltarea teoriei speciale a relativității, n-au umbrit strălucirea ecuațiilor cîmpului electromagnetic date de Maxwell cu peste o sută de ani în urmă.

Bineînțeles, teoria era fundamentată experimental și astfel a putut fi aplicată în domenii practice, ca de exemplu, la bobine, condensatori, curenți alternativi și, în fine, la radiounde și unde luminoase. Dar chiar un asemenea succes nu poate fi o garanție a valabilității ei și în alt domeniu, ca de exemplu, fenomenele intramoleculare.

Importanța pe care continuă s-o aibă teoria clasică a electromagnetismului în fizica modernă se explică prin faptul că, în primul rînd, teoria specială a relativității nu cere revizuirea teoriei clasice a electromagnetismului. Privită din punct de vedere istoric, teoria specială a relativității s-a dezvoltat pe baza teoriei clasice a electromagnetismului și a experiențelor legate de ea. Ecuațiile de cîmp ale lui Maxwell, elaborate cu mult înaintea lucrărilor lui Lorentz și Einstein, sînt perfect compatibile cu teoria relativității. În al doilea rînd, caracteristicile cuantice ale forțelor electromagnetice sînt neglijabile chiar pentru distanțe mai mici de 10^{-10} cm, care sînt de o sută de ori mai mici decît dimensiunea atomului. Pentru descrierea respingerii și atracției particulelor din atom se aplică aceleași legi ca și în cazul foițelor unui electroscop deși, pentru a prezice comportarea particulelor

sub acţiunea forţelor electrice avem nevoie de mecanica cuantică. Pentru distanţe mai mici, are loc o fuzionare destul de reuşită a teoriei electromagnetice şi cuantice — numită *electrodinamică cuantică* — se pare, în acord cu experienţa pînă la cele mai mici distanţe accesibile pînă în prezent privind studiul interacţiunilor.

Presupunînd că cititorul este familiarizat cu noţiunile de bază din electricitate, nu vom repeta toate experienţele care demonstrează existenţa purtătorilor de sarcină electrică, sau toate dovezile care vin în sprijinul structurii electrice a materiei. Pe de altă parte, vom revizui cu atenţie bazele experimentale ale legilor fundamentale, de care depind toate celelalte legi. În acest capitol vom studia fizica sarcinilor electrice staţionare — *electrostatica*.

Una din proprietăţile fundamentale ale sarcinii electrice este, desigur, existenţa ei în cele două forme, care au fost denumite încă de mult, sarcină pozitivă şi negativă. S-a observat că toate particulele încărcate pot fi împărţite în două clase, astfel încît particulele aparţinînd aceleiaşi clase se resping, atrăgînd, în acelaşi timp, particulele aparţinînd celeilalte clase. Dacă două corpuri mici încărcate, A şi B, separate printr-o distanţă oarecare, se resping şi dacă A atrage un al treilea corp electrizat C, atunci întotdeauna B va atrage C. Această proprietate universală nu este încă perfect elucidată. Dar fizicienii contemporani consideră sarcinile pozitive şi negative ca fiind în fond, manifestări opuse ale aceleiaşi calităţi, aşa cum „dreapta" şi „stînga" sînt manifestări opuse ale proprietăţii de simetrie. Într-adevăr, problema simetriei, cu noţiunile „dreapta" şi „stînga", pare strîns legată de dualitatea sarcinii electrice şi de o altă simetrie fundamentală — cele două sensuri ale timpului. Fizica particulelor elementare aduce o oarecare lumină în aceste probleme.

Sarcina pe care o numim negativă, poate fi, la fel de bine, numită pozitivă şi invers.* Alegerea a fost o întîmplare istorică. Universul nostru reprezintă un echilibru de sarcini electrice pozitive şi negative, ceea ce nu este de mirare, întrucît sarcinile de acelaşi fel se resping.

Pentru înţelegerea structurii electrice a materiei, sînt esenţiale alte două proprietăţi ale sarcinii electrice: sarcina se conservă şi se cuantifică. Aceste proprietăţi se referă la *mărimea* sarcinii şi, prin urmare, implică măsurarea ei. În acest capitol, vom stabili cum poate fi măsurată sarcina cu precizie, folosind forţa de interacţiune între sarcinile aflate la o distanţă bine determinată ş.a.m.d. Dar pînă atunci, să considerăm acest lucru cunoscut şi să discutăm cele două proprietăţi esenţiale ale sarcinii electrice amintite mai sus.

1.2. CONSERVAREA SARCINII

Într-un sistem izolat, sarcina totală rămîne neschimbată. Prin *izolat* înţelegem că nici un fel de substanţă nu trece graniţele ce delimitează sistemul. Lumina poate intra sau ieşi din sistem, fără a afecta acest principiu,

---

* Sarcina unui electron obişnuit nu are nimic intrinsec negativ. O dată ce înmulţirea a fost definită, un număr întreg negativ diferă de un număr întreg pozitiv prin aceea că pătratul lui este un număr întreg de semn opus. Dar produsul a două sarcini nu este o sarcină, deci nu există paralelism.

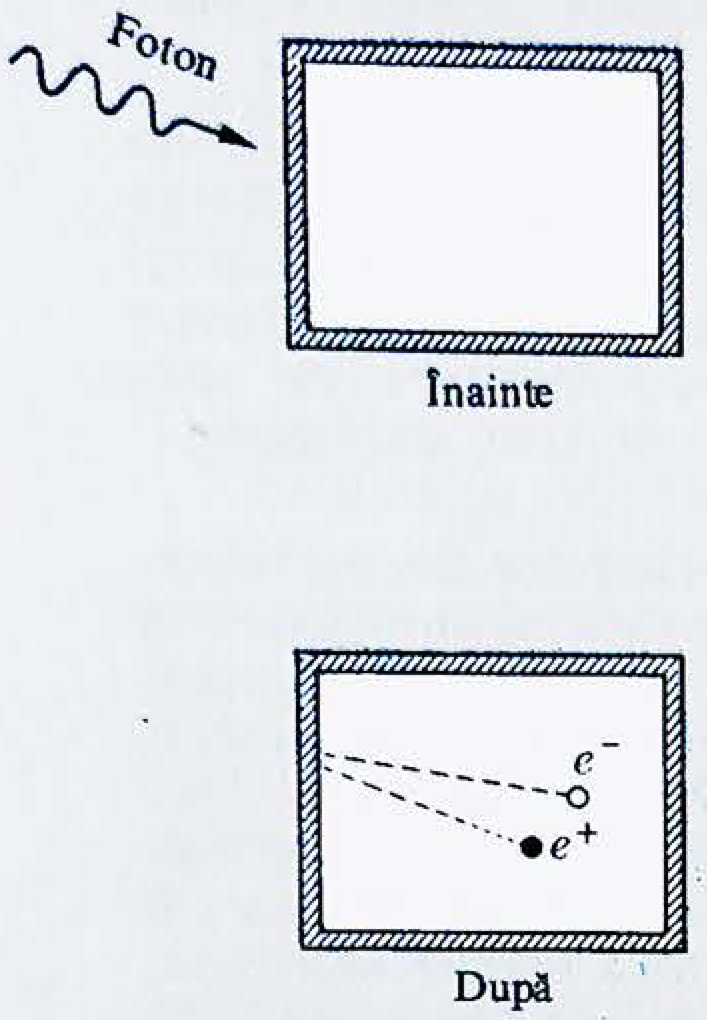


Fig. 1.1. Particulele încărcate apar perechi cu sarcini egale în mărime și de semne contrare.

întrucît fotonul nu are sarcină. De exemplu, într-o incintă cu pereți subțiri, aflată în vid și expusă razelor gamma, se poate observa formarea de perechi, prin transformarea unui foton de înaltă energie într-un electron negativ și unul pozitiv (fig. 1.1).

Au luat naștere două particule încărcate electric, dar variația sarcinii totale, în interiorul și pe suprafața incintei, este *nulă*. Legea conservării sarcinii n-ar fi respectată în cazul creării unei particule încărcate pozitiv *fără* crearea simultană a unei particule încărcate negativ. Un asemenea fenomen n-a fost observat niciodată.

Bineînțeles că, în cazul în care sarcinile electrice ale electronului și pozitronului nu ar fi perfect egale, formarea perechii ar încălca legea strictă a conservării sarcinii. Conform determinărilor experimentale, sarcinile lor *sînt* egale. O verificare experimentală interesantă este dată de structura numită *pozitronium*, care constă dintr-un electron și un pozitron. Acest „atom" curios poate exista un timp suficient de lung — în jurul unei zecimi de microsecundă — pentru a putea fi studiat în detaliu. El se comportă ca și cum ar fi neutru din punct de vedere electric. Majoritatea fizicienilor ar fi uluiți și nici n-ar crede, dacă s-ar găsi vreo diferență în mărimea sarcinilor, întrucît raportul dintre electron și pozitron este similar cu raportul ce există între particulă și antiparticulă.

Această egalitate perfectă a sarcinilor, ca și cea a maselor, este o manifestare a unei simetrii universale a naturii, dualitatea particulă-antiparticulă. S-ar putea presupune că conservarea sarcinii este doar o consecință a unei legi mai generale de conservare, care ar dicta crearea și anihilarea particulelor. Dar s-ar putea pune problema și invers: conservarea sarcinii să fie fundamentală și celelalte legi să fie conforme cu ea. Noi nu știm încă dacă aceste întrebări au rost.

Un singur lucru ne este clar în studiul electromagnetismului: neconservarea sarcinii ar fi incompatibilă cu conținutul actual al teoriei electromagnetice. Prin urmare, *legea conservării sarcinii* poate fi formulată fie ca un postulat al teoriei, sau ca o lege empirică, verificată de toate observațiile făcute pînă în prezent, fără excepție:

> Într-un sistem izolat, sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor pozitive și negative, se conservă.

Mai devreme sau mai tîrziu, ne vom pune întrebarea dacă această lege satisface condiția de invarianță relativistă. Amînăm discutarea acestei chestiuni importante pînă la capitolul 5. Dar răspunsul este afirmativ și nu numai în sensul că formularea de mai sus este adevărată în orice sistem de referință inerțial, dar și într-un sens mai riguros: observatori aflați în diferite sisteme de referință, măsurînd sarcina, obțin aceeași valoare. Cu alte cuvinte, sarcina electrică totală a unui sistem izolat este un invariant relativist.

1.3. CUANTIFICAREA SARCINII

Experiența lui Millikan cu picătura de ulei și un alt șir de numeroase experiențe au arătat că în natură sarcinile electrice sînt *formate din sarcini discrete, de aceeași mărime*. Această mărime o notăm cu e, sarcina electronului. Am stabilit că pozitronul are exact aceeași sarcină. *Remarcabilă* este, de asemenea, egalitatea perfectă a sarcinilor tuturor celorlalte particule încărcate, ca de exemplu egalitatea dintre valoarea sarcinii pozitive a protonului și valoarea sarcinii negative a electronului.

Această egalitate — dintre sarcinile protonului și electronului — a fost stabilită într-o experiență de mare finețe în care se verifică neutralitatea electrică a atomului sau moleculei de hidrogen normal. În acest scop, un fascicul de atomi sau molecule era deviat în cîmp electric. În experiență*, un fascicul bine colimat de atomi de cesiu era dirijat spre o incintă cu vid înaintat plasată într-un cîmp electric intens.

Neobservîndu-se nici un fel de deviere, s-a tras concluzia că sarcina netă a atomului de cesiu trebuie să fie mai mică decît $10^{-16}e$. O experiență de și mai mare finețe a fost recent realizată printr-o altă metodă**. O cantitate mare de hidrogen gazos a fost supusă comprimării într-un rezervor perfect izolat din punct de vedere electric de mediul înconjurător. Apoi s-a dat drumul gazului din rezervor, astfel încît ionii să nu poată ieși. Dacă sarcina protonului ar fi diferită de sarcina electronului, să spunem, cu o fracțiune dintr-un miliard, atunci fiecare moleculă de hidrogen, formată din doi protoni și doi electroni, ar fi transportat o sarcină de $2\times10^{-9}e$, și prin evacuarea întregii mase de hidrogen, sarcina electrică și potențialul rezervorului ar fi variat sensibil. De fapt, în această experiență era posibilă punerea în evidență a unei sarcini reziduale cam de $10^{-20}e$ pe atom și totuși nu s-a observat nimic! Putem trage concluzia, cu o precizie de 10^{-20}, că electronul și protonul au sarcini egale.

Conform concepțiilor actuale, deosebirea dintre electron și proton, ca și dintre alte două particule elementare, nu se limitează numai la semnul sarcinii. De aceea, nimeni încă nu-și explică această precizie fantastică în

---

* J. C. Zorn, G. E. Chamberlain și V. W. Hughes, Phys. Rev. *129*, 2566 (1963).

** J. G. King, Phys. Rev. Letters *5*, 562 (1960). Referințe cu privire la verificările egalității de sarcină, pot fi găsite în acest articol și în capitolul 13 al cărții lui V. W. Hughes, *Gravitație și relativitate*, editată de H. Y. Chiu și W. F. Hoffman (W. A. Benjamin Inc., New York, 1964).

egalitatea sarcinilor. Evident, cuantificarea sarcinii este o lege esențială și universală a naturii. Toate particulele elementare, în măsura posibilităților noastre de investigare, au aceleași valori ale sarcinii. Putem spera că vreo viitoare descoperire sau intuiție teoretică ne va putea explica de ce nu pot exista particule cu sarcina 0,500 e sau 0,999 e*.

Cuantificarea sarcinii, desigur, iese din limitele electromagnetismului clasic. De obicei ignorăm acest fapt și acționăm ca și cum sarcinile punctiforme q ar putea avea orice valoare. Acest lucru nu ne va deranja. Totuși, este bine să reținem că teoria clasică nu este în stare să ne explice structura particulelor elementare. (Nu este sigur că teoria cuantică actuală o poate face!) Ce menține electronul sub forma unui tot unitar, este tot atît de misterios ca și ce anume determină, atît de exact, mărimea sarcinii lui. Întrucît forțele electrostatice, dintre diferitele părți ale electronului sînt repulsive, înseamnă că intervin și forțe de altă natură.

În studiul electricității și magnetismului, vom considera particulele încărcate ca simple purtătoare de sarcină, atît de mici încît dimensiunea și structura lor, în majoritatea cazurilor, poate fi neglijată. În cazul protonului, de exemplu, din experiențele de difuzie la mare energie, cunoaștem că particula nu depășește cu mult raza de 10^{-13} cm. Reamintim că Rutherford, analizînd difuzia particulelor alfa, a arătat că chiar în nucleele grele sarcina electrică se distribuie pe o regiune mai mică decît 10^{-11} cm. Pentru fizicianul secolului al XIX-lea „sarcina punctiformă“ era o noțiune abstractă concretizată, destul de needificator, printr-o bobiță de soc încărcată electric. În momentul de față, sîntem familiarizați cu particulele ce compun atomul. Structura discretă a sarcinii a devenit atît de firească în descrierea modernă a naturii, încît sarcina punctiformă ni se pare o idealizare mai puțin artificială decît o distribuție continuă a densității de sarcină. Cînd postulăm asemenea distribuții continue de sarcini, le putem considera ca niște medieri asupra unui număr foarte mare de sarcini elementare, la fel ca la definirea densității macroscopice a unui lichid, cînd nu ținem seama de neomogenitățile existente la nivel molecular. Cuantificarea sarcinii nu este evidentă pentru obiecte ce sînt mult mai mari ca picăturile de ulei ale lui Millikan!

1.4. LEGEA LUI COULOMB

După cum probabil știți, interacțiunea dintre două sarcini electrice aflate în repaus este descrisă de legea lui Coulomb: două sarcini electrice aflate în repaus se resping sau se atrag cu o forță proporțională cu produsul dintre mărimea sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

---

* Pe baza unor cercetări teoretice recente asupra particulelor elementare, se presupune posibilitatea existenței particulelor cu sarcina egală cu $\frac{1}{3}e$ și $\frac{2}{3}e$. Dar încercările de găsire a unor asemenea particule, în condiții considerate favorabile producerii și detectării lor, au dat greș. (L. B. Leipuner, W. T. Chu, B. C. Larsen, R. K. Adair, *Particule cu sarcina* $\frac{1}{3}e$, Phys. Rev. Letters, *12*, 423 (1964). În momentul de față, încercările pentru găsirea unor asemenea particule, continuă.

Această lege se poate scrie vectorial sub forma:

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2}. \tag{1}$$

Aici q_1 și q_2 sînt numere (scalari) care exprimă mărimea și semnul sarcinii, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ este vectorul unitar orientat* pe suportul celor două sarcini, de la sarcina 1 la sarcina 2 și $\mathbf{F}_2$ este forța ce acționează asupra sarcinii 2. Printre altele, ecuația (1) exprimă și faptul că sarcinile de același fel se resping și sarcinile de semn contrar se atrag și că forța este newtoniană, adică: $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

Vectorul unitar $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ arată că forța este paralelă cu dreapta ce unește cele două sarcini. Pentru ca acest lucru să nu fie adevărat, ar trebui ca însuși spațiul să fie neomogen, dar într-un spațiu vid și izotrop, două sarcini punctiforme sînt unite printr-o dreaptă.

Dacă „sarcina punctiformă" ar avea o structură internă oarecare cu o axă care să determine o direcție, atunci ea nu poate fi descrisă doar printr-o mărime scalară q.

În scrierea ecuației (1) presupunem sarcinile bine localizate, cu dimensiuni neglijabile în raport cu distanța dintre ele, r_{21}; în caz contrar, distanța r_{21} nu poate fi determinată astfel încît ecuația (1) să fie general valabilă. Condiția ca sarcinile să fie în repaus este necesară, pentru a elimina forțele magnetice ce iau naștere prin mișcarea sarcinilor, problemă ce va fi studiată în capitolele următoare.

Valoarea constantei k, introdusă în ecuația (1), depinde de sistemul de unități ales.

Dacă r_{21} se măsoară în cm, **F** în dyne, sarcina se măsoară în unități CGS electrostatice sau CGSes. În acest caz $k = 1$. Două sarcini egale fiecare cu o unitate CGSes de sarcină electrică, aflate la o distanță de 1 cm, se resping cu o forță egală cu o dynă; ecuația (1), în care $k = 1$, poate fi considerată ca definiția unității de sarcină în sistemul CGSes. Ca unitate de sarcină, vom folosi *coulombul*. Această unitate este inclusă în sistemul metru-kilogram-secundă. Dacă în ecuația (1), sarcinile se exprimă în coulombi și distanța în metri, atunci forța se obține în newtoni dacă $k = 8{,}9875 \times 10^9$. Introducerea coulombului simplifică relațiile dintre unitatea de sarcină și celelalte unități ale mărimilor electrice (amper, volt, ohm și watt), care sînt des utilizate în tehnică, în laborator și în viața de toate zilele. Un coulomb este egal cu $2{,}998 \times 10^9$ u CGS.es**.

Observarea interacțiunii corpurilor încărcate este singura posibilitate de detecție și măsură a sarcinilor electrice. Și atunci se naște întrebarea: ce

---

* Convenția, adoptată aici, s-ar putea să nu pară firească dar întrucît ea este folosită și în alte capitole ale fizicii, vom continua s-o folosim în această carte.

** Numărul 2,998, cu care ne vom mai întîlni în transformările diferitelor unități electrice, ne amintește de valoarea vitezei luminii ($2{,}998 \times 10^8$ m/s). Nu vom explica acum de unde provine acest coeficient. Deseori, în cărți și tabele, veți întîlni doar factorul 3. Riguros vorbind, în locul coeficientului 3, care apare în transformările unităților electrice, trebuie pus 2,99792 număr care exprimă valoarea vitezei luminii în $10^8 \frac{m}{s}$.

anume este doar definiție în legea lui Coulomb? Conținutul fizic esențial al acestei legi este dependența inversă a forței de pătratul distanței și *aditivitatea* acțiunii sarcinilor electrice. Pentru a înțelege ultima afirmație, trebuie să considerăm nu numai două sarcini. În afară de acestea, dacă în lume n-ar exista decît două sarcini q_1 și q_2 cu care să putem realiza experiențe, nu le-am putea măsura niciodată separat. Am putea doar verifica proporționalitatea lui F cu $\frac{1}{r_{21}^2}$. Să presupunem că avem trei purtători de sarcină q_1, q_2 și q_3. Putem măsura forța exercitată asupra lui q_1, dacă q_2 se află la 10 cm de q_1, iar q_3 se află la distanță foarte mare față de q_1 și q_2 (*fig.* 1.2,*a*). Apoi, putem îndepărta sarcina q_2, aducînd în locul ei pe q_3 și să măsurăm din nou forța exercitată asupra lui q_1. În fine, vom apropia foarte mult sarcinile q_2 și q_3 și le vom așeza la 10 cm de q_1.

Măsurînd forța exercitată asupra lui q_1, vom constata că ea este egală cu suma forțelor măsurate în experiențele precedente. Acest rezultat important nu putea fi prezis pe baza argumentelor logice ce decurg din simetrie, așa cum am procedat în cazul celor două sarcini punctiforme, pentru a arăta că forța acționează pe direcția dreptei ce le unește. *Forța cu care interacționează două sarcini nu variază în prezența unei a treia sarcini.*

Indiferent de numărul sarcinilor din sistem, legea lui Coulomb (ecuația 1) poate fi folosită în calculul interacțiunii fiecărei perechi. Această afirmație stă la baza *principiului superpoziției*, pe care îl vom întîlni deseori în studiul electromagnetismului. Înțelegem prin superpoziție, că două surse pot fi unite într-un singur sistem, prin așezarea celei de-a doua surse „pe" prima, fără a schimba prin aceasta configurația surselor. Acest principiu ne asigură că forța exercitată asupra unei sarcini, aflate într-un punct oarecare al sistemului, este suma vectorială a forțelor ce acționează asupra acestei sarcini, din partea fiecărei surse în parte. Acest principiu nu este general valabil.

Ar putea exista fenomene, în care să apară distanțe foarte mici sau forțe foarte mari, în care principiul superpoziției să nu fie valabil. Într-adevăr, se cunosc asemenea fenomene cuantice în cîmp electromagnetic care, din punct de vedere al teoriei clasice, relevă insuficiența principiului superpoziției.

Prin urmare, o reprezentare completă asupra fizicii interacțiunilor electrice poate fi formată numai dacă numărul sarcinilor

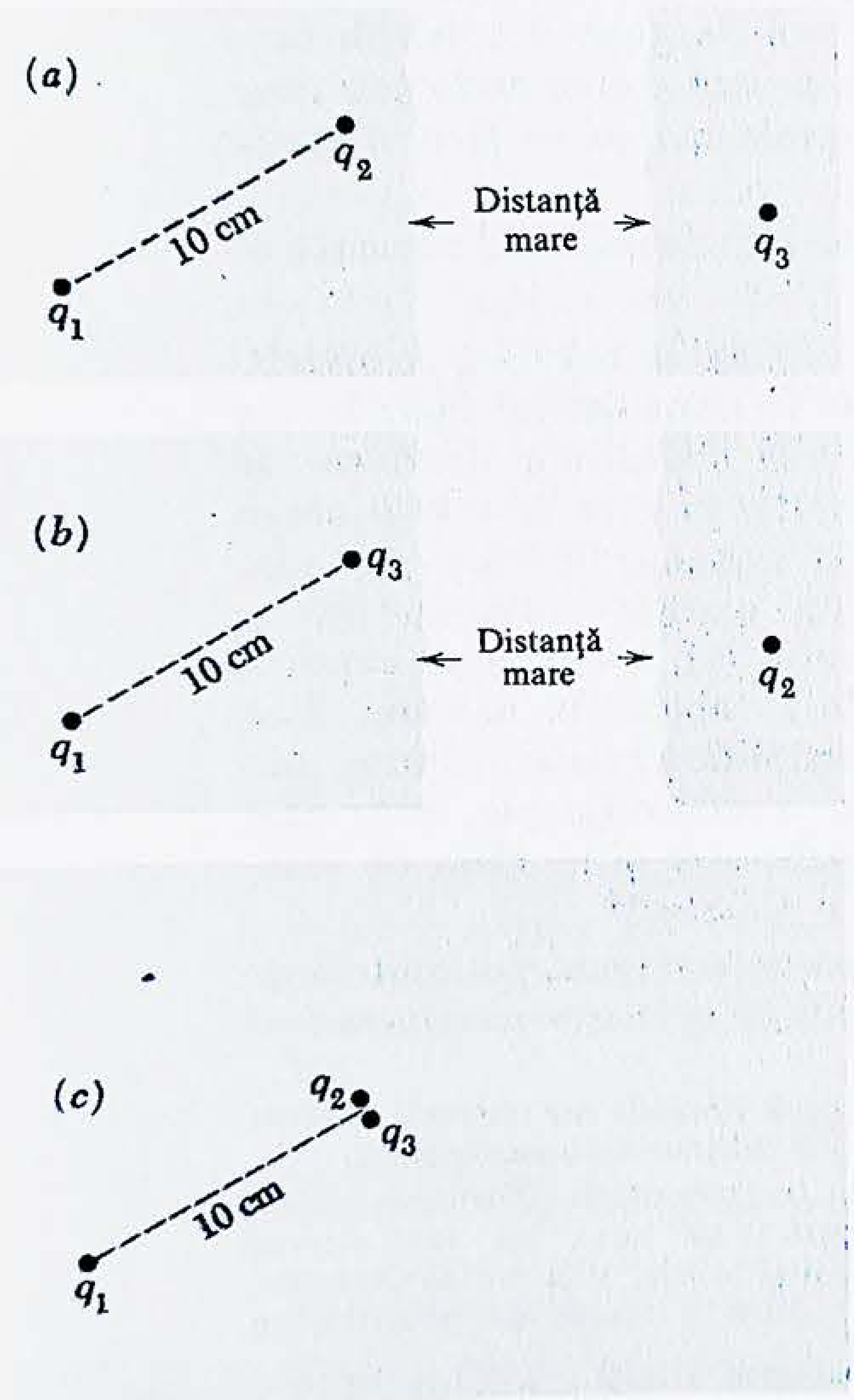
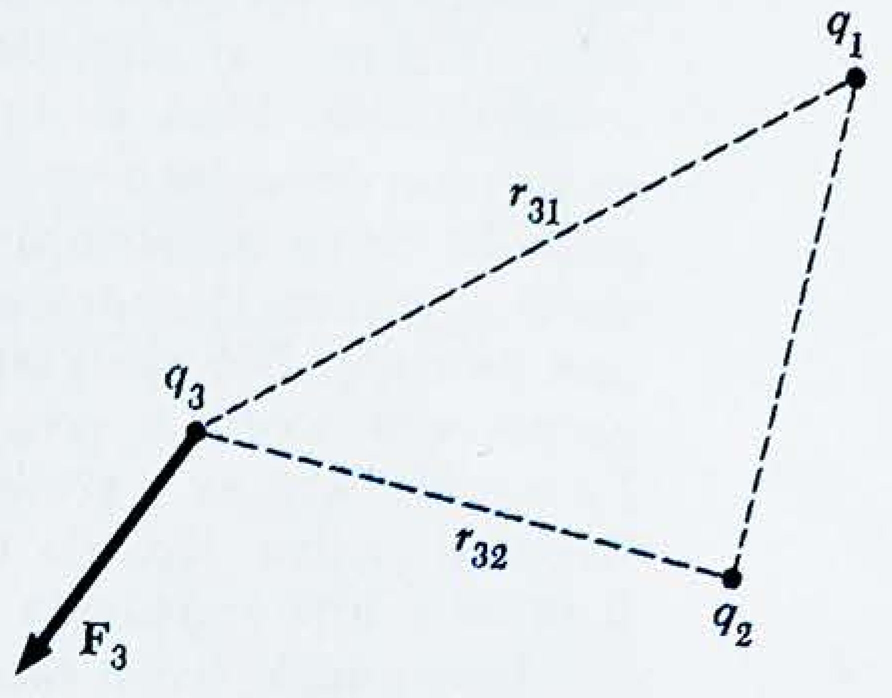


Fig. 1.2. Forța exercitată asupra lui q_1 în (c) este egală cu suma forțelor exercitate asupra lui q_1 în (a) și (b).

Fig. 1.3. Forța exercitată asupra unei sarcini rezultată din celelalte două sarcini, exprimată de relația 2.



este mai mare decît doi. Extinzînd ecuația (1) la cazul a trei sarcini ce interacționează, dispuse ca în figura 1.2, forța exercitată asupra uneia din sarcini, de exemplu q_3, poate fi perfect determinată din ecuația:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3 q_1 \hat{\mathbf{r}}_{31}}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{32}}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}^2} \qquad (2)$$

Ecuația (2) corespunde, de exemplu, situației reprezentate în figura 1.3.

În ceea ce privește verificarea experimentală a faptului că forța este invers proporțională cu pătratul distanței, pentru anumite valori ale distanței, poate fi considerată încheiată. În anul 1875, Coulomb a măsurat cu ajutorul unei balanțe de torsiune, forța dintre două sfere mici încărcate. Cu mulți ani înaintea lui Coulomb, Priestley a stabilit, prin analogie cu cîmpul gravitațional, că absența influenței electrice în interiorul unei sfere goale încărcate este dovada proporționalității inverse a forței cu pătratul distanței. Henry Cavendish, genialul experimentator englez, a cărui activitate era aproape necunoscută contemporanilor săi, a verificat în 1772 legea invers proporționalității cu pătratul distanței cu o precizie de 2%. Cavendish a încărcat o suprafață sferică ce putea fi apoi separată în două emisfere. Absența sarcinii pe fața interioară a emisferelor era o dovadă a proporționalității inverse a forței cu pătratul distanței*. Reluările moderne ale experienței lui Cavendish** au confirmat această lege, pentru distanțe de ordinul centimetrilor sau zecilor de centimetri, cu o precizie de cîteva unități ori 10^{-9}.

Uneori, acest rezultat experimental este descris ca o metodă de determinare a „exponentului" din legea proporționalității forței cu pătratul distanței. Totuși, problema reală constă nu în a stabili dacă valoarea corectă a exponentului este 2 sau un alt număr, de exemplu — 1,99998, ci în a stabili pînă la ce valori ale distanței legea este valabilă. Există două domenii, puse astăzi în evidență prin experiențe directe, în care s-ar putea ca legea să nu fie valabilă. Primul, este domeniul distanțelor foarte mici — mai mici decît 10^{-14} cm, unde, așa după cum am mai spus, nu sîntem siguri că teoria electromagnetică este întotdeauna valabilă. De asemenea, pentru distanțe foarte mari, cuprinse între cele geografice și cele astronomice, nu s-a verificat experimental legea lui Coulomb. Cu toate acestea, nu avem nici un motiv bine determinat pentru a pune la îndoială valabilitatea legii la distanțe mari.

---

* După cum vom vedea în capitolul 3, cîmpul este nul în interiorul oricărui strat conductor de formă sferică sau de altă formă. Cavendish, raționînd ca și Priestley, prin analogie cu cîmpul gravitațional, se pare că nu cunoștea această consecință mai generală a invers proporționalității forței cu pătratul distanței.

** S. J. Plimpton și W. E. Lawton, Phys. Rev. *50*, 1066/1936.

De fapt, teoria cuantică modernă a cîmpului electromagnetic ne aduce cîteva argumente în sprijinul afirmației că legea lui Coulomb este valabilă pentru distanțe mult mai mari decît cele folosite în experiențele reactualizate ale lui Cavendish. Dacă la distanțe mari, legea invers proporționalității forței cu pătratul distanței n-ar fi valabilă, cuanta de lumină sau fotonul, ar avea o masă de repaus nu prea mare, dar finită, ceea ce ar duce la o slabă dependență a vitezei de propagare a undelor electromagnetice în vid de lungimea de undă. Din observații directe* se cunoaște cu o precizie de 10^{-6}, că undele radio scurte se propagă în vid cu aceeași viteză ca undele luminoase. Pe această bază, ar fi posibilă argumentarea teoretică a valabilității legii lui Coulomb pentru distanțe de cel puțin cîțiva kilometri. Probabil ar putea fi aduse și alte argumente de acest gen, mai riguroase.

În concluzie, avem tot dreptul să considerăm legea lui Coulomb valabilă într-un interval imens, cuprins între 10^{-13} cm și pînă la cîțiva kilometri, poate și mai mult și fundamentală în descrierea electromagnetismului.

1.5. ENERGIA UNUI SISTEM DE PURTĂTORI DE SARCINI

În principiu legea lui Coulomb este fundamentală în electrostatică. Fiind date sarcinile și coordonatele lor, putem determina toate forțele electrice. Dacă sarcinile se pot mișca liber, sub acțiunea altor forțe, putem găsi starea de echilibru în care distribuția de sarcini rămîne staționară. În ... laşi sens, legile de mișcare ale lui Newton sînt fundamentale în mecanică. Dar și în mecanică și în electromagnetism, posibilitatea de pătrundere în esența fenomenelor crește, prin introducerea altor noțiuni, din care cea mai importantă este energia.

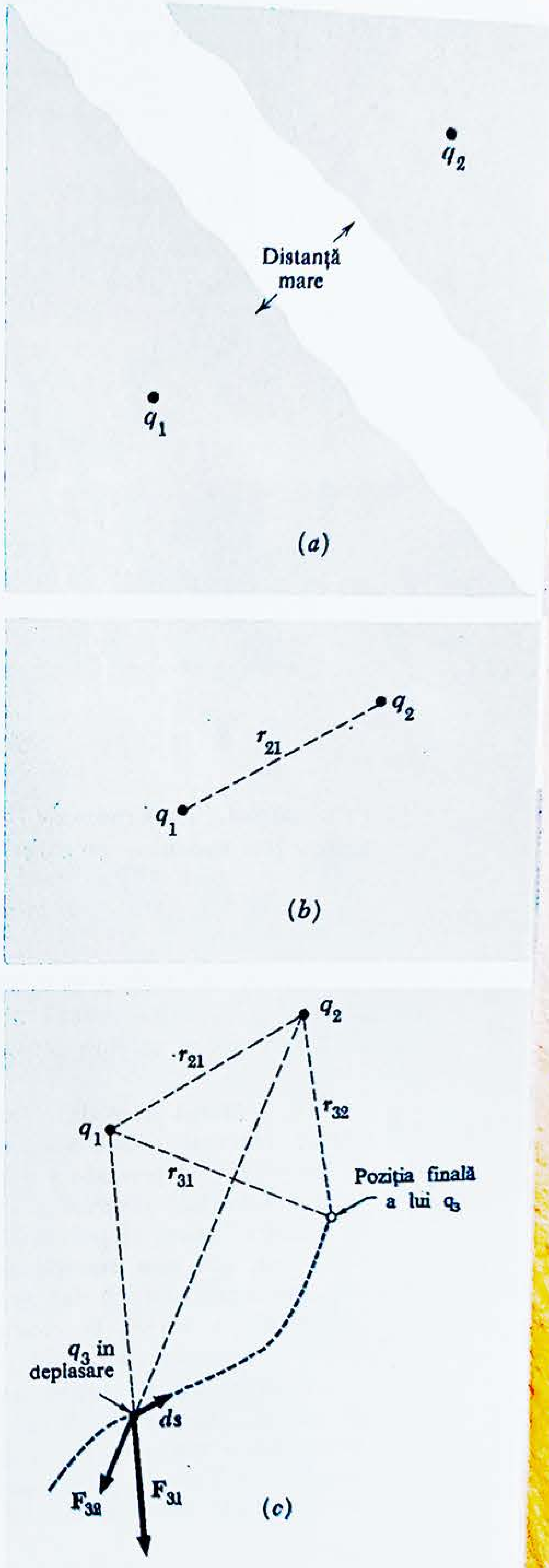
În electrostatică, conceptul de energie este foarte util întrucît forțele electrice sînt *conservative*. Să studiem, pentru început, lucrul mecanic ce trebuie efectuat *asupra* sistemului, pentru a distribui într-un anume fel cîteva corpuri încărcate. Să începem cu două corpuri sau particule încărcate, aflate la distanță foarte mare una de alta, ca în figura 1.4, *a*, și care poartă sarcinile q_1 și q_2. Nu ne interesează energia necesară pentru a obține aceste două concentrații inițiale de sarcină. Vom apropia încet particulele una de alta, pînă cînd distanța dintre ele devine egală cu r_{21}. Ce lucru mecanic s-a efectuat? N-are importanță pe ce drum apropiem sarcina q_1 de q_2. Indiferent de drum, lucrul mecanic efectuat este egal cu integrala produsului dintre forță și deplasarea pe direcția forței. Forța, ce trebuie aplicată pentru a deplasa una din sarcini spre cealaltă, este egală cu forța lui Coulomb și de sens opus ei

$$W = \int \text{forță} \times \text{deplasare} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-\mathrm{d}r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}. \quad (3)$$

---

* Evident, în acest sens, este faptul că nu de mult, s-a observat ajungerea practic simultană pe Pămînt (la interval de cel mult cîteva minute), a radiațiilor radio și luminoase, provenite din erupția unei „stele luminoase", aflate la o distanță de 20 de ani lumină (B. Lovell, F. L. Whipple și L. H. Solomon, Nature 202, 377 (1964).

Fig. 1.4. Trei sarcini sînt aduse una lîngă alta. Întîi se apropie q_2, apoi q_1 şi q_2 fiind fixate se apropie q_3.



Deoarece r variază de la ∞ la r_{12}, deplasarea elementară este $-dr$. Evident, lucrul mecanic efectuat asupra sistemului, pentru sarcini de acelaşi semn, va fi pozitiv, întrucît ele se resping. Dacă q_1 şi q_2 se exprimă în coulombi şi r_{12} în metri, conform ecuaţiei (3), lucrul mecanic se exprimă în jouli.

De la studiul *forţelor conservative* (vol. I, pag. 173) ştim că acest lucru mecanic este întotdeauna acelaşi, indiferent de forma traiectoriei pe care se face deplasarea. Să vedem cum se aplică acest lucru în cazul a două sarcini q_1 şi q_2 (fig. 1.5). Fixăm pe q_1, iar q_2 poate fi deplasat, pe două traiectorii diferite, în aceeaşi poziţie finală. Orice strat sferic, cuprins între r şi $r+dr$, va fi intersectat de ambele traiectorii. Lucrul mecanic elementar, pe această porţiune, este acelaşi pentru ambele traiectorii şi este egal cu $-\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Acest lucru se explică prin faptul că $\mathbf{F}$ are aceeaşi valoare în ambele puncte şi este orientat pe direcţia razei, de la q_1 la suprafaţă, în timp ce $ds = dr/\cos\,\theta$. Prin urmare, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F\,dr$. Oricărui lucru mecanic elementar de pe o traiectorie îi corespunde un lucru mecanic elementar pe cealaltă traiectorie, astfel încît suma lucrurilor mecanice elementare de pe cele două traiectorii trebuie să fie egale. Concluziile noastre sînt valabile chiar şi pentru traiectorii neregulate ca aceea reprezentată în figura 1.5. (De ce?)

Să ne întoarcem, acum, la cele două sarcini din figura 1.4, *b* şi să aducem, dintr-un loc îndepărtat pînă în punctul P_3 — aflat la distanţa r_{31} de sarcina q_1 şi la distanţa r_{32} de sarcina q_2 — sarcina q_3. Lucrul mecanic efectuat va fi:

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}. \qquad (4)$$

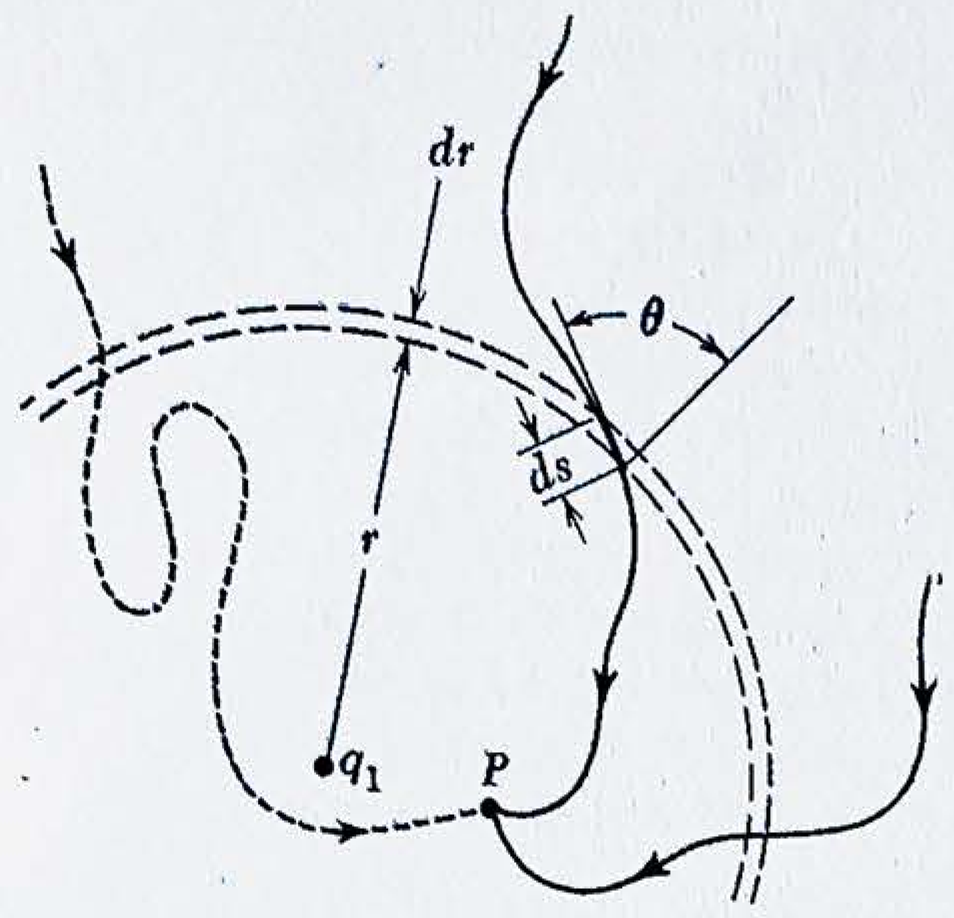


Fig. 1.5. Deoarece forța este centrală, pe porțiunile diferitelor traiectorii, cuprinse între $r + dr$ și r, se efectuează același lucru mecanic.

Pe baza aditivității interacțiunilor electrice, pe care am menționat-o mai înainte

$$-\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} =$$

$$= -\int \mathbf{F}_{31}\, d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5)$$

Asta înseamnă că lucrul mecanic efectuat pentru a aduce pe q_3 în punctul P_3 este suma lucrului mecanic, necesar pentru a aduce pe q_3 în P_3, dacă ar exista doar sarcina q_1 și a lucrului mecanic necesar pentru a aduce pe q_3 în P_3, dacă ar exista doar sarcina q_2.

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}}. \qquad (6)$$

Prin urmare, lucrul mecanic total efectuat pentru a obține această dispunere a celor trei sarcini — pe care-l vom nota cu U — este egal cu:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}. \qquad (7)$$

Observăm că q_1, q_2 și q_3 apar simetric în ecuația (7), indiferent de faptul că sarcina q_3 a fost adusă ulterior. Am fi obținut același rezultat dacă q_3 ar fi fost prima sarcină prezentă în sistem. (Încercați să demonstrați acest lucru.)

Deci, lucrul mecanic U nu depinde de ordinea introducerii sarcinilor în sistem. Întrucît U este independent și de drumul parcurs de sarcini, înseamnă că exprimă o proprietate a dispunerii finale a sarcinilor. Ea poate fi numită *energie potențială electrică* a sistemului de sarcini studiat. Ca întotdeauna, în definirea energiei potențiale, trebuie să avem un nivel de referință. În acest caz, am ales energia potențială zero, corespunzătoare situației cînd cele trei sarcini există dar se află depărtate una de alta la infinit. Energia potențială se referă la configurație în *totalitatea ei*. A atribui uneia din sarcini o anumită parte din ea, nu are sens.

Evident, acest rezultat simplu poate fi generalizat la un număr oarecare de sarcini. Dacă avem N sarcini diferite, dispuse oricum în spațiu, energia potențială a sistemului se calculează însumînd după toate perechile, ca în ecuația (7). Energia potențială zero, ca și în primul caz, corespunde situației în care toate sarcinile se află la distanțe mari una de alta.

Ca exemplu, să calculăm energia potențială a sistemului format din opt sarcini negative, dispuse în colțurile unui cub cu latura b și o sarcină pozitivă aflată în centrul cubului (fig. 1.6, *a*). Presupunem că fiecare sarcină negativă este un electron de sarcină $-e$, iar particula centrală poartă o sarcină pozitivă dublă $2e$. Însumînd pentru toate perechile, obținem:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}\,b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}\,b}\right] = \frac{4{,}32e^2}{4\pi\varepsilon_0 b}. \quad (8)$$

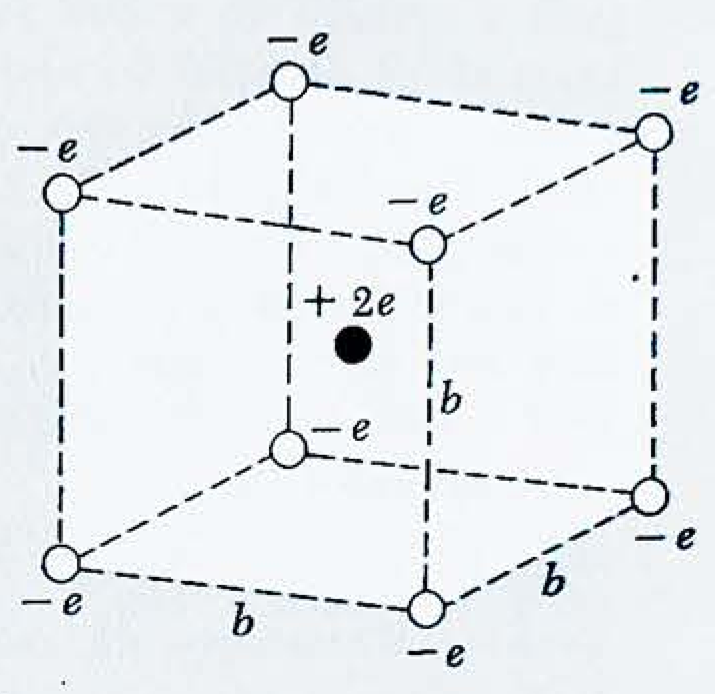
În figura 1.6, *b* se indică cum apare fiecare termen al acestei sume. Energia este pozitivă, indicînd faptul că lucrul mecanic a fost efectuat pentru a întruni aceste sarcini într-un sistem. Desigur, același lucru mecanic se regăsește dacă îndepărtăm sarcinile una de alta, destrămînd sistemul, prin acțiunea unor forțe asupra unui corp (sau corpuri) exterioare.

Dacă electronii ar putea, pur și simplu pleca din această configurație la infinit *energia cinetică totală* a tuturor particulelor ar fi egală cu U. Acest lucru este valabil și în cazul în care particulele se îndepărtează simultan și simetric, și în cazul în care părăsesc sistemul separat, una după alta. Aici ni se relevă conținutul noțiunii simple de energie potențială totală a sistemului. Închipuiți-vă, cît de dificil ar fi calculul forței rezultante care acționează asupra fiecărei particule, în fiecare stadiu de formare a configurației. În exemplul nostru, desigur, simetria geometrică ar simplifica mult problema și totuși ea ar fi mult mai complicată decît calculul simplu făcut mai înainte.

Însumarea pe perechi mai poate fi scrisă sub forma:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}. \quad (9)$$

Semnul însumării duble $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}$, înseamnă că: se ia $j = 1$ și se însumează după $k = 2, 3, 4, \ldots, N$; apoi se ia $j = 2$ și se însumează după $k = 1, 3, 4, \ldots, N$; ș.a.m.d. pînă la $j = N$. Evident, în felul acesta fiecare pereche apare în sumă de două ori, de aceea în fața sumei stă factorul $\frac{1}{2}$.



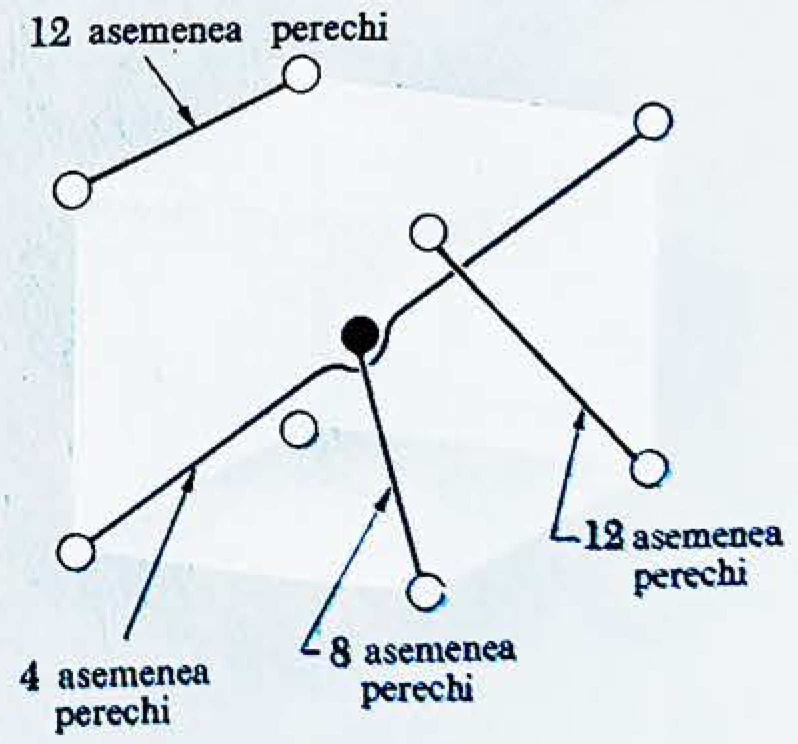


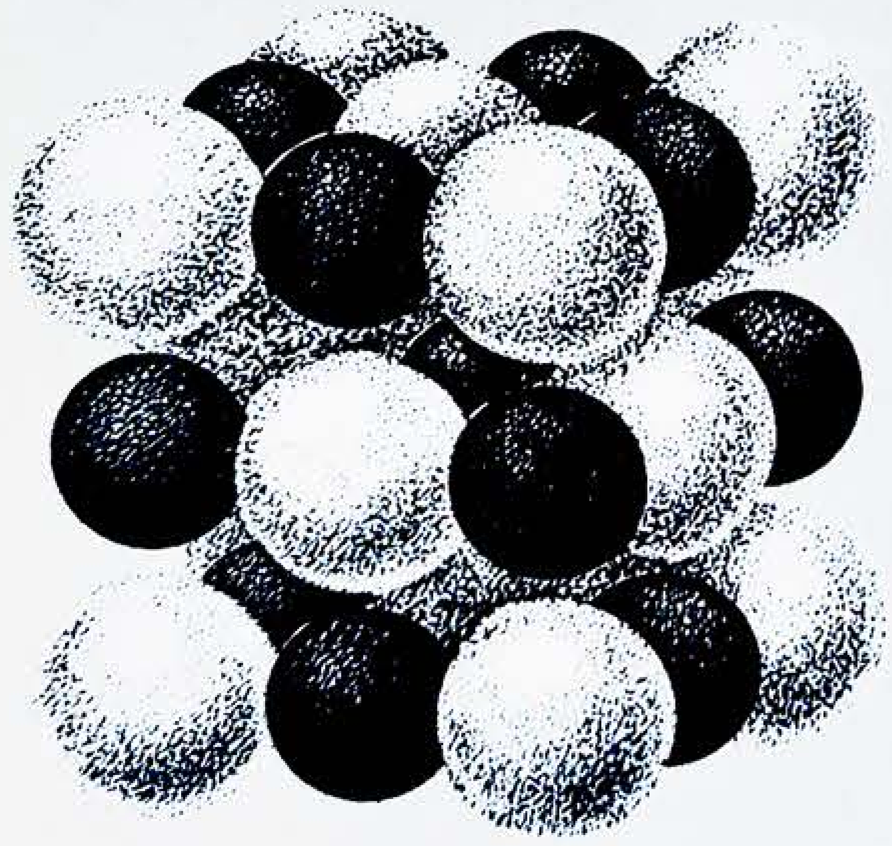
Fig. 1.6. (*a*) Energia potențială a unei asemenea distribuții de nouă sarcini punctiforme este dată de ecuația (8). (*b*) În sumă intră patru tipuri de perechi.

1.6. ENERGIA ELECTRICĂ A UNEI REȚELE CRISTALINE

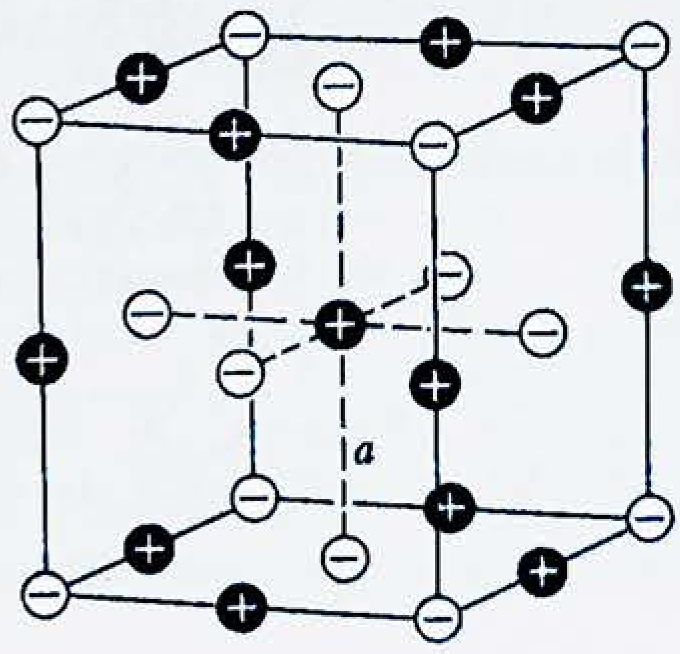
Conceptele introduse au o largă aplicație în fizica cristalelor. Știm că un cristal ionic, ca de exemplu cristalul de clorură de sodiu, poate fi descris, cu o bună aproximație, ca o rețea tridimensională regulată în care alternează ionii pozitivi de Na^+ și ionii negativi de Cl^-. Distribuția ionilor, în cristalul de clorură de sodiu, este reprezentată în figura 1.7, *a*. Desigur, ionii nu sînt sarcini punctiforme, dar ei reprezintă o distribuție de sarcină aproximativ sferică și prin urmare (așa cum vom dovedi), forțele electrice exercitate între ei sînt aceleași ca în cazul în care fiecare ion s-ar înlocui cu o sarcină punctiformă echivalentă așezată în centrul său. Acest sistem electric echivalent este reprezentat în figura 1.7, *b*. Energia potențială electrostatică a rețelei de sarcini joacă un rol important în explicarea stabilității și coeziunii cristalului ionic. Să vedem dacă o putem calcula.

Se pare că avem de-a face cu o sumă colosală, aproape dublu infinită, întrucît oricare cristal macroscopic conține cel puțin 10^{20} atomi. Va fi această sumă convergentă? Sperăm să putem găsi măcar energia potențială a unității de volum sau a unității de masă a cristalului. Ne așteptăm ca ea să nu depindă de dimensiunile cristalului, ținînd cont de faptul că, în cristalul macroscopic, cele două capete se vor influența prea puțin unul pe altul. Energia potențială a două grame de clorură de sodiu ar trebui să fie de două ori mai mare decît cea pentru un gram, iar forma n-ar trebui să aibă influență prea mare, atîta timp cît numărul atomilor aflați pe suprafață este mic în raport cu numărul total de atomi. Am greși raționînd în felul acesta în cazul unui cristal format doar din ioni de același semn. În

Fig. 1.7. Este reprezentată o porțiune din cristalul de clorură de sodiu cu respectarea aproximativă a proporțiilor relative ale ionilor de Na^+ și Cl^- *(a)*, și înlocuirea lor prin sarcini punctiforme echivalente *(b)*.



(*a*)



(*b*)

acest caz, un gram de cristal ar avea o sarcină electrică enormă şi pentru a uni două asemenea cristale, într-un cristal de două grame, ar fi necesară o cantitate fantastică de energie. (O puteţi calcula!) Această situaţie este salvată de faptul că în structura cristalului sarcinile egale şi de semn opus alternează, astfel încît orice porţiune dintr-un cristal macroscopic este, practic, neutră.

Pentru a evalua energia potenţială, observăm că poziţiile ocupate de fiecare ion pozitiv sînt echivalente. De asemenea, pe baza figurii 1.7, putem conchide că distribuţia ionilor pozitivi în jurul unui ion negativ este exact aceeaşi ca şi distribuţia ionilor negativi în jurul unui ion pozitiv ş.a.m.d. Prin urmare, putem lua ca central un ion, indiferent de ce fel, să însumăm asupra tuturor interacţiunilor cu ionii înconjurători şi să multiplicăm cu numărul total de ioni de ambele semne. În acest fel suma dublă din ecuaţia (9), se reduce la o singură sumă şi un factor N, coeficientul $\frac{1}{2}$ este introdus, ţinînd seama de faptul că fiecare pereche a fost luată de două ori. Astfel, energia reţelei de clorură de sodiu, formată din N ioni, este

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^{N} \frac{q_1 q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{1k}}. \tag{10}$$

Alegînd ionul pozitiv în centru, ca în figura 1.7, *b*, suma cuprinde toţi vecinii, apropiaţi şi depărtaţi. Expresia explicită a sumei este următoarea:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}\,a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}\,a} + \dots\right]. \tag{11}$$

Primul termen apare datorită celor şase ioni de clor din apropiere, aflaţi la distanţa a, al doilea de la cei 12 ioni de sodiu, aflaţi în colţurile cubului ş.a.m.d. Este evident că acest şir nu este absolut convergent. Dacă am fi făcut greşeala să însumăm întîi toţi termenii pozitivi, atunci suma ar fi fost divergentă. Pentru a calcula o asemenea sumă, o vom extinde la ionii din ce în ce mai îndepărtaţi, incluzîndu-i în grupe care să reprezinte celule aproape neutre de substanţă. Apoi, dacă se fragmentează suma, întrucît ionii mai îndepărtaţi formează un amestec egal de sarcini pozitive şi negative, putem fi siguri că contribuţia lor este neglijabilă. Aceasta este o descriere grosolană a unei probleme delicate, pentru care astăzi se folosesc, în evaluările numerice, calculatoarele electronice. În exemplul tratat rezultatul este:

$$U = -\frac{7{,}8642 \cdot 10^9 N e^2}{a}\ \mathrm{J} \tag{12}$$

unde N — este numărul ionilor, de două ori mai mare decît numărul moleculelor de NaCl.

Semnul minus exprimă rolul dominant al vecinilor mai apropiaţi şi arată că pentru a desface cristalul în ioni este necesară efectuarea unui lucru mecanic. Cu alte cuvinte, energia electrică ajută la explicarea coeziunii cristalului. Totuşi, ea nu este singura explicaţie, întrucît energia potenţială a distribuţiei de sarcini *scade* prin micşorarea distanţelor a şi cristalul s-ar destrăma. Întîlnim din nou cunoscuta dilemă a fizicii clasice, adică necuantice. Conform legilor fizicii clasice, nici un sistem nu poate fi în echilibru stabil dacă se află numai sub acţiunea forţelor electrice. Anulează oare aceasta analiza

noastră? Nicidecum. Este remarcabil şi îmbucurător faptul că, în fizica cuantică a cristalelor, noţiunea de energie potenţială îşi păstrează sensul şi ea poate fi calculată prin metoda prezentată aici.

1.7. CÎMPUL ELECTRIC

Să presupunem că avem o distribuţie oarecare de sarcini q_1, q_2, ..., q_N, fixate în spaţiu şi că nu ne interesează forţele pe care le exercită una asupra celeilalte, ci numai efectul lor asupra unei alte sarcini oarecare q_0, care poate fi adusă în vecinătatea lor. Ştim cum se calculează forţa rezultantă ce acţionează asupra acestei sarcini, dacă sînt date coordonatele ei x, y, z. Forţa exercitată asupra sarcinii q_0 este:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{4\pi\varepsilon_0 r_{0j}^2} \tag{13}$$

unde r_{0j} este distanţa de la sarcina j pînă la punctul (x, y, z). Forţa este proporţională cu q_0, astfel încît dacă eliminăm pe q_0, obţinem o mărime vectorială care depinde numai de structura iniţială a sistemului de sarcini q_1, q_2, ..., q_N şi de poziţia punctului (x, y, z). Numim această funcţie vectorială de x, y, z — *cîmpul electric* produs de sarcinile q_1, q_2, ..., q_N — şi o notăm cu **E**. Sarcinile q_1, q_2, ..., q_N le numim *sursele* cîmpului. Putem *defini* cîmpul electric **E** al distribuţiei de sarcini, în punctul (x, y, z)

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{4\pi\varepsilon_0 r_{0j}^2} \tag{14}$$

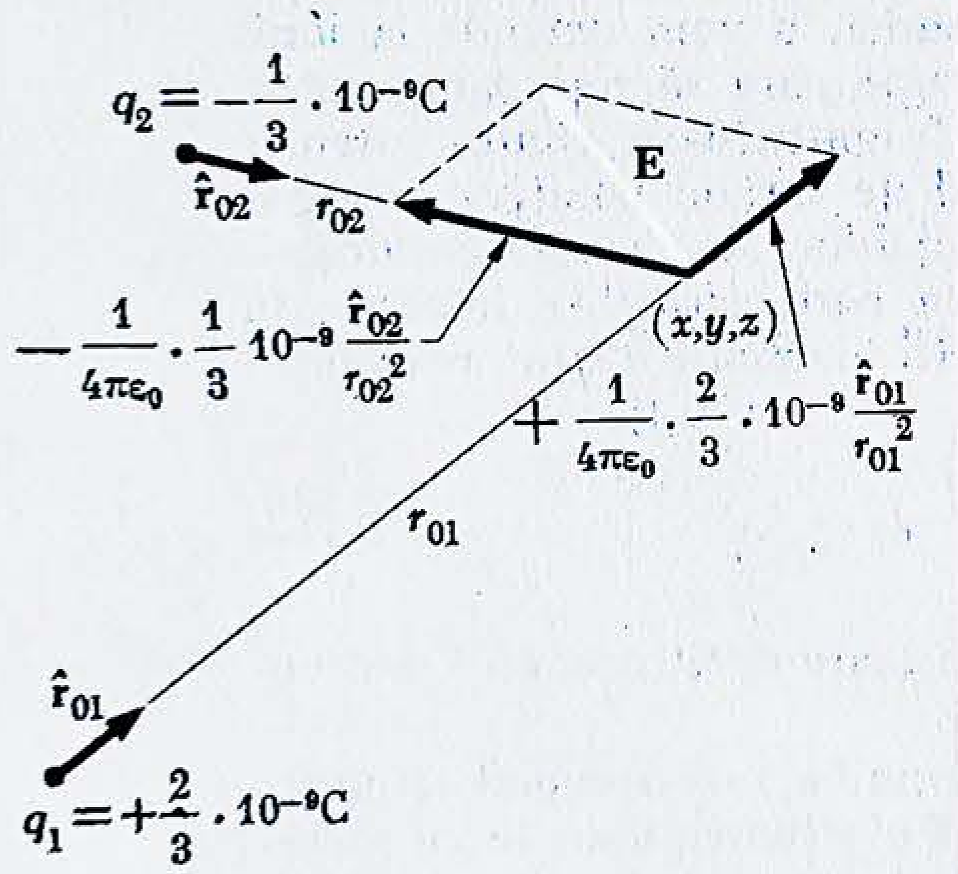


Fig. 1.8. Intensitatea cîmpului într-un punct dat este suma vectorială a intensităţii cîmpurilor datorate fiecărei sarcini din sistem.

În figura 1.8 este reprezentată compunerea vectorială a cîmpului produs de sarcina punctiformă egală cu $+\frac{2}{3}\cdot 10^{-9}$ (unităţi SI de sarcină electrică) cu cîmpul produs de sarcina punctiformă $-\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}$, într-un anumit punct din spaţiu. În S.I. intensitatea cîmpului electric se exprimă în newton pe coulomb, N/C.

Pînă acum n-am aflat nimic nou, cîmpul electric reprezintă doar o altă posibilitate de descriere a sistemului de sarcini; el determină mărimea şi direcţia forţei ce acţionează asupra unităţii de sarcină studiate q_0, aflată într-un punct oarecare. Trebuie să fim atenţi la această interpretare. Dacă

sarcinile sînt fixe, introducerea unei sarcini finite q_0, poate determina schimbarea poziţiei sarcinilor sursă, astfel încît însuşi cîmpul, definit prin ecuaţia (14), să difere. De aceea pornim raţionamentele noastre, de la sarcini fixe. Uneori, se defineşte cîmpul, pornind de la condiţia ca sarcina q_0 să fie „infinit mică" şi atunci cîmpul **E** se determină ca limita raportului $\frac{\mathbf{F}}{q_0}$ cînd $q_0 \to 0$. Rigurozitatea unei asemenea determinări este aparentă. Să nu uităm că, în realitate, n-am întîlnit niciodată o sarcină mai mică decît *e*! Dacă luăm ecuaţia (14) ca definiţie a lui **E**, fără referiri la sarcina de probă, nu apare nici o problemă şi nu e necesar ca sursele să fie fixe. Dacă introducerea unei noi sarcini determină deplasarea sarcinilor sursă, atunci, într-adevăr, are loc şi schimbarea cîmpului electric şi pentru a stabili forţa ce acţionează asupra noii sarcini, trebuie să considerăm în calcul noul cîmp electric.

Vă puteţi, totuşi, întreba ce este un cîmp electric? Este ceva real sau doar o denumire pentru un coeficient într-o ecuaţie, care trebuie înmulţit cu ceva pentru a da valoarea numerică a forţei pe care o măsurăm experimental? Pentru a răspunde, trebuie să avem în vedere două chestiuni. În primul rînd, atîta timp cît formula e valabilă, nu există nici o diferenţă. Acest răspuns este cît se poate de serios.

În al doilea rînd, faptul că cunoaşterea vectorului cîmp electric într-un punct din spaţiu este suficientă pentru a determina forţa ce acţionează asupra unei sarcini oarecare, aflate în acel punct, nu este deloc banal. Ar fi putut fi altfel! Dacă n-ar fi existat experienţele, ne-am putea imagina că asupra a două sarcini unitate, aflate în puncte diferite, acţionează forţe egale, iar sarcinile de probă de două ori mai mari, ar fi supuse unor forţe diferite, depinzînd de natura altor sarcini din sistem. În această situaţie, descrierea forţelor cu ajutorul cîmpului electric nu este valabilă.

Cîmpul electric conferă fiecărui punct al sistemului o *proprietate locală*, avînd următorul sens: dacă cunoaştem valoarea lui **E** într-o regiune a spaţiului, ştim, fără a mai face alte cercetări, ce se va întîmpla cu oricare din sarcinile aflate în această regiune. Nu e nevoie să ştim cum s-a format cîmpul. Dacă cunoaştem cîmpul electric în toate punctele spaţiului, avem o descriere completă a întregului sistem care ne ajută să găsim poziţiile şi mărimile tuturor sarcinilor.

Pentru reprezentarea unui cîmp electric trebuie să asociem, fiecărui punct din spaţiu, un vector care determină mărimea şi direcţia cîmpului. În carte vom folosi diferite reprezentări ale cîmpului de vectori, dar nici una din ele nu este complet satisfăcătoare.

Este greu de reprezentat, în spaţiul cu două dimensiuni, o funcţie vectorială definită în spaţiul tridimensional. Putem indica mărimea şi direcţia lui **E**, în diferite puncte, prin săgeţi trasate în apropierea acestor puncte, făcînd săgeţile mai lungi acolo unde **E** este mai mare*. Folosind această reprezentare, în figura 1.9, *a* este desenat cîmpul unei sarcini punctiforme izolate, egală cu +3 unităţi arbitrare şi în figura 1.9, *b* — cîmpul unei sarcini de —1 unităţi. Aceste reprezentări nu ne ajută cu nimic în înţelegerea noţiunii de cîmp al unei sarcini izolate; fiecare îşi poate imagina un cîmp radial de forţe care variază invers proporţional cu pătratul distanţei şi fără desen.

---

* O asemenea reprezentare este greoaie. Este greu de indicat punctul din spaţiu în care se aplică valoarea vectorului dat şi de obicei domeniul valorilor lui *E* este atît de mare, încît nu se pot desena săgeţile proporţionale cu *E*.

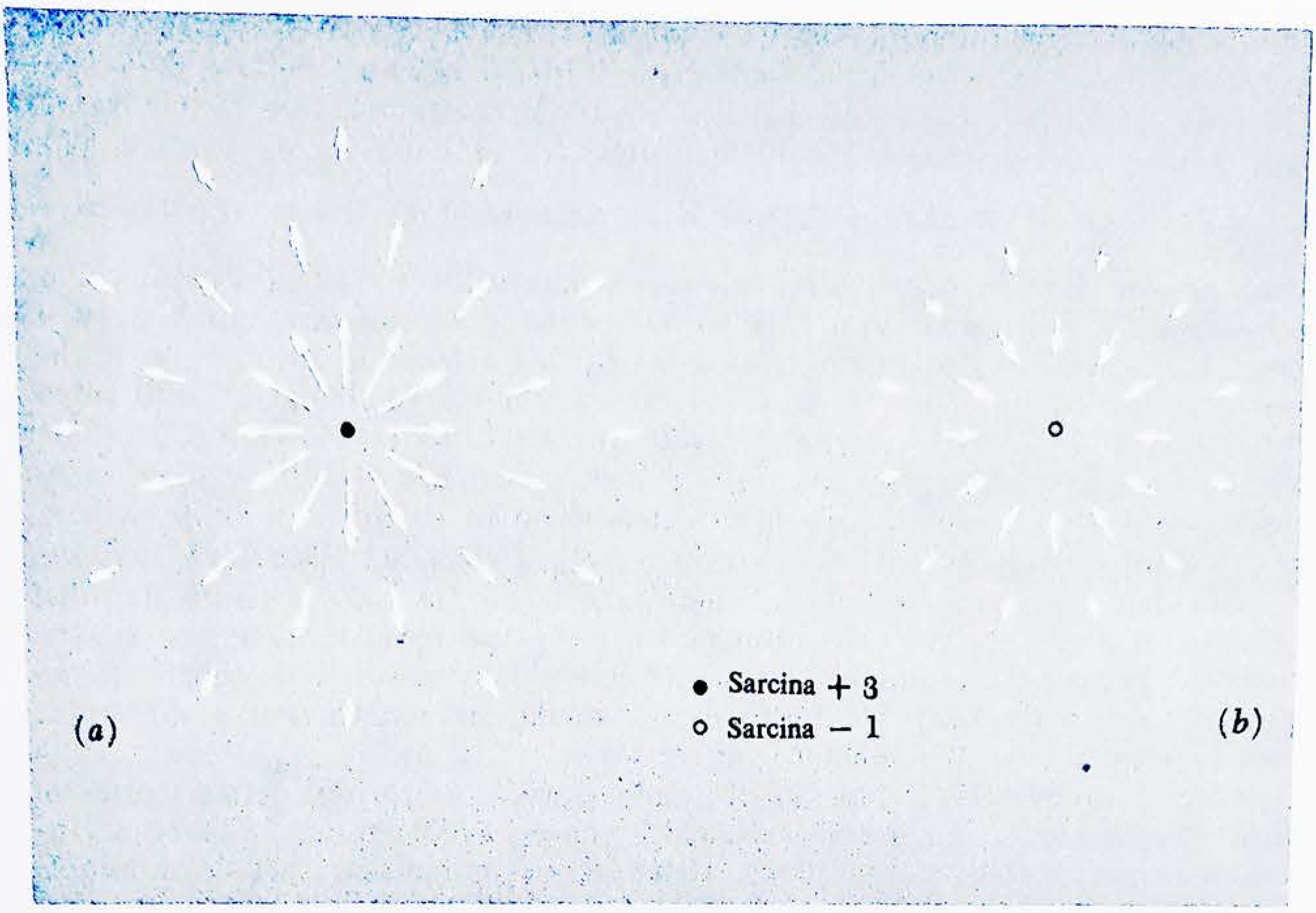


Fig. 1.9. (a) cîmpul sarcinii $q_1 = +3$, (b) cîmpul sarcinii $q_2 = -1$. Ambele desene sînt aproximative avînd doar valoare ilustrativă.

Folosim această reprezentare pentru a putea combina cîmpul a două sarcini diferite, separate prin distanţa *a*, ca în figura 1.10. În figura 1.10 poate fi reprezentat cîmpul ce conţine sarcinile, doar în plan. Pentru a obţine reprezentarea în spaţiul tridimensional trebuie rotit desenul în jurul axei de simetrie. Pe figura 1.10 există un punct în care **E** este zero. La ce distanţă, faţă de cea mai apropiată sarcină, se află acesta? Să observăm, de asemenea, că la marginea figurii cîmpul este îndreptat mai mult în afară. Se vede că la distanţă mare, faţă de sarcini, el se aseamănă foarte mult cu cîmpul unei sarcini punctiforme pozitive. Trebuia să ne aşteptăm la asta întrucît îndepărtarea sarcinilor nu are prea mare influenţă în cazul punctelor aflate la distanţe mari şi dacă unim cele două surse, obţinem o sarcină punctiformă egală cu +2 unităţi.

Un alt mod de reprezentare a vectorului cîmp se face cu ajutorul *liniilor de cîmp*. Acestea sînt simple curbe a căror tangente, în orice punct, coincid cu direcţia cîmpului în acel punct. Aceste curbe sînt netede şi continue cu excepţia unor singularităţi asemenea sarcinilor punctiforme sau ca punctul din figura 1.10 în care cîmpul este nul. După liniile de cîmp nu se poate determina direct mărimea cîmpului, deşi, aşa cum vom vedea, liniile de cîmp converg pe măsura apropierii de regiunea unde cîmpul este intens şi diverg în regiunea unde cîmpul este slab. În figura 1.11 sînt trasate cîteva linii de cîmp pentru aceeaşi distribuţie de sarcini, ca în figura 1.10, o sarcină pozitivă de 3 unităţi şi o sarcină negativă egală cu o unitate. Din nou, din cauza condiţiilor grafice, ne limităm doar la o reprezentare în plan.

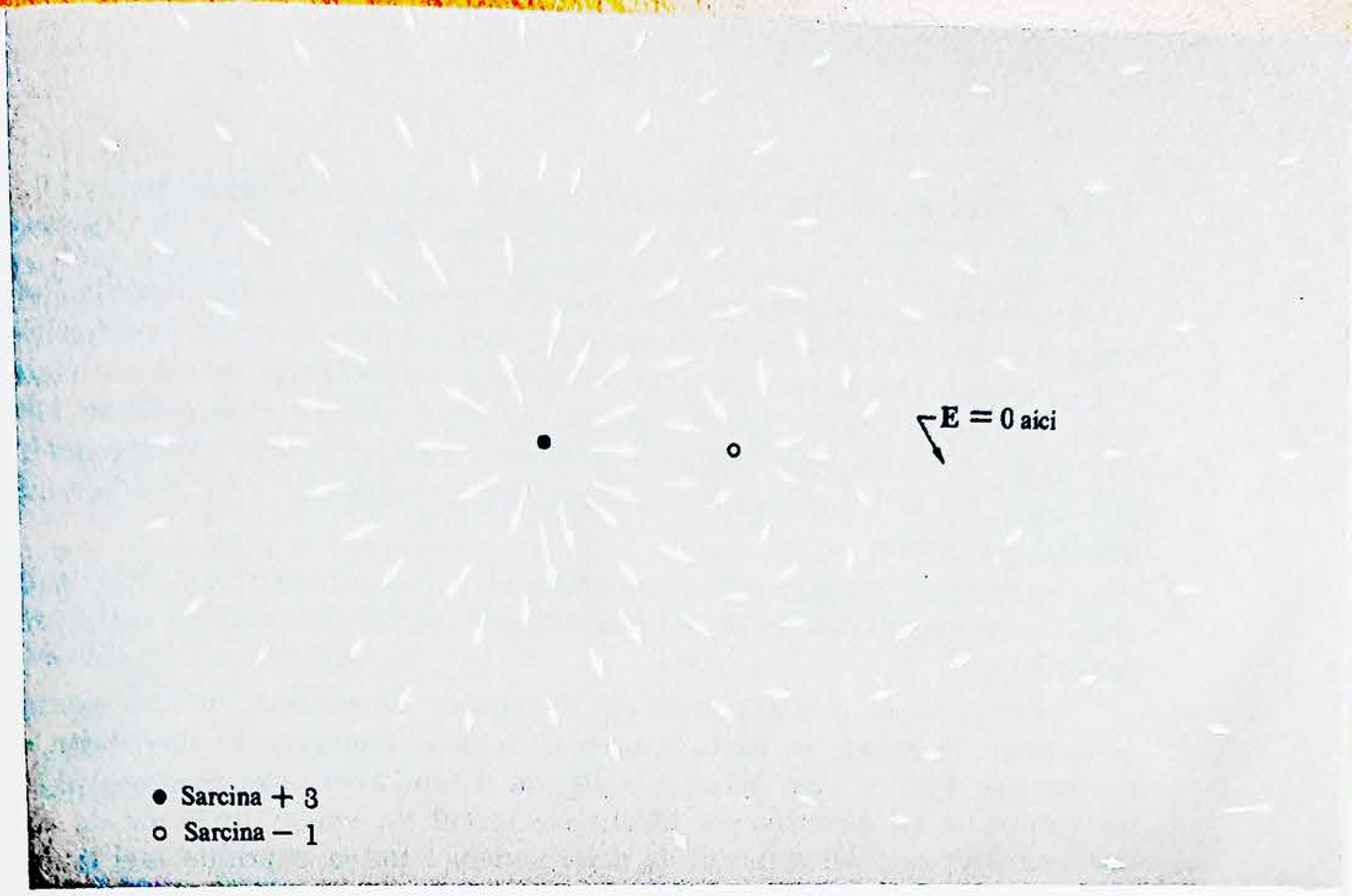
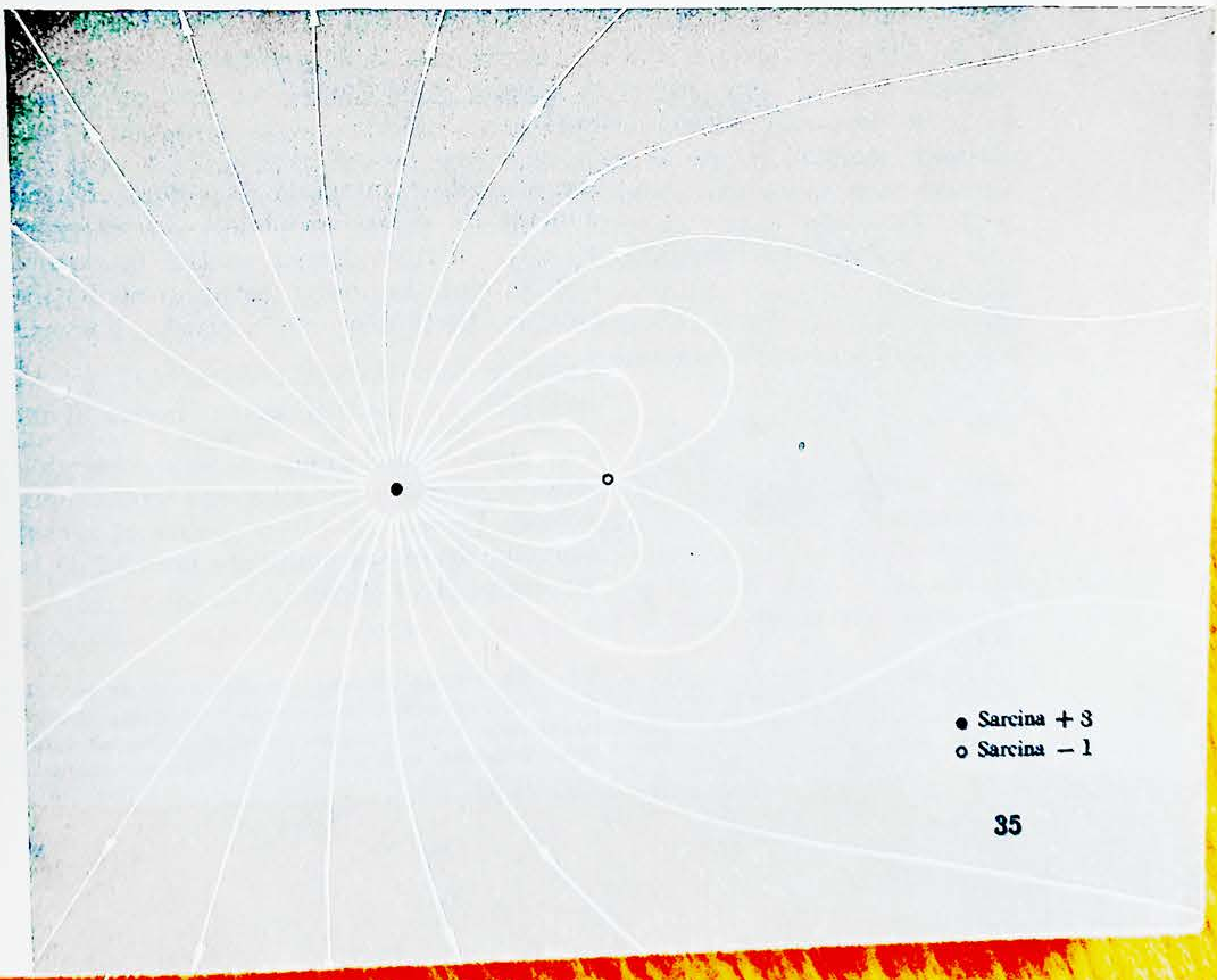


Fig. 1.10. Cîmpul în vecinătatea a două sarcini, $q_1 = +3$, $q_2 = -1$, este suprapunerea cîmpurilor din figura 1.9, *a* şi *b*.

Fig. 1.11. Cîteva linii de cîmp ale cîmpului electric din jurul a două sarcini, $q_1 = +3$, $q_2 = -1$.



1.8. DISTRIBUŢII DE SARCINĂ

Este momentul să trecem de la sarcinile punctiforme la distribuţiile continue de sarcină. O distribuţie de sarcină în volum este descrisă de o funcţie scalară a densităţii de sarcină ρ, care depinde de poziţie şi care are dimensiunile [sarcină]/[volum]. Adică, densitatea ρ dă sarcina conţinută în elementul de volum. Acelaşi simbol este deseori utilizat pentru masa unităţi de volum, dar în această carte vom înţelege întotdeauna prin ρ — sarcina unităţii de volum.

Dacă scriem pe ρ ca funcţie de coordonatele x, y, z, atunci $\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ este sarcina conţinută într-un volum infinitezimal $dx\ dy\ dz$, aflat în punctul $(x,\ y,\ z)$.

Bineînţeles că, la scară atomică, densitatea de sarcină variază enorm de la punct la punct; cu toate acestea şi în acest domeniu, se dovedeşte a fi o noţiune utilă. O vom folosi, mai ales, la studiul sistemelor macroscopice, în comparaţie cu dimensiunile cărora elementul de volum $dv = dx\ dy\ dz$ este destul de mic, dar suficient de mare pentru a putea cuprinde mai mulţi atomi sau sarcini elementare. După cum am mai remarcat, problema se pune similar la definirea densităţii masice a substanţei.

Dacă sursa cîmpului electric este mai curînd o distribuţie continuă de sarcini decît de sarcini punctuale, atunci în ecuaţia (13) trebuie doar înlocuită suma, cu integrala corespunzătoare. Integrala dă valoarea cîmpului electric în punctul $(x,\ y,\ z)$, care este produs de sarcinile aflate în alte puncte $(x',\ y',\ z')$:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')\,\hat{\mathbf{r}}\,dx'dy'dz'}{r^2} \tag{15}$$

Aceasta este o integrală de volum. Fixînd punctul $(x,\ y,\ z)$, variabilele de integrare $x',\ y',\ z'$ mătură întreg spaţiul în care se află sarcini, însumînd astfel contribuţiile tuturor porţiunilor de sarcină. Vectorul unitar $\hat{\mathbf{r}}$ este îndreptat de la $(x',\ y',\ z')$ spre $(x,\ y,\ z)$; pentru sensul invers al lui $\hat{\mathbf{r}}$ se pune semnul minus în faţa integralei. Punerea corectă a semnelor este întotdeauna dificilă. Trebuie să ţinem seama că sensul cîmpului electric se stabileşte pornind de la sarcina pozitivă (figura 1.12).

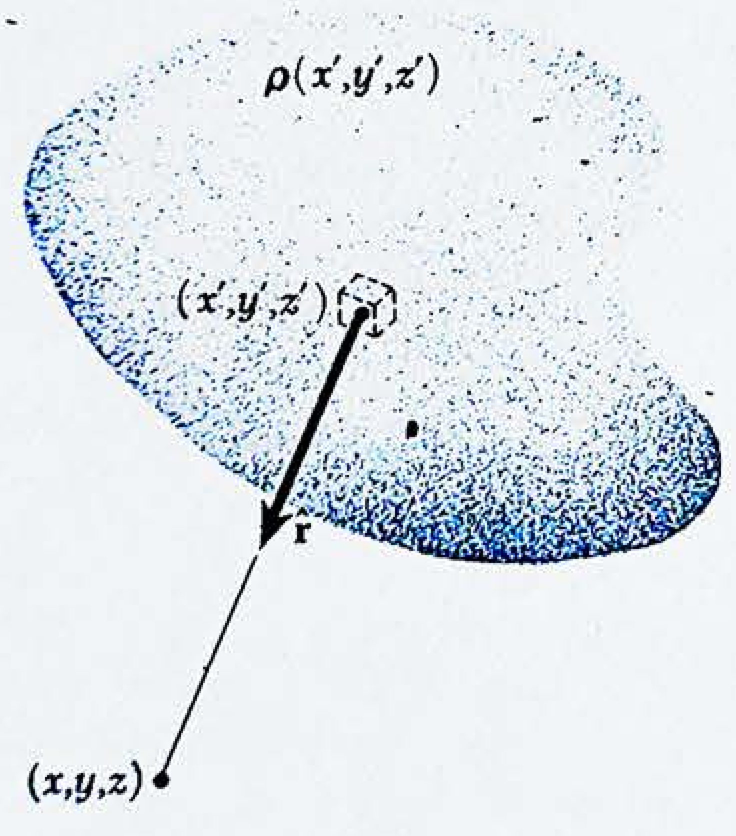


Fig. 1.12. Fiecare element din distribuţia de sarcină $\rho(x',\ y',\ z')$ aduce o contribuţie în intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ din punctul $(x,\ y,\ z)$. Cîmpul total în acest punct, este suma tuturor acestor contribuţii (relaţia 15).

3*

În apropierea sarcinii punctuale reale cîmpul electric crește pe măsura apropierii de punct, tinzînd spre infinit ca $1/r^2$. Nu are sens să vorbim de cîmp *în* punctul în care se află sarcina punctiformă. Întrucît sursele fizice ale cîmpului nu sînt concentrații infinite de sarcină într-un volum egal cu zero ci structuri finite, vom ignora pur și simplu, singularitățile matematice implicate de limbajul folosit pentru noțiunea de sarcină punctiformă și nu ne interesăm de ceea ce se petrece în interiorul surselor elementare. Este, totuși, util de remarcat că o distribuție continuă de sarcină nu are singularități și permite determinarea cîmpului în puncte aflate în interiorul distribuției. Acesta este motivul pentru care integrala de volum din ecuația (15) nu este divergentă în jurul punctului $r = 0$, elementul de volum fiind proporțional cu $r^2\,dr$. Cu alte cuvinte, atîta timp cît ρ rămîne o mărime finită, cîmpul va fi, de asemenea, finit peste tot chiar în interiorul sau la marginea distribuției de sarcină.

1.9. FLUX

Relația dintre cîmpul electric și sursele sale, relație care ne este foarte utilă, poate fi exprimată extrem de simplu. Pentru aceasta se definește mărimea numită *flux*.

Considerăm o suprafață închisă de o formă oarecare și un cîmp electric în acest spațiu. În figura 1.13 este reprezentată o asemenea suprafață și cîteva linii de cîmp. Vom împărți această suprafață în porțiuni atît de mici, încît suprafața fiecărui element este practic plană, iar vectorul cîmp nu variază pe această suprafață elementară. Cu alte cuvinte, suprafața nu trebuie să fie prea neregulată și nu trebuie să treacă chiar printr-o singularitate* a cîmpului, ca de exemplu o sarcină punctiformă. Elementul de suprafață are o mărime bine determinată, exprimată în cm^2 și definește o direcție unică — cea a normalei la suprafața elementului, îndreptată spre exterior. (Întrucît suprafața este închisă, se poate deosebi partea interioară de cea exterioară. Aici nu există nici o ambiguitate.) Să reprezentăm această mărime și direcție printr-un vector; atunci, pentru fiecare element de suprafață j, există un vector $\mathbf{a}_j$, care determină mărimea și orientarea elementului de suprafață. Toate etapele urmărite sînt reprezentate în figura 1.13, *b* și *c*. Vectorii $\mathbf{a}_j$ nu depind de forma elementului de suprafață; modul în care am făcut împărțirea în suprafețe elementare nu joacă nici un rol, atîta timp cît elementele sînt suficient de mici.

Fie $\mathbf{E}_j$ vectorul cîmp electric pe suprafața elementară. Produsul scalar $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ este un număr. Acest număr îl numim *fluxul* prin elementul de suprafață. Pentru a înțelege originea acestei denumiri, să alegem o funcție vectorială care reprezintă viteza de mișcare într-un fluid — un rîu, de exemplu, în care viteza variază de la un loc la altul, dar este constantă în

---

* Printr-o singularitate a cîmpului înțelegem, de obicei, nu numai o sursă punctiformă în care cîmpul tinde spre infinit, dar orice loc în care mărimea sau direcția cîmpului suferă o discontinuitate ca, de exemplu, un strat infinitezimal subțire cu sarcină concentrată. Acest din urmă tip de singularitate, nu introduce dificultăți, dacă oricare parte finită a suprafeței alese nu coincide cu suprafața de discontinuitate.

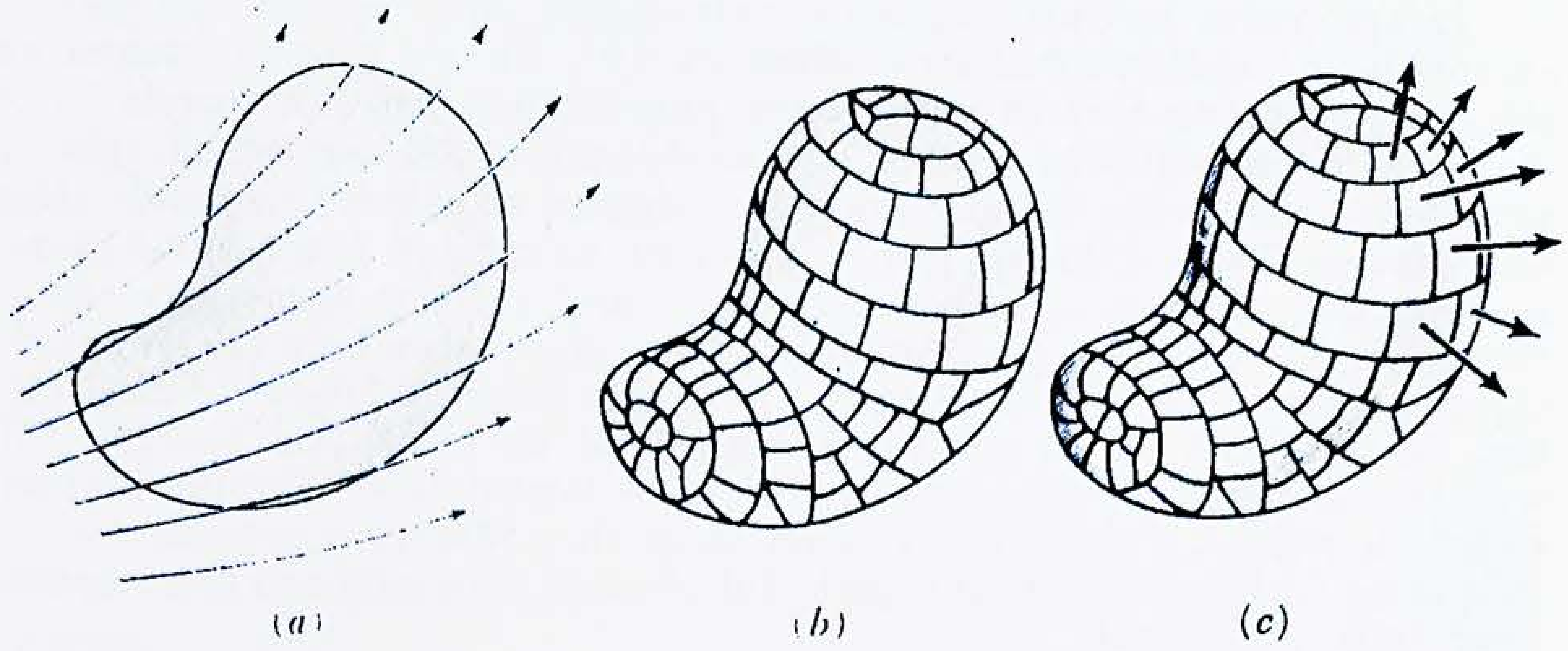


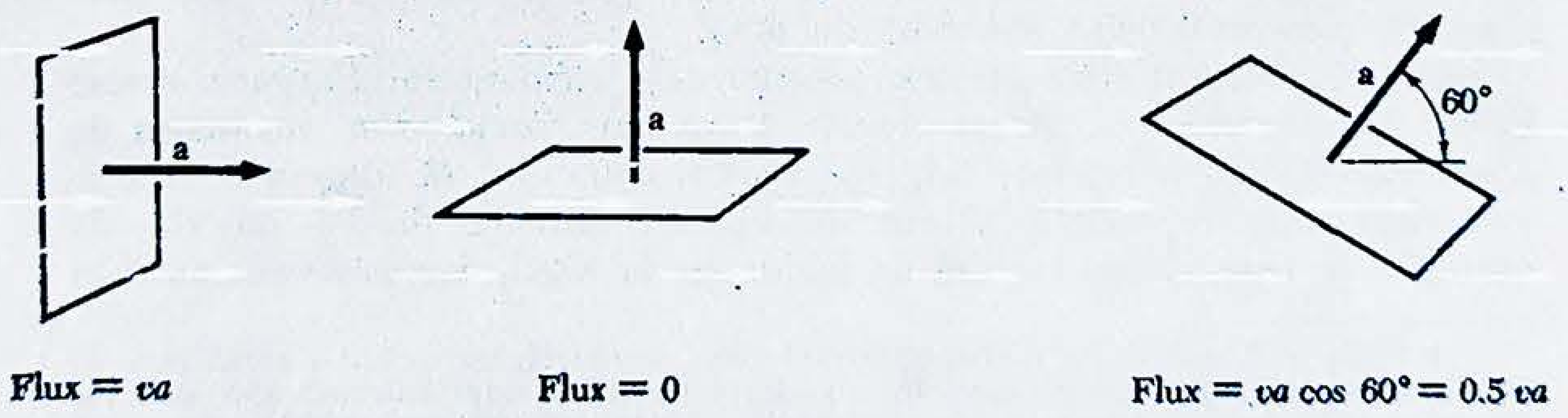
Fig. 1.13. *(a)* O suprafață închisă aflată într-un cîmp vectorial este împărțită *(b)* în elemente de suprafață mici. *(c)* Fiecare suprafață elementară este reprezentată printr-un vector îndreptat spre exterior.

timp, în orice poziție. Să notăm acest vector cu **v**, măsurat în m/s. Atunci dacă **a** este vectorul elementului de suprafață orientat din apă, exprimat în m^2, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ este fluxul apei prin elementul de suprafață ales, exprimat în m^3/s (fig. 1.14). Trebuie să subliniem că definiția dată fluxului este aplicabilă oricărei funcții vectoriale, indiferent de variabila fizică pe care o reprezintă.

Să adunăm, acum, fluxul prin toate suprafețele elementare pentru a obține fluxul prin întreaga suprafață — o mărime scalară, pe care o vom nota cu Φ:

$$\Phi = \sum_{\text{Toți } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \tag{16}$$

Fig. 1.14. Fluxul printr-un cadru de arie **a** este **v·a**, unde **v** este viteza fluidului. Fluxul este volumul de fluid ce trece prin suprafață în unitatea de timp.



Micşorînd elementele de suprafaţă şi mărind numărul lor la infinit, trecem de la suma (16) la integrala de suprafaţă:

$$\Phi = \int_{\text{pe întreaga suprafaţă}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \qquad (17)$$

Integrale de suprafaţă pentru o funcţie vectorială oarecare **F**, pe suprafaţa S, înseamnă următoarele: se împarte S în elemente mici, reprezentate printr-un vector, îndreptat spre interiorul suprafeţei, a cărui mărime este egală cu aria elementului de suprafaţă; pe fiecare element, se ia produsul scalar al vectorului suprafeţei elementare şi a valorii locale a vectorului **F**, se însumează toate aceste produse şi limita acestei sume cînd suprafeţele elementare sînt micşorate din ce în ce mai mult, este integrala de suprafaţă. Nu trebuie să ne sperie perspectiva unui asemenea calcul pentru o suprafaţă neregulată ca cea din figura 1.13. Proprietatea surprinzătoare, pe care ne pregătim să o demonstrăm, ne va scuti de aceasta!

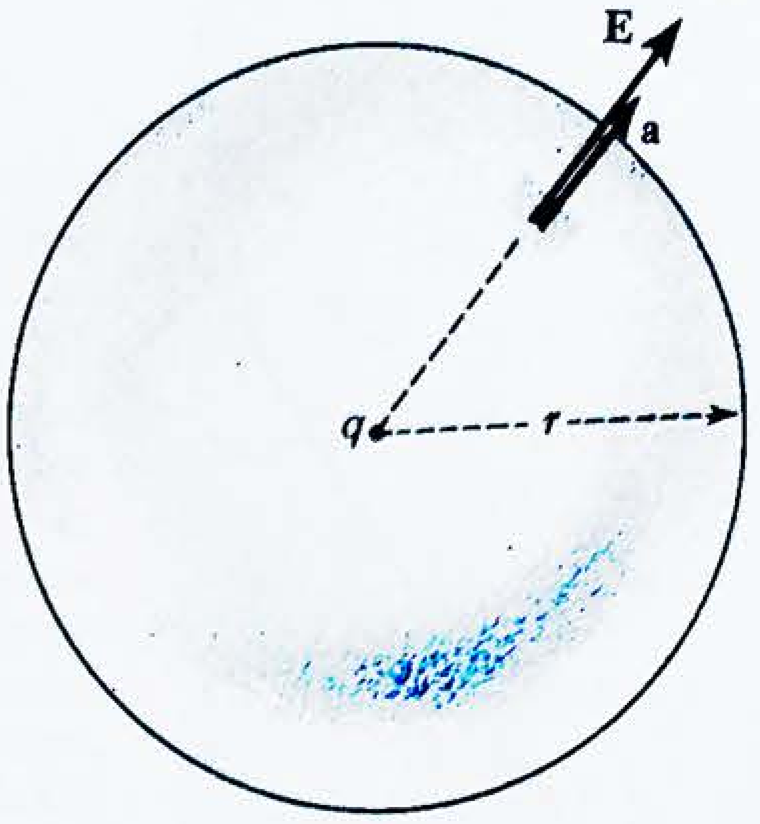


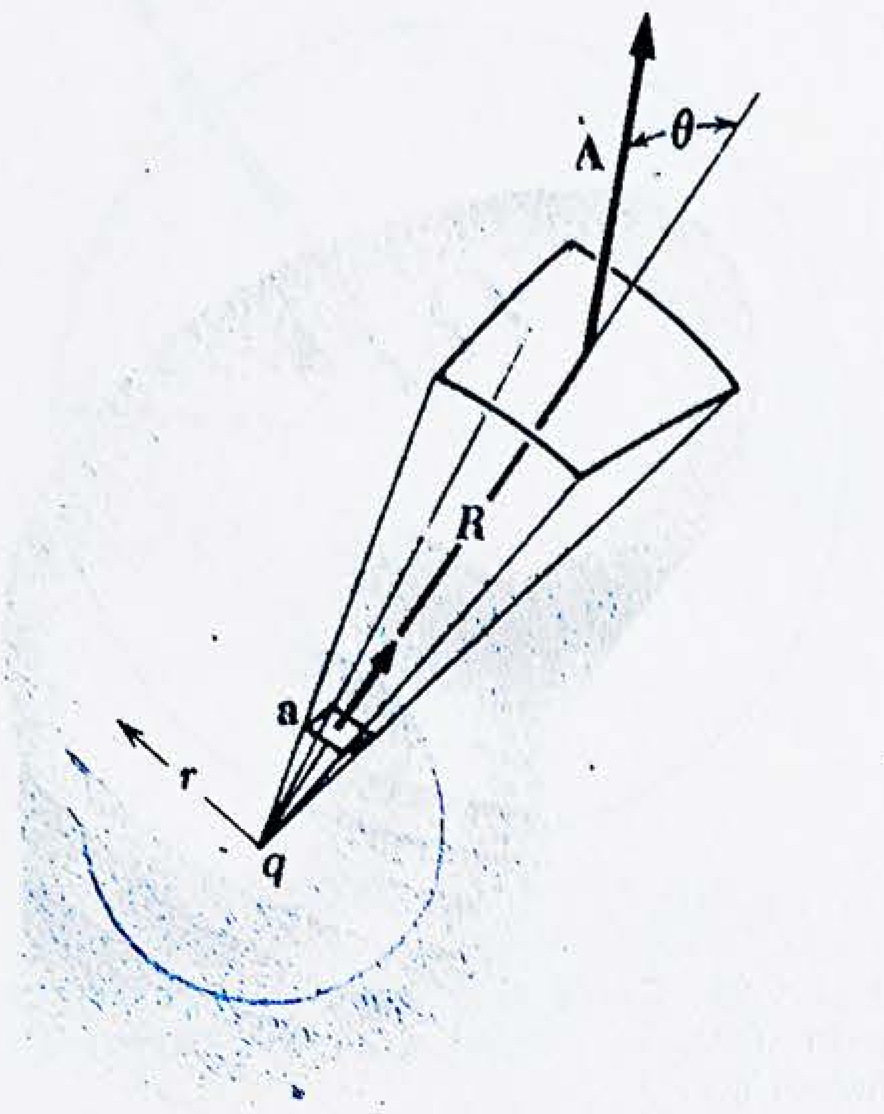
Fig. 1.15. Cu ce este egal fluxul exterior prin sferă, în cîmpul **E** al sarcinii punctiforme q.

1.10. LEGEA LUI GAUSS

Să luăm cazul cel mai simplu: să presupunem că cîmpul este produs de o sarcină punctiformă pozitivă q izolată şi că suprafaţa este o sferă de rază r cu centrul în punctul în care se găseşte sarcina (fig. 1.15). Care este fluxul Φ prin această suprafaţă? Răspunsul este simplu deoarece mărimea lui **E**, în fiecare punct al suprafeţei, este $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ şi direcţia coincide cu normala exterioară în acest punct. Astfel:

$$\Phi = E \times \textit{suprafaţa totală} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (18)$$

Fluxul nu depinde de dimensiunile sferei. Să ne imaginăm, acum, o a doua suprafaţă, nesferică, care s-o cuprindă pe prima (fig. 1.16). Afirmăm că fluxul total prin această suprafaţă este egal cu fluxul prin sferă. Pentru a dovedi aceasta, să luăm un con, cu vîrful în q, care taie o suprafaţă mică **a** pe sferă şi un element **A** pe suprafaţa exterioară, aflat la distanţa R de sarcina punctiformă. Suprafaţa **A** este mai mare decît **a** din două motive: în primul rînd, datorită raportului pătratelor distanţelor $(R/r)^2$ şi în al doilea rînd, datorită înclinării care introduce factorul $1/\cos\theta$. Unghiul θ



Fi. 1.16. Se demonstrează că fluxul prin orice suprafaţă închisă în jurul sarcinii q este acelaşi cu fluxul prin sferă.

este unghiul dintre direcţia normalei exterioare şi direcţia razei (v. fig. 1.16). Cîmpul electric din vecinătatea normalei este mai mic decît cîmpul pe sferă cu factorul $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ şi îndreptat tot radial. Dacă $\mathbf{E}_{(R)}$ este cîmpul în porţiunea exterioară a suprafeţei şi $\mathbf{E}_{(r)}$ cîmpul în dreptul sferei, atunci:

Fluxul prin porţiunea suprafeţei exterioare $= \mathbf{E}_{(R)} \cdot \mathbf{A} = E_{(R)} A \cos\theta$.

Fluxul prin porţiunea suprafeţei interioare $= \mathbf{E}_{(r)} \cdot \mathbf{a} = E_{(r)} a$ (19)

$$E_{(R)} A \cos\theta =$$

$$= \left[E_{(r)} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[a\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta}\right] \cos\theta = E_{(r)} a.$$

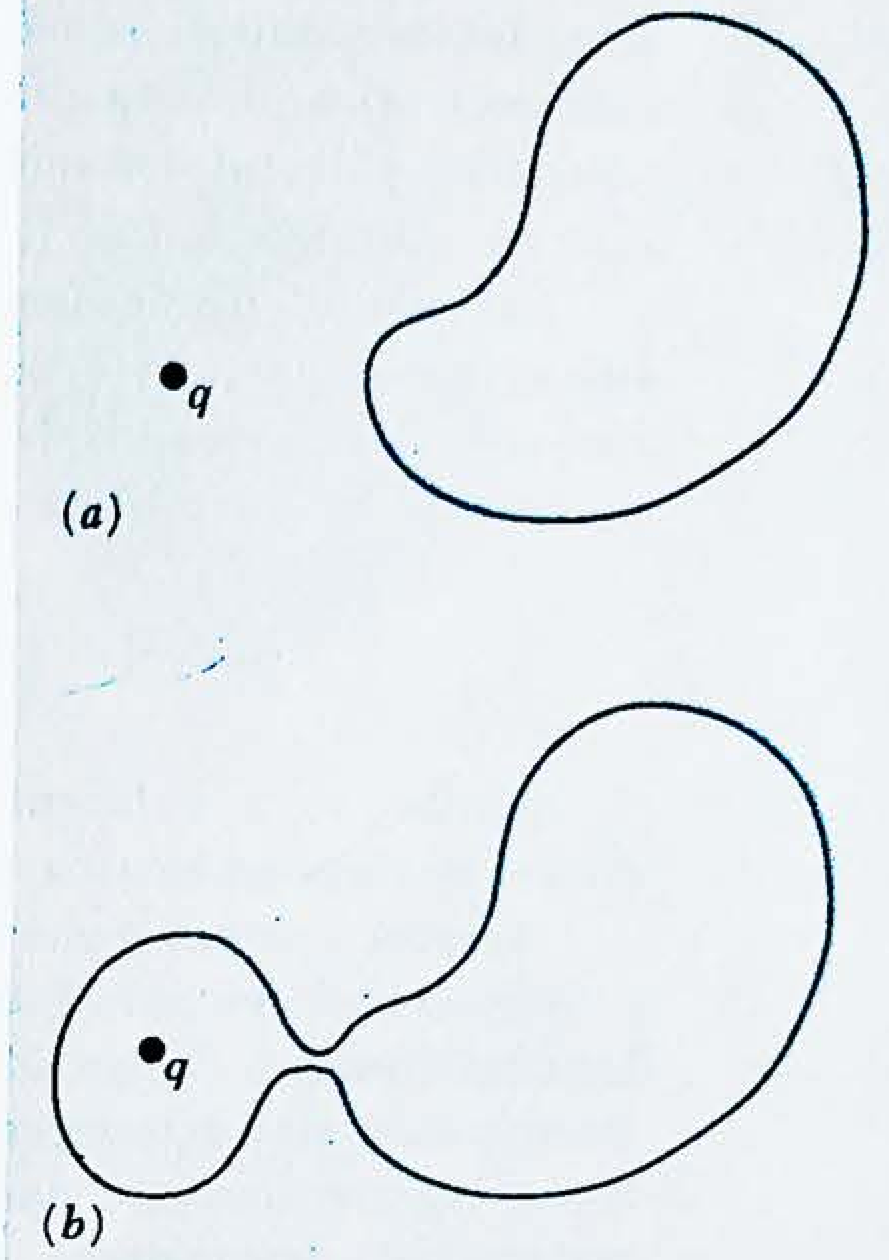
Aceasta dovedeşte că fluxul prin cele două suprafeţe elementare este acelaşi.

Fiecare element de pe suprafaţa exterioară corespunde unei porţiuni a suprafeţei sferice, astfel încît fluxul total trebuie să fie acelaşi prin ambele suprafeţe. Înseamnă că fluxul total prin suprafaţa nou aleasă va fi egal tot cu q/ε_0. Dar formele şi dimensiunile suprafeţei au fost alese *arbitrar**. Prin urmare: fluxul cîmpului electric printr-o suprafaţă *oarecare* care cuprinde o sarcină punctiformă q este q/ε_0. Se poate arăta, de asemenea, că fluxul total printr-o suprafaţă închisă este nul dacă sarcina se află *în afara* suprafeţei. Această demonstraţie o lăsăm în seama cititorului, ca o variantă a problemei (fig. 1.17).

Există o cale datorită căreia rezultatul devine evident. Să presupunem că în q se află o sursă care emite particule în toate direcţiile, cu viteză constantă — de exemplu, nuclee atomice sau fotoni. Evident, fluxul de particule printr-o secţiune egală cu unitatea de suprafaţă, va scădea invers proporţional cu pătratul distanţei de la secţiune pînă la q. Prin urmare, putem face o analogie între intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ şi intensitatea fluxului de particule, exprimat în nuclee pe unitatea de suprafaţă şi în unitatea de timp. Este suficient de clar, că fluxul de nuclee printr-o suprafaţă oarecare care îl cuprinde pe q, nu depinde de dimensiunile şi forma acestei

* Pentru a fi siguri, am ales a doua suprafaţă astfel încît să cuprindă sfera, dar nu e absolut necesar. În afară de aceasta, sfera poate fi aleasă oricît de mică.

Fig. 1.17. Pentru a arăta că în (a) fluxul prin suprafața S este nul (a), se poate folosi figura (b).



suprafețe, întrucît este egal doar cu numărul total de particule emis în unitatea de timp. În mod corespunzător, fluxul lui $\mathbf{E}$ printr-o suprafață închisă nu trebuie să depindă de dimensiunile și forma ei. Aceasta se explică prin faptul că intensitatea este invers proporțională cu pătratul distanței.

Acum se poate folosi principiul superpoziției. Orice cîmp electric este suma cîmpurilor electrice produse de fiecare sarcină în parte. Această proprietate a fost exprimată în legea lui Coulomb (ecuația 13). Este clar că fluxul este o mărime aditivă, în sensul că dacă există un număr de surse $q_1, q_2, \ldots, q_N$ care produc, corespunzător, cîmpurile $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_N$, fluxul total Φ, printr-o suprafață oarecare S aflată în cîmpul existent, poate fi scris ca

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a} \qquad (20)$$

Am stabilit că $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$ este egală cu q_n/ε_0, dacă sarcina q_n se află în interiorul suprafeței S și egală cu zero cînd este în afara suprafeței: astfel, în integrala de suprafață din ecuația (20), contribuția fiecărei sarcini q aflată în interiorul suprafeței este exact q/ε_0 și contribuția tuturor sarcinilor aflate în afara ei este nulă. Am ajuns la legea lui Gauss:

> Fluxul cîmpului electric $\mathbf{E}$ printr-o suprafață închisă oarecare, adică integrala de suprafață $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$, este egal cu $\frac{1}{\varepsilon_0}$ înmulțit cu sarcina totală din interiorul suprafeței:
>
> $$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dv \qquad (21)$$

Numim afirmația din chenar *lege*, întrucît ea este echivalentă cu legea lui Coulomb și poate fi, la fel de bine, considerată ca o lege fundamentală a interacțiunilor electrostatice, după ce sarcina și cîmpul au fost definite. Legea lui Gauss și legea lui Coulomb nu sînt două legi fizice independente, ci reprezintă una și aceeași lege exprimată în moduri diferite*.

* Există o diferență, neesențială aici, dar importantă la studiul cîmpurilor sarcinilor în mișcare. Legea lui Gauss este valabilă pentru o clasă mai largă de cîmpuri decît cel electrostatic. În particular un cîmp fără simetrie sferică, invers proporțional cu r^2, poate satisface legea lui Gauss. Cu alte cuvinte, numai legea lui Gauss nu implică simetria sferică a cîmpului unei surse punctiforme care în legea lui Coulomb se subînțelege.

Observăm că demonstrația noastră este bazată pe faptul că interacțiunea este invers proporțională cu pătratul distanței și de asemenea, pe aditivitatea interacțiunilor, adică pe principiul superpoziției. Astfel, teorema este aplicabilă oricărui cîmp din fizică, în care interacțiunea este invers proporțională cu pătratul distanței, ca de exemplu cîmpului gravitațional, despre care am discutat în vol. I, cap. 9.

Este simplu de verificat că legea lui Gauss nu este valabilă dacă forța este invers proporțională, să spunem, cu cubul distanței. În acest caz, fluxul cîmpului electric produs de o sarcină punctiformă q, printr-o sferă de rază R cu centrul în punctul în care se află sarcina, va fi

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 R}. \qquad (22)$$

Mărind sfera suficient de mult, putem micșora fluxul prin ea oricît dorim, în timp ce sarcina totală din interior rămîne constantă.

Această teoremă remarcabilă ne lărgește posibilitățile în două moduri: în primul rînd, ne relevă legătura dintre cîmp și sursele sale, în mod opus legii lui Coulomb. Legea lui Coulomb ne spune cum să determinăm cîmpul electric dacă sînt date sarcinile; cu legea lui Gauss putem determina sarcina într-o regiune oarecare dacă se cunoaște cîmpul. În al doilea rînd, relația matematică demonstrată este un util instrument analitic care, așa cum vom vedea, ne va simplifica rezolvarea problemelor complicate.

1.11. CÎMPUL UNEI DISTRIBUȚII SFERICE DE PURTĂTORI DE SARCINĂ

Putem folosi legea lui Gauss pentru a găsi cîmpul electric al unei distribuții sferice simetrice de sarcină, adică, a unei distribuții în care densitatea de sarcină depinde numai de distanța pînă la un punct central. În figura 1.18 este reprezentată o secțiune transversală printr-o asemenea distribuție. În această distribuție, densitatea de sarcină este mare în centru, apoi descrește și pe măsura depărtării de centru, crește din nou și la distanțe mai mari ca r_0 este zero. Care este cîmpul electric într-un punct oarecare P_1 aflat în afara distribuției, sau în punctul P_2, din interiorul ei (figura 1.19)? Dacă am porni numai de la legea lui Coulomb, am însuma vectorii cîmp electric, dați de fiecare element de volum al distribuției de sarcină, în punctul P_1. Să încercăm o altă cale care folosește și simetria sistemului și legea lui Gauss.

Datorită simetriei sferice, cîmpul electric în orice punct este dispus radial — nu există o altă direcție. Ca urmare, mărimea cîmpului E trebuie să fie aceeași în toate punctele de pe suprafața sferică S_1 de rază r_1, întrucît toate punctele sînt echivalente. Să notăm mărimea acestui cîmp cu E_1.

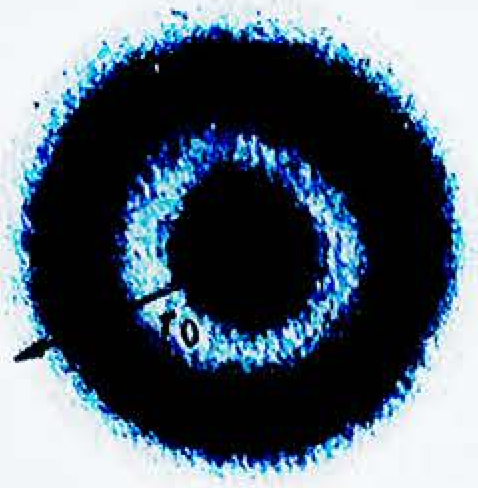


Fig. 1.18. O distribuţie de sarcină cu simetrie sferică.

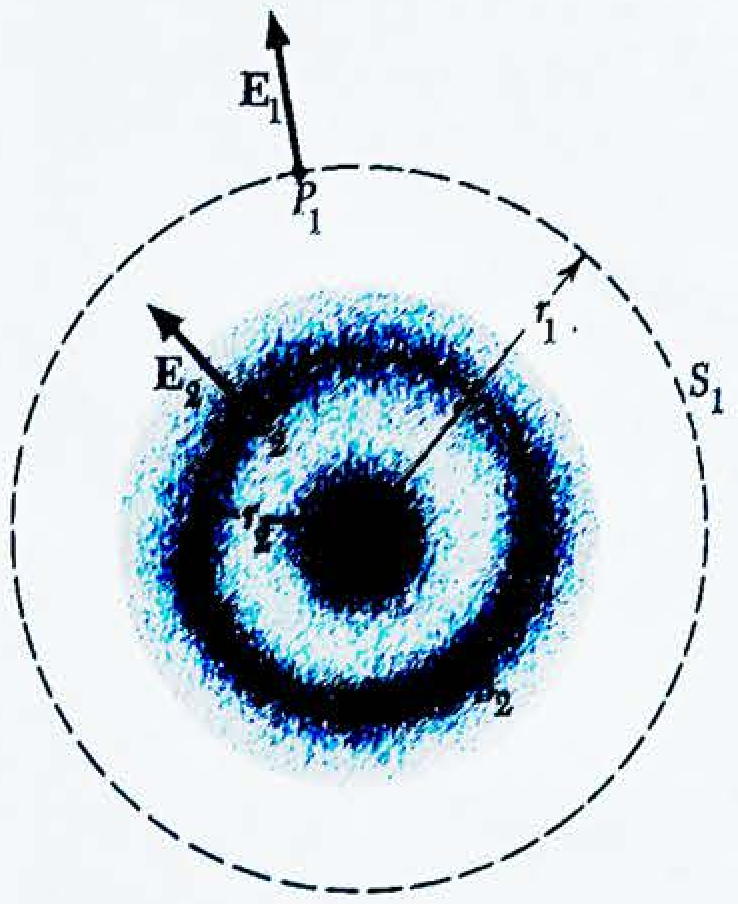


Fig. 1.19. Cîmpul electric al unei distribuţii sferice de sarcină.

Fluxul prin această suprafaţă S_1 este egal cu $4\pi r_1^2 E_1$ şi, conform legii lui Gauss, trebuie să fie egal cu de $1/\varepsilon_0$ ori sarcina cuprinsă în interiorul suprafeţei. Înseamnă că $4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}$ (sarcina din interiorul lui S_1) sau

$$E_1 = \frac{\text{sarcina din } S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}. \tag{23}$$

Comparînd-o cu cîmpul unei sarcini punctiforme, observăm că *cîmpul în toate punctele de pe suprafaţa S_1 este acelaşi, ca şi cum toată sarcina din interiorul suprafeţei S_1 ar fi concentrată în centru.* Acelaşi lucru se aplică unei sfere aflată în interiorul distribuţiei de sarcină. Cîmpul, în orice punct de pe suprafaţa S_2 este acelaşi, ca şi cum toată sarcina din interiorul lui S_2 s-ar afla în centru şi toată sarcina din exteriorul lui S_2 n-ar exista. Evident, cîmpul în interiorul sferei delimitate de un strat sferic de sarcină este nul (fig. 1.20).

Folosind aceeaşi demonstraţie şi în cazul cîmpului gravitaţional, ajungem la concluzia că Pămîntul, presupunînd că distribuţia masei lui are simetrie sferică, atrage toate corpurile exterioare ca şi cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centru. Această afirmaţie ne este mai familiară. Ea a fost demonstrată în vol. I folosind potenţialul gravitaţional şi o integrare. Celor care sînt înclinaţi să creadă că acest principiu exprimă o proprietate evidentă a centrului de masă, trebuie să le reamintim că teorema nu este valabilă, în general, pentru alte forme. Un cub perfect, cu densitate omogenă nu atrage corpurile exterioare ca şi cum masa ar fi concentrată în centrul ei geometric.

Pentru Newton această teoremă nu era evidentă. El ar fi avut nevoie de ea ca fundament pentru a demonstra că forţe de aceeaşi natură explică mişcarea orbitală a Lunii cît şi căderea corpurilor pe Pămînt.



Fig. 1.20. Cîmpul este nul în interiorul unei pături sferice încărcate.

Întîrzierea publicării cu aproape 20 de ani a teoriei gravitației se explică, în parte, și prin dificultățile pe care Newton le-a întîmpinat în demonstrarea acestei teoreme. Demonstrația la care a ajuns și pe care a publicat-o în 1686 în *Principia* (Cartea I, paragraful XII, Teorema XXX) este de o uimitoare ingeniozitate realizînd-o cu ajutorul unei integrări de volum complicate fără a-i fi cunoscute bazele calculului integral. Demonstrația este mult mai lungă și mai încîlcită decît cea folosită de noi pentru legea lui Gauss. Și toate acestea pentru că, cu toată ingeniozitatea matematică și originalitatea sa, lui Newton i-a lipsit teorema lui Gauss — o relație care nouă ni se pare evidentă, dacă nu chiar banală.

1.12. CÎMPUL UNEI SARCINI LINIAR DISTRIBUITE

Un conductor liniar încărcat lung, de grosime neglijabilă, poate fi caracterizat prin sarcina electrică pe unitatea de lungime. Să notăm cu λ *densitatea liniară de sarcină*, măsurată în coulombi pe metru. Care este cîmpul electric al unei asemenea distribuții liniare, de lungime infinită și cu densitatea de sarcină λ constantă? Vom rezolva problema pe două căi: întîi, vom porni de la legea lui Coulomb și vom folosi integrarea.

Pentru a calcula cîmpul în punctul P din figura 1.21, trebuie să adunăm contribuțiile tuturor elementelor distribuției liniare de sarcină de lungime $\mathrm{d}x$. Sarcina $\mathrm{d}q$ a unui asemenea element este $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$. Orientînd axa x pe direcția distribuției liniare de sarcină, putem duce axa y prin punctul P, aflat la distanța r metri de la cel mai apropiat punct de pe conductor. Din considerente de simetrie, cîmpul electric în punctul P, trebuie să fie îndreptat pe direcția axei y, astfel încît E_x și E_z sînt nule. Contribuția sarcinii $\mathrm{d}q$ la componenta pe y a cîmpului electric în punctul P este

$$\mathrm{d}E_y = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta \tag{24}$$

unde θ este unghiul dintre vectorul cîmp electric, produs de sarcina $\mathrm{d}q$, și direcția axei y. Componenta totală a cîmpului pe axa y va fi

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

Este convenabil să fie folosit ca variabilă de integrare unghiul θ. Întrucît $R = r/\cos\theta$ şi $dx = R\,d\theta/\cos\theta$, integrala devine:

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (26)$$

Se vede că intensitatea cîmpului unei distribuţii liniare infinite de sarcină şi cu densitate uniformă, este invers proporţional cu distanţa de la conductor. Direcţia este, bineînţeles, radială îndreptată dinspre conductor înafară — dacă conductorul poartă sarcini pozitive şi spre conductor — dacă sarcinile sînt negative.

Legea lui Gauss duce exact la acelaşi rezultat. Să închidem un segment din distribuţia liniară de sarcină într-un cilindru circular de lungime L şi rază r ca în figura 1.22 şi să calculăm fluxul prin această suprafaţă. Aşa cum am mai văzut, considerentele de simetrie ne garantează că fluxul prin capetele acestei „cutii de conserve" este nul. Fluxul prin suprafaţa cilindrică este egal cu suprafaţa $2\pi rL$ înmulţită cu cîmpul E_r de pe suprafaţă. Pe de altă parte, sarcina din interiorul cilindrului este tocmai λL, astfel încît legea lui Gauss ne dă $2\pi r L E_r = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$, sau

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (27)$$

în concordanţă cu ecuaţia (26).

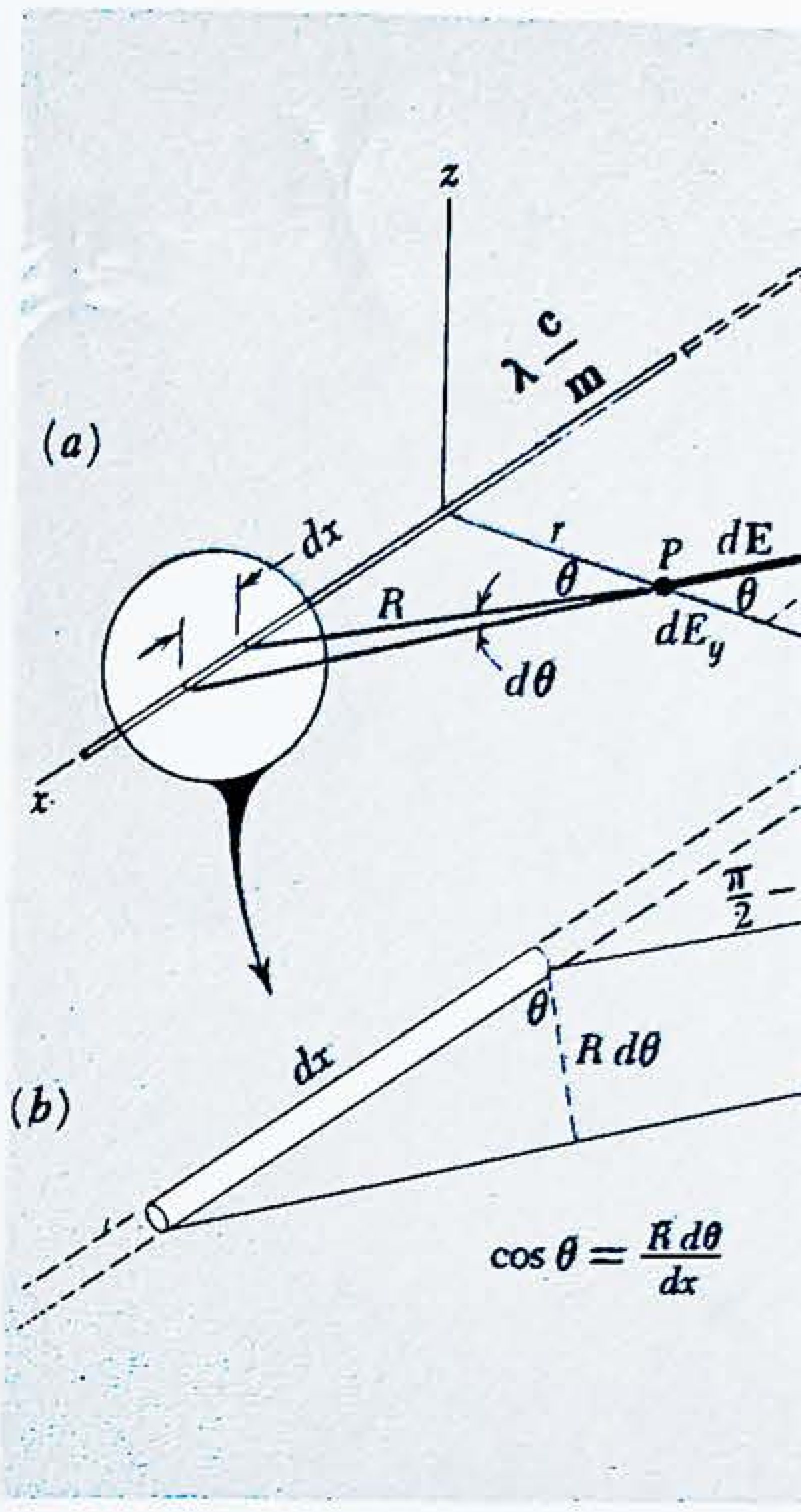


Fig. 1.21. *(a)* Cîmpul în *P* este suma vectorială a contribuţiilor fiecărui element din distribuţia liniară de sarcină. *(b)*. Detaliu din figura *(a)*.

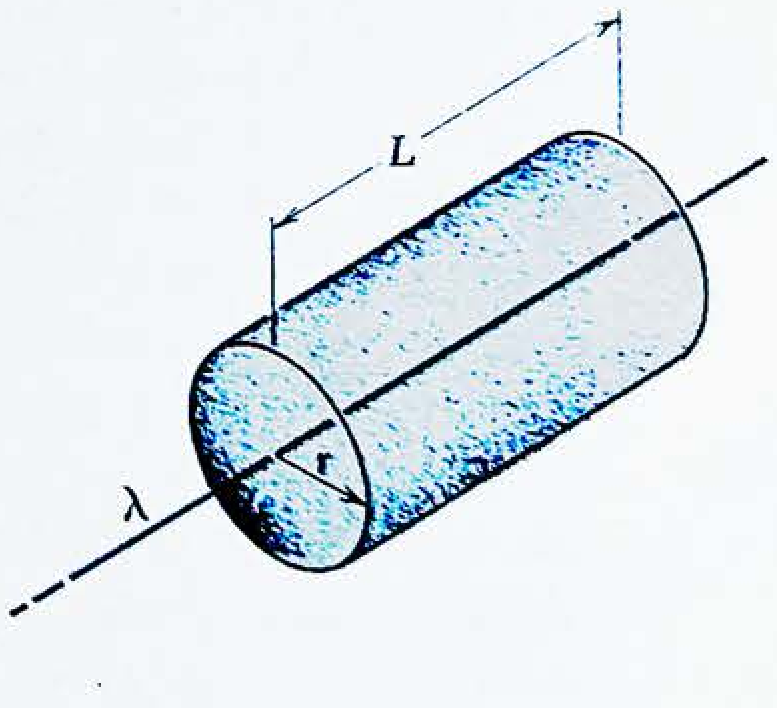


Fig. 1.22. Determinarea cîmpului unei distribuţii liniare de sarcină folosind legea lui Gauss.

1.13. CÎMPUL SARCINII DISTRIBUITE PE UN PLAN INFINIT

Sarcina electrică distribuită uniform într-un strat subţire este numită distribuţie superficială de sarcină. Să considerăm o suprafaţă plană infinită cu o densitate superficială de sarcină σ constantă. Cîmpul electric pe ambele feţe ale suprafeţei, indiferent de mărime, trebuie să fie neapărat perpendicular la suprafaţă; o altă direcţie în sistem nu este posibilă. De asemenea,

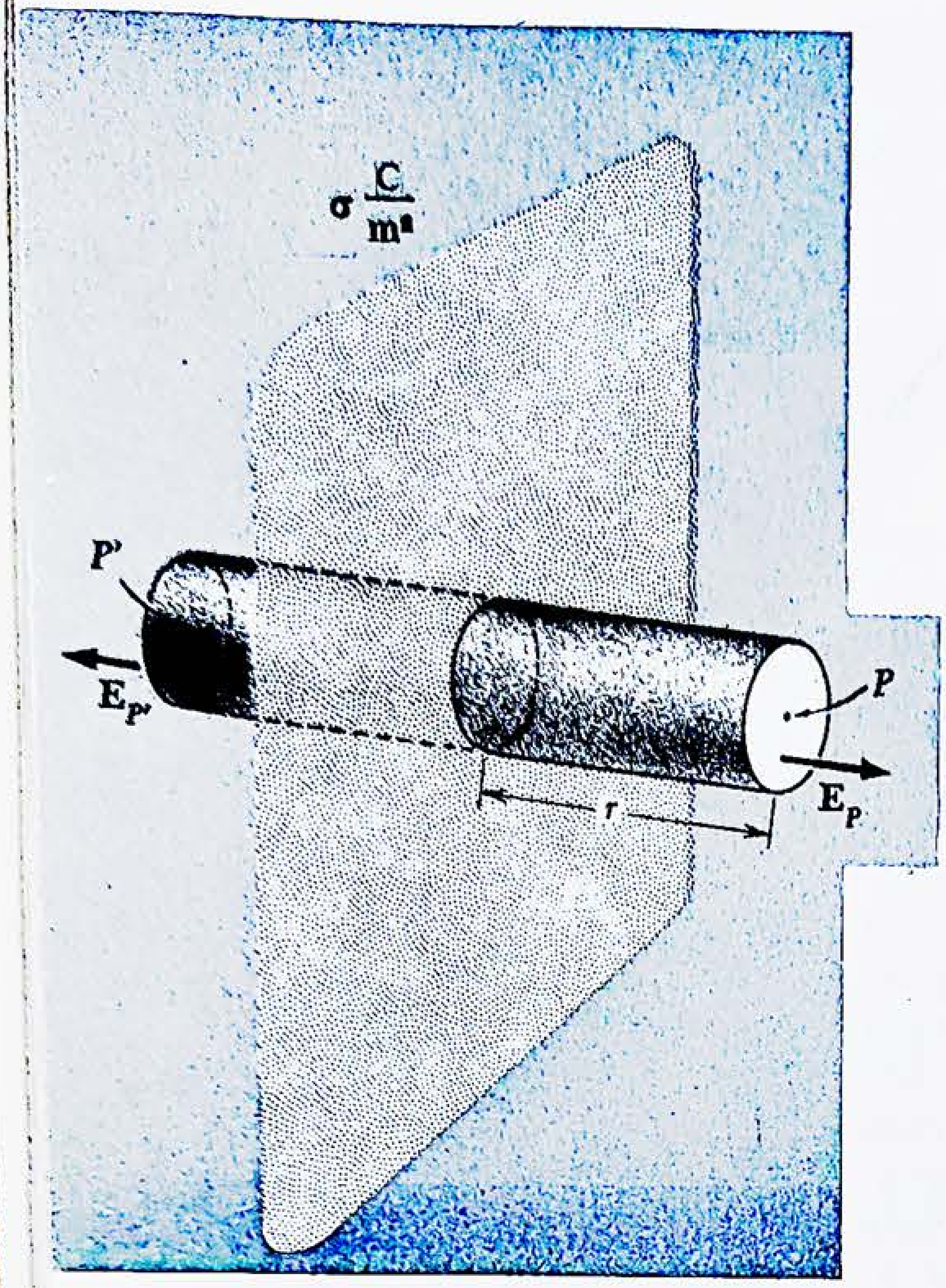


Fig. 1.23. Determinarea cîmpului unei distribuţii superficiale de sarcină infinite folosind teorema lui Gauss.

din considerente de simetrie, cîmpul în două puncte P şi P', aflate la distanţe egale de cele două feţe, trebuie să aibă aceeaşi mărime şi sensuri opuse. Odată stabilite aceste lucruri, pe baza legii lui Gauss putem determina imediat intensitatea cîmpului, în modul următor: desenăm un cilindru ca în figura 1.23, cu aria secţiunii A şi cu punctele P şi P' aflate la cele două capete. Fluxul exterior se găseşte numai la capete, astfel încît, dacă E_p este mărimea cîmpului în punctul P şi $E_{p'}$ mărimea în punctul P', fluxul exterior este $AE_p + AE_{p'} = 2AE_p$. Sarcina conţinută este σA. Prin urmare, $2AE_p = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A$, sau

$$E_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{28}$$

Se vede că intensitatea cîmpului este independentă de r — distanţa la suprafaţă. Ecuaţia (28) poate fi dedusă şi pe o cale mai complicată, calculînd suma vectorială a tuturor contribuţiilor elementelor din distribuţia superficială de sarcină la cîmpul din punctul P.

Am găsit că cîmpul unei distribuţii liniare de sarcină infinit de lungi, variază invers proporţional cu distanţa la conductor, în timp ce cîmpul unui strat superficial infinit are aceeaşi intensitate independentă de distanţă. Toate acestea nu sînt decît simple consecinţe ale faptului că cîmpul unei sarcini punctiforme variază invers proporţional cu pătratul distanţei. Dacă acest lucru nu este încă suficient de evident, se poate explica în alt mod: într-o aproximaţie grosolană, partea, din distribuţia liniară de sarcină, care aduce contribuţia esenţială în cîmpul din P (fig. 1.21), este partea cea mai apropiată — aflată la distanţa r. Dacă însumăm toate aceste părţi, neglijînd restul, obţinem o sarcină concentrată de mărime $q \approx \lambda r$, care produce un cîmp proporţional cu $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ sau cu $\lambda/4\pi\varepsilon_0 r$. În cazul stratului superficial, sarcina „efectivă", în sensul amintit, creşte proporţional cu r^2 pe măsura depărtării de suprafaţă, compensînd scăderea cîmpului cu $\frac{1}{r^2}$, pentru fiecare element de sarcină.

PROBLEME

(a) O chestiune fundamentală: raportul dintre mărimea forței gravitaționale și a celei electrice ce acționează între două particule elementare.

1.1. *(a)* Să se compare respingerea electrică dintre doi electroni, aflați la distanța r unul de altul, cu atracția gravitațională a acelorași particule.

Ce valoare trebuie să aibă masa electronului pentru ca aceste forțe să se compenseze reciproc? (Valorile mărimilor fundamentale ca sarcina și masa electronului și constanta gravitațională, G, sînt date în tabelele de la sfîrșitul volumului.)

(b) O rememorare: unitățile de masă și sarcină sînt definite în moduri diferite.

(b) În legea gravitației universale (vol. I, 84) G este o constantă care se determină experimental, în timp ce kilogramul, unitate de masă, se definește independent. Pentru definirea unității de sarcină, se folosește legea lui Coulomb. Presupunînd că unitatea de masă s-ar defini în același mod, cu ce va fi egală masa în asemenea unități?

Legea lui Coulomb

1.2. Care este forța electrică totală exercitată asupra unității de sarcină pozitivă, aflată în centrul unui pătrat de latură b, dacă în cele patru colțuri ale pătratului se află sarcinile 2, $2q, -4q$ și $2q$?

1.3. De două baloane identice umplute cu heliu este atîrnat un corp de masă 5 g. Baloanele plutesc în echilibru ca în figură. Fiecare balon poartă sarcina Q. Să se găsească valoarea lui Q.

R: $5{,}53 \cdot 10^{-7}$ C.

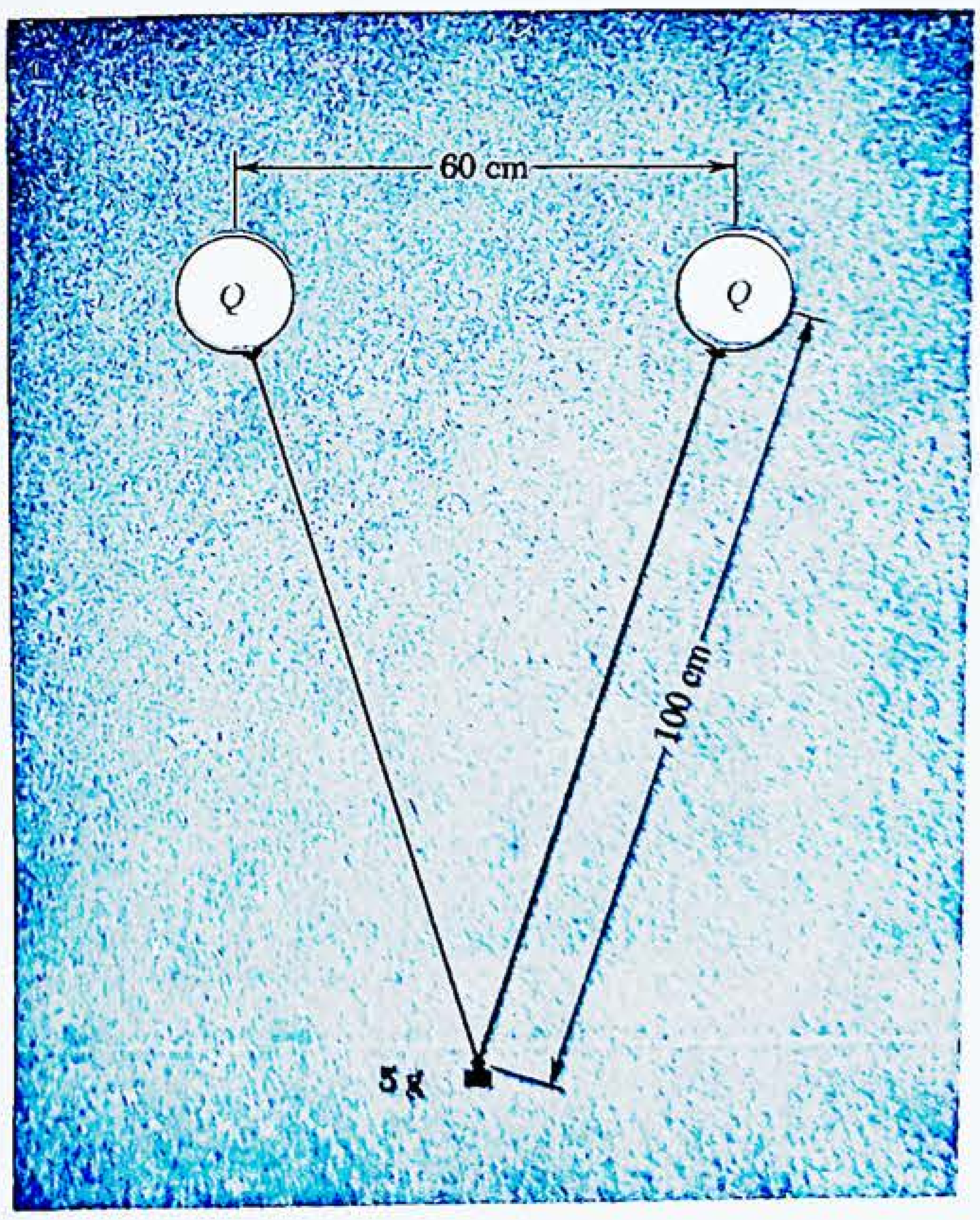
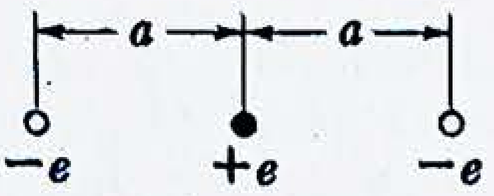


Fig. la problema 1.3.

1.4. În vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura r se află sarcinile $(-e)$, iar în centrul de greutate al triunghiului se află sarcina $Q > 0$. Care trebuie să fie valoarea lui Q, pentru ca forța ce acționează asupra oricăreia din sarcinile negative să fie egală cu zero? Este evident, din motive de simetrie, că forța ce acționează asupra lui Q este întotdeauna zero. Se află sistemul în echilibru stabil?

Energia potențială a unui sistem de sarcini punctiforme.



1.5. Trei sarcini sînt amplasate ca în figură.

a) Să se calculeze forța electrostatică ce acționează asupra fiecărei sarcini.

b) Să se calculeze energia potențială totală a configurației de sarcini.

1.6. O particulă α trece cu viteză mare prin centrul geometric al moleculei de hidrogen, mișcîndu-se pe direcția perpendiculară pe axa ce unește cele două nuclee. Distanța dintre nuclee este b. Pe ce porțiune din drum forța exercitată asupra particulei α este maximă? Presupunem că deplasarea nucleelor în timpul trecerii particulei α este neglijabilă (această presupunere este valabilă deoarece viteza particulei este mare). Vom neglija, de asemenea, cîmpul electric al electronilor în moleculă. (Această aproximație nu este prea corectă întrucît în regiunea centrală a moleculei de H_2 are loc o concentrare considerabilă de sarcină negativă.)

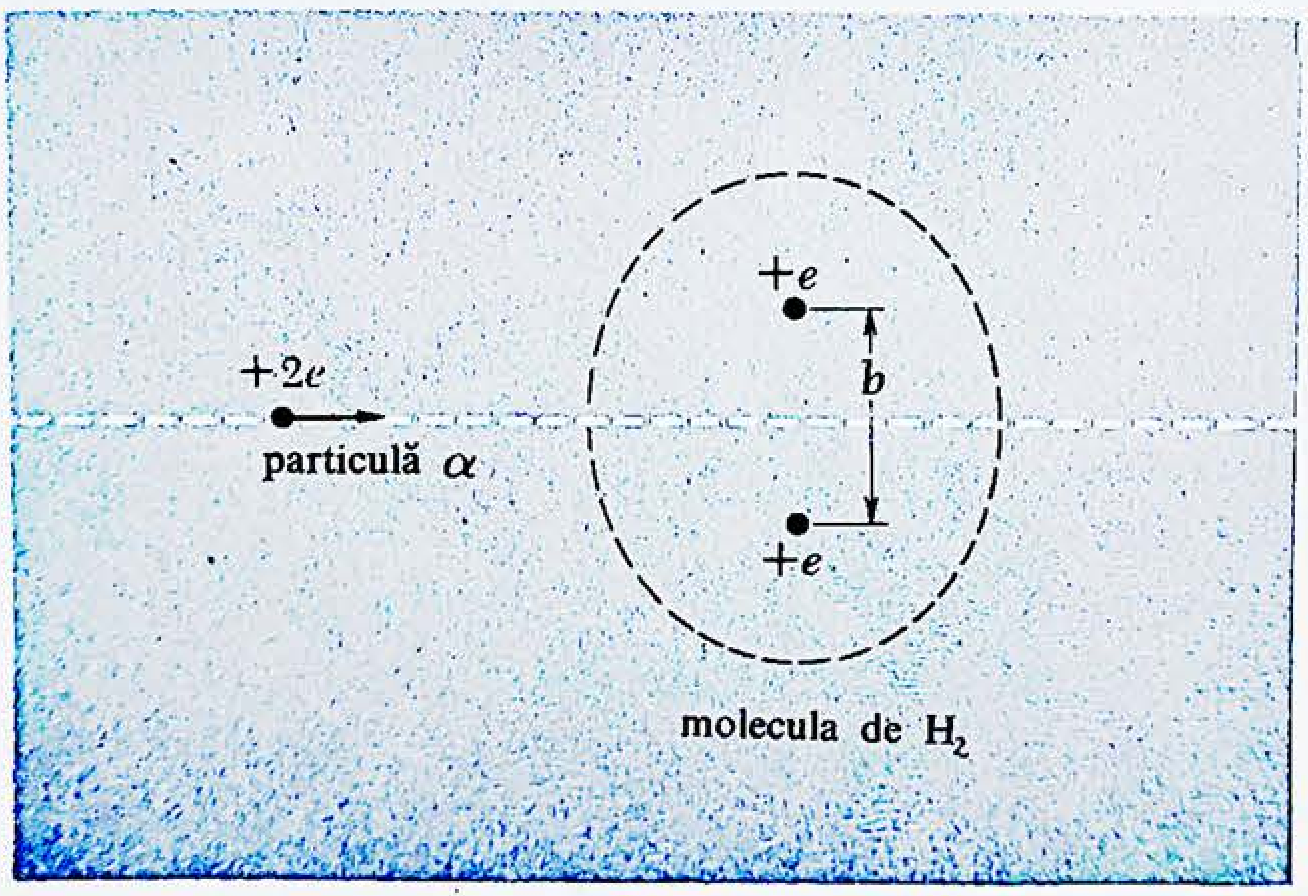


Fig. la problema 1.6.

1.7. Să se distribuie geometric un proton și doi electroni în așa fel, încît energia potențială a sistemului să fie egală cu zero. Cîte asemenea poziții sînt posibile pentru trei particule aflate în linie dreaptă?

1.8. Să se calculeze energia potențială ce revine unui ion, pentru un cristal ionic unidimensional infinit, adică pentru un șir de sarcini echidistante, de mărime e, alternînd semnele. (*Indicație*: în rezolvare se poate folosi dezvoltarea în serie a lui $\ln(1 + x)$.)

Energia potențială a unei distribuții de sarcină.

1.9. O incintă sferică de rază a se umple uniform cu sarcină de densitate ρ. Să se afle energia potențială U a acestei sfere încărcate, adică, lucrul mecanic cheltuit pentru alcătuirea ei. Calculați energia, alcătuind sfera strat cu strat și folosind faptul că cîmpul, în exteriorul unei distribuții sferice de sarcină, este același cu cel produs dacă întreaga sarcină ar fi concentrată în centrul sferei. Presupunem că raza sferei astfel alcătuite a devenit r. Care este, în acest stadiu, sarcina totală q?

Vom adăuga, acum, un strat de grosime infinitezimală dr; ce lucru mecanic dU s-a consumat pentru a aduce sarcina cuprinsă în acest strat, de la infinit pînă la raza r? Vom integra, acum, de la $r = 0$ pînă la $r = a$. Să se exprime rezultatul în funcție de sarcina totală Q din sferă.

$$\text{R: } U = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}(Q^2/a).$$

Modelul unui electron.

1.10. La începutul secolului nostru, ipoteza că masa de repaus a electronului ar putea avea o origină pur electrică a devenit deosebit de atractivă, mai ales după ce teoria specială a relativității a demonstrat echivalența dintre masă și energie. Să ne imaginăm electronul sub forma unei sfere încărcate, cu o densitate de volum constantă și o rază maximă r_0. Folosind rezultatul problemei 1.9, să egalăm energia potențială a acestui sistem cu mc^2 și să vedem ce obținem pentru raza r_0. Una din deficiențele modelului este evidentă: nu se prevede nimic pentru a putea păstra sarcina laolaltă!

Energia potențială electrică în nucleu.

1.11. Într-o primă aproximație structura electrică a nucleelor atomilor grei poate fi concepută sub forma unor sfere de materie cu densitatea de sarcină de volum constantă și egală cu $1{,}3 \cdot 10^{25}$C/m³. Care este variația energiei electrice, exprimată în jouli (J) și în megaelectronvolți (MeV), dacă un nucleu de uraniu, cu sarcina totală egală cu 92 e, fisionează în două nuclee de sarcină și rază egale și care apoi se depărtează la distanță mare una de alta?

Cîmpul a două sarcini punctiforme.

1.12. Două sarcini punctiforme se află pe axa x, o sarcină egală cu $+e$ în punctul $x = +2$ cm, și o sarcină egală cu $-4\ e$ în punctul $x = -2$ cm.

a) Să se calculeze mărimea și direcția cîmpului electric în punctul (0,3; 0) de pe axa y, aflînd, întîi, componentele cîmpului în acest punct.

b) Să se localizeze punctul în care cîmpul este nul. Sînt mai multe asemenea puncte?

Un corp încărcat aflat într-un cîmp.

1.13. O picătură de apă, cu diametrul de 10^{-2} cm, poartă o sarcină negativă, astfel încît cîmpul electric creat de această sarcină la suprafaţa sa este de $6 \cdot 10^5$V/m. Care trebuie să fie intensitatea unui cîmp vertical pentru a împiedica căderea picăturii?

Cîmpul electric în atmosferă.

1.14. Există date cu privire la faptul că cîmpul electric la suprafaţa Pămîntului nici chiar în medie nu este zero. Să presupunem că prin mai multe măsurători, efectuate pe glob în acelaşi timp, se stabileşte că intensitatea medie a cîmpului, vector orientat în jos, este egală cu 30 V/m.

Care este sarcina excedentară pe suprafaţă exprimată în sarcini electronice (e) pe centimetru pătrat?

Cîmpul electric în atomul de hidrogen.

1.15. Atomul neutru de hidrogen în stare normală se comportă, în anumite privinţe, ca o distribuţie de sarcină electrică care constă dintr-o sarcină punctiformă de mărime $+e$ înconjurată de o distribuţie de sarcină negativă a cărei densitate este dată de $-\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$, a_0 este „raza Bohr" egală cu $0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm şi C este o constantă, a cărei mărime se alege astfel încît sarcina negativă totală să fie exact e. Care este sarcina electrică totală în interiorul unei sfere de rază a_0? Care este intensitatea cîmpului electric la această distanţă de nucleu?

Problema este simplă dacă ne amintim principiul simetriei şi al superpoziţiei.

1.16. O bară subţire elastică neconductoare este îndoită sub forma unui arc de cerc de rază 50 cm. Capetele se află la 2 cm unul de altul. Pe toată lungimea barei este uniform distribuită o sarcină pozitivă de 10^{-9}C. Care este mărimea şi direcţia cîmpului electric în centrul cercului?

Legea lui Gauss.

1.17. *a)* O sarcină punctiformă q se află în centrul unui cub de latură d. Care este valoarea integralei $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ pe o faţă a cubului?

b) Sarcina este deplasată în unul din colţurile cubului. Care este acum valoarea fluxului lui $\mathbf{E}$ prin fiecare din feţele cubului?

Feţe plane cu sarcină superficială.

1.18. Două feţe plane infinite cu sarcină superficială de densitate $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$C/m² şi $\sigma = -4/3 \cdot 10^{-5}$C/m², sînt aşezate paralel la distanţa de 2 cm una de alta. Să se studieze cîmpul electric al acestui sistem. Să presupunem, apoi, că cele două plane se intersectează sub un unghi drept. Arătaţi cum va fi cîmpul în fiecare din cele patru regiuni în care a fost împărţit spaţiul.

1.19. Pe o suprafaţă plană infinită distribuţia superficială de sarcină σ este uniformă. În dreapta ei şi paralel cu ea se află un strat infinit de sarcină de grosime d şi densitate de sarcină de volum ρ uniformă. Toate sarcinile sînt fixe. Să se determine **E**.

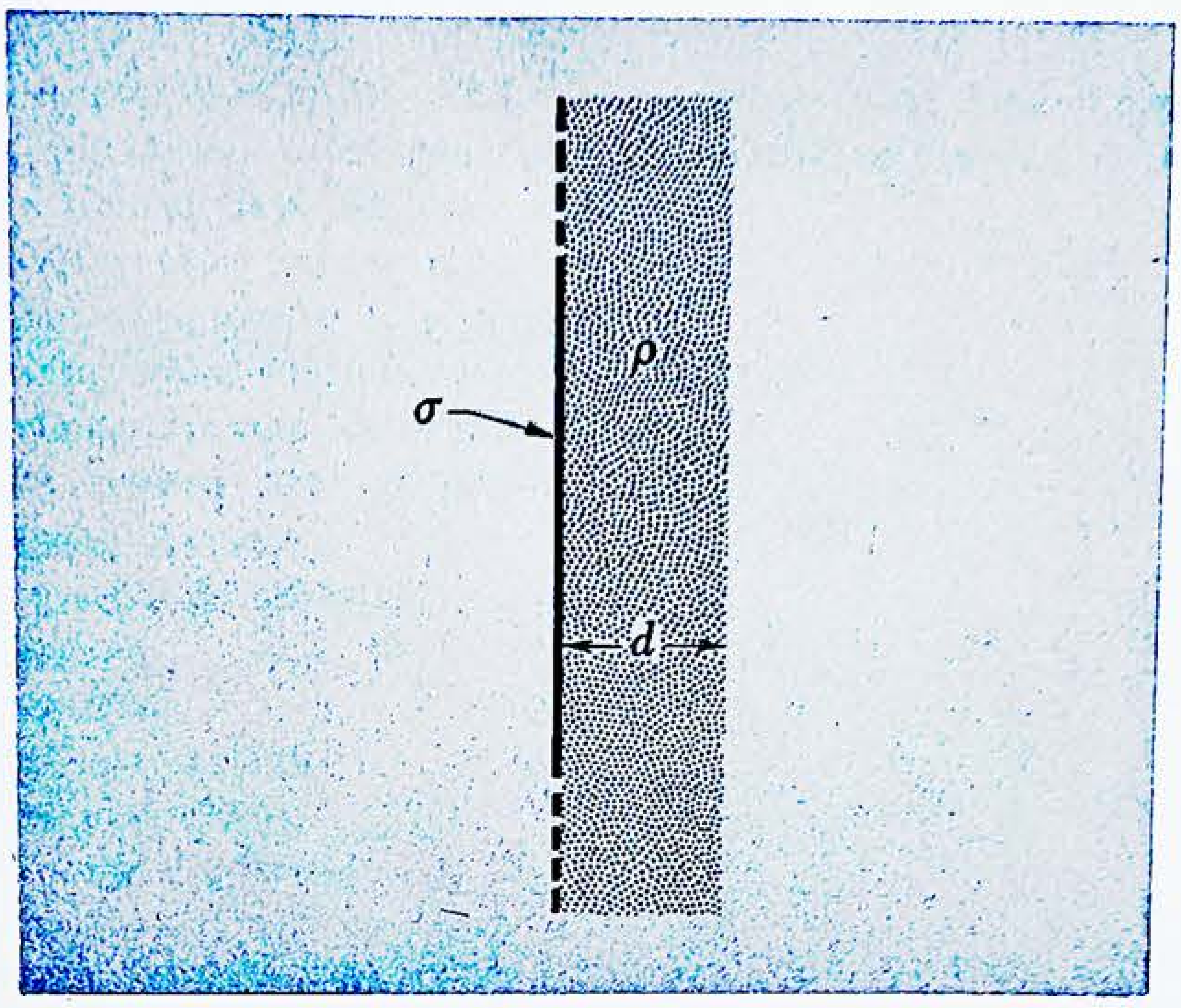


Fig. la problema 1.19.

1.20. Unul din faptele remarcabile exprimate în legea lui Coulomb este acela că sarcinile de acelaşi semn se resping cu aceeaşi forţă cu care sarcinile de semn contrar se atrag. Pentru a arăta că această afirmaţie nu este o chestiune obţinută de definiţie şi pentru a aprofunda unele aplicaţii ale ei, să ne imaginăm o lume care diferă de a noastră în această privinţă. În această lume unitatea de sarcină este definită prin forţa care acţionează între sarcinile de acelaşi semn. Două sarcini pozitive egale, aflate la 1 m una de alta, se resping cu o forţă egală cu 1 newton; acelaşi lucru este valabil şi pentru sarcinile negative. Legea variaţiei invers proporţionale cu pătratul distanţei şi principiul superpoziţiei sînt valabile. Dar o unitate de sarcină pozitivă şi o unitate de sarcină negativă se atrag cu o forţă de k newtoni, $k > 1$. Să se arate că în această lume, se poate întîlni o situaţie în care trei sarcini concentrate se pot atrage. Dar în lumea noastră, este posibil? Este necesară în lumea imaginată generalizarea noţiunii de sarcină? Ce se poate spune despre noţiunea de cîmp electric? Cîte măsurători diferite ar trebui făcute, folosind sarcini de probă într-un punct din spaţiu, pentru a putea determina forţa ce acţionează asupra unui corp oarecare încărcat, aşezat într-un mod oarecare în acest punct? Pentru $k < 1$, să se găsească o situaţie posibilă în lumea imaginară dar complet diferită de tot ce apare în lumea noastră.

Distribuția cilindrică de sarcină.

1.21. Teorema pe care am demonstrat-o pentru cîmpul unei distribuții sferice simetrice, și anume că cîmpul în exterior este același cu cîmpul creat dacă întreaga sarcină s-ar afla în centru și cîmpul în interior este zero, poate fi demonstrată analog în cazul unei distribuții cilindrice simetrice, extinsă la infinit pe direcția axei — de exemplu, un tub lung încărcat.

Cîmpul unei sfere cu densitate de sarcină uniformă.

1.22. Să considerăm o distribuție sferică de sarcină cu densitatea constantă ρ_0 de la $r = 0$ pînă la $r = a$ și egală cu zero pentru $r > a$. Să se determine cîmpul electric pentru toate valorile lui r și pentru cele mai mici decît a și pentru cele mai mari decît a. Apare oare o discontinuitate a cîmpului, trecînd prin suprafața distribuției de sarcină, pentru $r = a$? Apare oare aceeași discontinuitate pentru $r = 0$?

Capitolul 2

Potențialul electric

2.1. Integrala de linie a cîmpului electric 54
2.2. Diferența de potențial și funcția de potențial 56
2.3. Gradientul unei funcții scalare 57
2.4. Obținerea cîmpului din potențial 59
2.5. Potențialul unei distribuții de sarcină 60
Potențialul a două sarcini punctiforme 60
Potențialul unui conductor lung (încărcat) 61
2.6. Disc uniform încărcat 62
2.7. Forța ce acționează asupra sarcinii superficiale 68
2.8. Energia unui cîmp electric 71
2.9. Divergența unei funcții vectoriale 73
2.10. Teorema lui Gauss și forma diferențială a legii lui Gauss 75
2.11. Divergența în coordonate carteziene 75
2.12. Laplaceanul 79
2.13. Ecuația lui Laplace 81
2.14. Deosebirea dintre fizică și matematică 82
2.15. Rotorul unei funcții vectoriale 83
2.16. Teorema lui Stokes 86
2.17. Rotorul în coordonate carteziene 86
2.18. Semnificația fizică a rotorului 89
Probleme 95

2.1. INTEGRALA DE LINIE A CÎMPULUI ELECTRIC

Presupunem că cîmpul unei distribuţii oarecare staţionare de sarcini electrice este **E**. Notăm cu P_1 şi P_2 două puncte oarecare în cîmp. Integrala de linie a lui **E** între cele două puncte pe un drum oarecare, ce uneşte P_1 cu P_2, este egală cu $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ (fig. 2.1). Asta înseamnă că: împărţim drumul în segmente mici, fiecare segment fiind reprezentat printr-un vector ce uneşte capetele sale; luăm produsul scalar dintre vectorul segmentului şi cîmpul **E** în acest loc; adunăm aceste produse pe tot drumul. Integrala, ca de obicei, este limita acestei sume cînd lungimea segmentelor devine din ce în ce mai mică şi numărul lor tinde spre infinit.

Să luăm un exemplu. Presupunem că avem un cîmp electric **E** ale cărei componente sînt $E_x = Ky$ şi $E_y = Kx$, unde K este o constantă. Aceasta este una din formele posibile ale unui cîmp electrostatic. (Vom învăţa curînd, cum poate fi acesta cu uşurinţă recunoscut.) În figura 2.2, *a* sînt reprezentate cîteva linii de cîmp. Care este valoarea integralei de linie **E**, între punctele A şi C, pe drumul ABC, de exemplu? Vectorul ce reprezintă un segment elementar este:

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}x + \hat{\mathbf{y}}\,\mathrm{d}y \qquad (1)$$

iar vectorul **E**, în acest caz, este

$$\mathbf{E} = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x) \qquad (2)$$

Pentru o porţiune elementară oarecare, produsul scalar este

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = K(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) \qquad (3)$$

Pe porţiunea de la A la B, $y = 2x$ şi $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$. Prin urmare,

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = K \int_A^B (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = K \int_0^1 (2x\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}x) = 4K \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 2K \qquad (4)$$

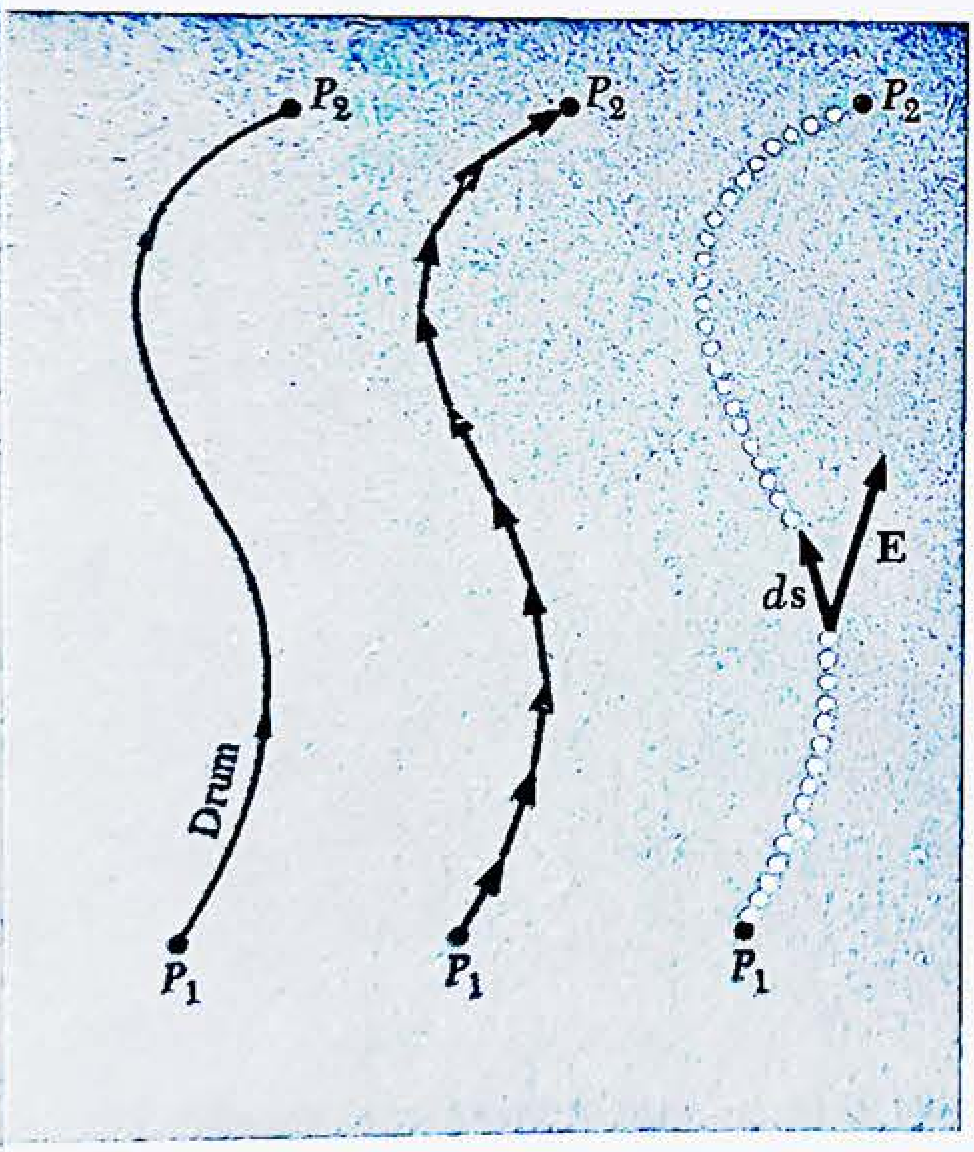


Fig. 2.1. Se indică împărţirea în segmente elementare $\mathrm{d}\vec{s}$.

Pe porţiunea de la B la C, $y = 2$ şi $dy = 0$.

$$\int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K \int_B^C (y\,dx + x\,dy) =$$

$$= K \int_1^2 2\,dx = 2K \qquad (5)$$

Prin urmare, integrala de linie pe drumul ABC este $2K + 2K$ adică $4K$.

Cîmpul electric al unei sarcini punctiforme este radial şi mărimea lui depinde doar de raza r. Dacă P_1 şi P_2 sînt două puncte oarecare în cîmpul unei sarcini punctiforme, este destul de evident că integrala de linie a lui $\mathbf{E}$ este aceeaşi indiferent de forma drumului ce uneşte aceste puncte. Aceasta rezultă direct din demonstraţia folosită în § 1.5 şi ilustrată în figura 1.5, pentru obţinerea lucrului mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini într-un cîmp central de forţe. De fapt, singura diferenţă între integrala de linie a forţei $\mathbf{F}$ exercitate asupra sarcinii de probă q şi integrala de linie a lui $\mathbf{E}$ — cîmpul în care se mişcă sarcina de probă — este factorul q. Orice cîmp electrostatic reprezintă, pur şi simplu, o suprapunere a cîmpurilor produse de anumite sarcini, aşa cum reiese din ecuaţiile 1.14 şi 1.15. Prin urmare, în orice asemenea cîmp, integrala de linie a lui $\mathbf{E}$ — cîmpul total creat de toate sursele — nu trebuie să depindă de drum:

> $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ are aceeaşi valoare pentru oricare din drumurile ce unesc punctele P_1 cu P_2 dintr-un cîmp electrostatic.

Ca exemplu, să calculăm integrala de linie de la A la C (fig. 2.2, c), pe drumul dintre punctele (2, 0), cîmpul $\mathbf{E}$ fiind acelaşi ca în cazul precedent. Pe prima porţiune, pe axa x între origine şi $x = 2$, cîmpul este perpendicular pe deplasare astfel încît produsul $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ este zero. Pe a doua porţiune $E_y = Kx = 2K$ şi lungimea acestui

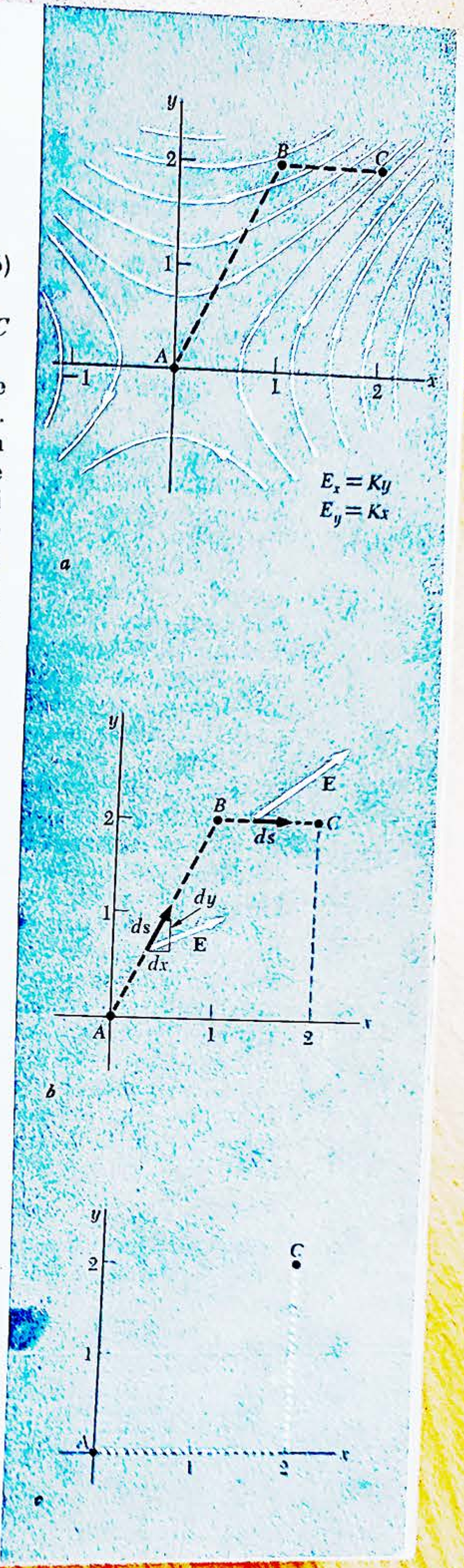


Fig. 2.2. *(a)* Un drum particular ABC în cîmpul electric. $E_x = Ky$, $E_y = Kx$. Sînt reprezentate cîteva linii de cîmp. *(b)* Calculul integralei de linie $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ pe acest drum (v. ec. 3—5). *(c)* Un alt drum între aceleaşi puncte.

drum este egală cu 2 unități. Astfel, obținem pentru integrala de linie, aceeași valoare ca mai înainte, $4K$. De fapt, știind că integrala de linie trebuie să fie independentă de drum, nu are sens s-o calculăm pentru un drum de forma ABC. În practică nu va trebui să calculăm prea des valoarea unei integrale de linie. Scopul urmărit în exemplu este clarificarea noțiunii de integrală de linie.

2.2. DIFERENȚA DE POTENȚIAL ȘI FUNCȚIA DE POTENȚIAL

Întrucît integrala de linie în cîmpul electrostatic este independentă de drum, putem defini o mărime scalară φ_{21}, în modul următor:

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{7}$$

Atunci, φ_{21} este *lucrul mecanic pe unitatea de sarcină* pentru a deplasa o sarcină pozitivă în cîmpul **E**, din punctul P_1 în punctul P_2. Înseamnă că φ_{21} este o funcție scalară univocă de cele două poziții P_1 și P_2, pe care o denumim *diferența de potențial* electric dintre cele două puncte.

În sistemul de unități internațional (SI) diferența de potențial se măsoară în volți*.

Pentru a deplasa o sarcină de 1 coulomb între două puncte cu diferența de potențial egală cu 1 volt se efectuează un lucru mecanic de 1 joule (10^7 ergi).

Să presupunem că-l fixăm pe P_1. Atunci φ_{21} depinde doar de P_2, adică este funcție de coordonatele de poziție x, y, z. Ținînd cont de modul cum l-am determinat pe P_1, putem scrie funcția simplu, fără indici $\varphi(x, y, z)$. Spunem că funcția φ este *potențialul* asociat cîmpului vectorial **E**. Este o funcție scalară de poziție sau un cîmp scalar (ceea ce este același lucru). Valoarea ei într-un punct este un număr (exprimat în unități de lucru mecanic pe unitatea de sarcină) și nu i se asociază nici o direcție. Dacă cîmpul vectorial **E** este dat, funcția de potențial este determinată pînă la o constantă aditivă ce apare datorită alegerii arbitrare a lui P_1.

Ca exemplu, să găsim potențialul asociat cîmpului electric descris în figura 2.2. Este convenabil să amplasăm punctul P_1 în origine, notată în figura 2.2 cu A. Pentru a calcula

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{8}$$

din acest punct de referință și pînă la un punct oarecare (x, y) este mai ușor de ales segmentul punctat din figura 2.2, *c*:

$$\varphi(x, y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} E_x\, dx - \int_{(0,0)}^{(x,y)} E_y\, dy. \tag{9}$$

* Ca și coulombul, amperul și ohmul, voltul era folosit ca unitate „practică" de măsură cu mult înainte de a fi pus la punct sistemul internațional complet al unităților electrice de măsură.

Aşa cum s-a mai amintit, prima integrală este nulă, întrucît în acest cîmp, componenta E_x este zero pe axa x. A doua integrală se rezolvă pentru x constant şi întrucît $E_y = Kx$, integrala devine

$$-Kx\int_0^y dy \tag{10}$$

a cărei valoare este $-Kxy$. Prin urmare, pentru acest cîmp, potenţialul este

$$\varphi = -Kxy \tag{11}$$

Se poate adăuga orice constantă. Ea indică doar faptul că punctul de referinţă în care potenţialul este zero, a fost mutat în altă parte.

Trebuie să fim atenţi să nu confundăm *potenţialul* φ asociat unui cîmp dat **E** cu *energia potenţială* a unui sistem de sarcini. Energia potenţială a unui sistem de sarcini este lucrul mecanic total efectuat pentru a forma sistemul. De exemplu, în ecuaţia 1.8, am exprimat energia potenţială U a sistemului de sarcini din figura 1.6. Potenţialul electric $\varphi(x, y, z)$ asociat cîmpului din figura 1.6 va fi lucrul mecanic pe unitatea de sarcină efectuat pentru a aduce unitatea de sarcină de probă pozitivă de la infinit în punctul (x, y, z) în cîmpul acestui sistem de opt sarcini.

2.3. GRADIENTUL UNEI FUNCŢII SCALARE

Fiind dat cîmpul electric putem găsi funcţia de potenţial electric. Dar putem proceda şi invers, cunoscînd potenţialul putem determina cîmpul. Din ecuaţia (7) se vede că cîmpul, într-un anumit sens, este *derivata* funcţiei potenţiale. Pentru a preciza această idee, introducem *gradientul* unei funcţii scalare de poziţie. Fie $f(x, y, z)$ o funcţie oarecare de coordonate, continuă şi diferenţiabilă. Cu ajutorul derivatelor ei parţiale $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ şi $\partial f/\partial z$ putem construi în fiecare punct din spaţiu un vector, ale cărui componente x, y, z să fie egale cu derivatele parţiale respective*. Acest vector îl numim *gradientul* lui f — grad f, sau ∇f.

$$\boxed{\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{12}$$

* Amintim cititorului că derivata parţială a funcţiei $f(x, y, z)$ în raport cu x, $\partial f/\partial x$, reprezintă viteza de variaţie a funcţiei cînd x variază, celelalte variabile y şi z fiind menţinute constante. Mai precis

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

De exemplu, dacă $f = x^2 yz^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2.$$

∇f este un vector care determină variaţia funcţiei f în jurul unui punct. Componenta pe x a acestuia, este derivata parţială a lui f în raport cu x care măsoară viteza de variaţie a lui f pe direcţia lui x. Direcţia vectorului ∇f într-un punct oarecare este direcţia de mişcare, pornind de la acest punct, pentru creşterea cea mai rapidă a funcţiei f. Presupunem că avem de-a face cu o funcţie de două variabile x şi y, astfel încît funcţia să poată fi reprezentată în sistemul tridimensional printr-o suprafaţă. Stînd într-un punct oarecare pe această suprafaţă, vedem că în unele direcţii suprafaţa este mai ridicată, în altele mai coborîtă. Există o direcţie, în care dacă facem un mic pas, ne ridicăm mai sus decît dacă am face un pas de aceeaşi mărime, în oricare altă direcţie. Gradientul funcţiei este un vector, a cărui direcţie coincide cu cea mai mare curbură şi a cărui mărime este egală cu panta măsurată în această direcţie.

Figura 2.3 ne ajută să ne reprezentăm cele afirmate. Să luăm o funcţie oarecare de două coordonate x şi y, reprezentată prin suprafaţa $f(x, y)$ din figura 2.3, *a*. În punctul (x_1, y_1), suprafaţa este mai ridicată în direcţia ce face un unghi de aproximativ 80° cu sensul pozitiv al axei x. Gradientul funcţiei $f(x, y)$, ∇f, este o funcţie vectorială de x şi y. Modul de distribuţie a gradientului este indicat în figura 2.3, *b*, printr-un

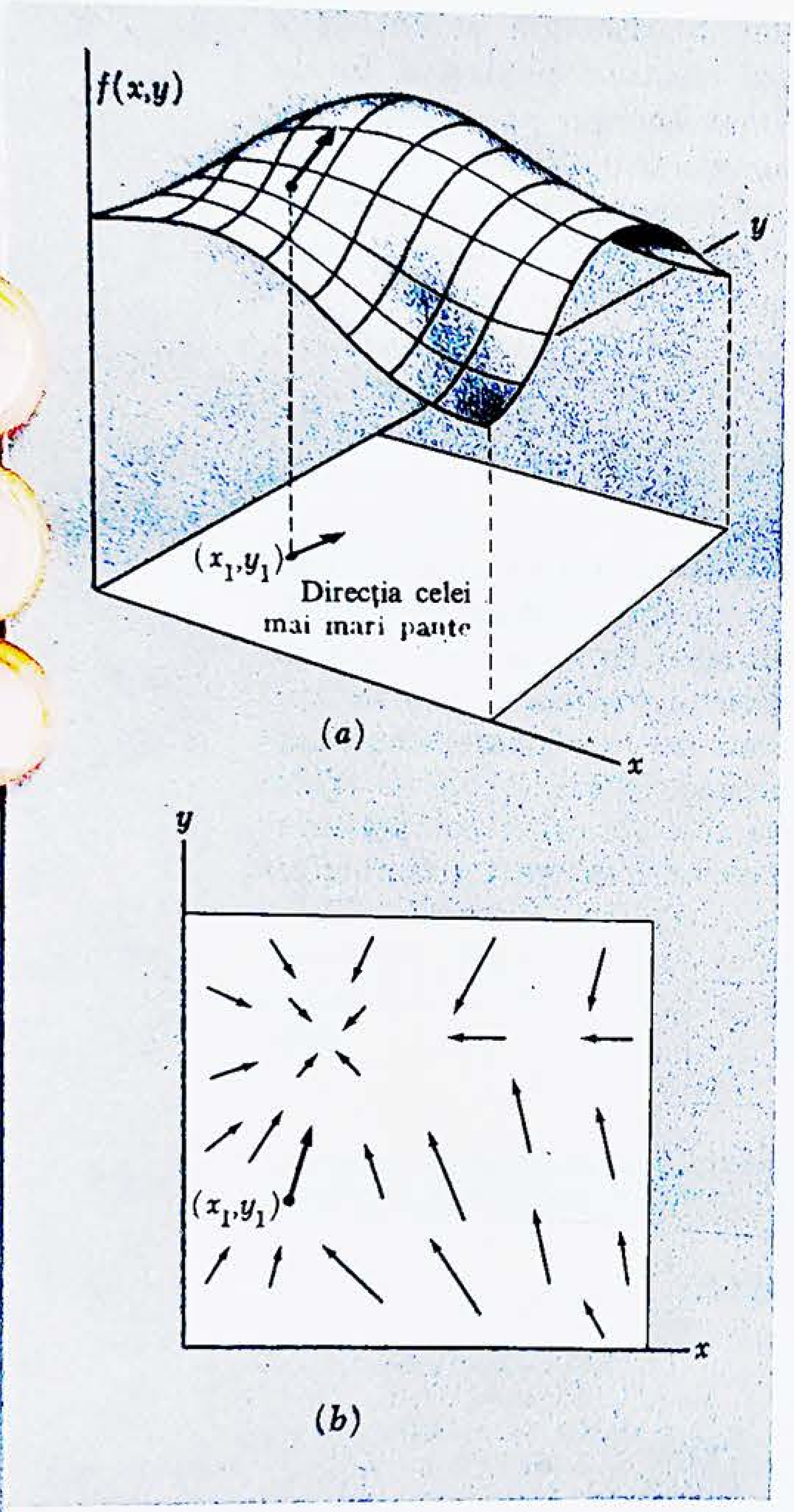
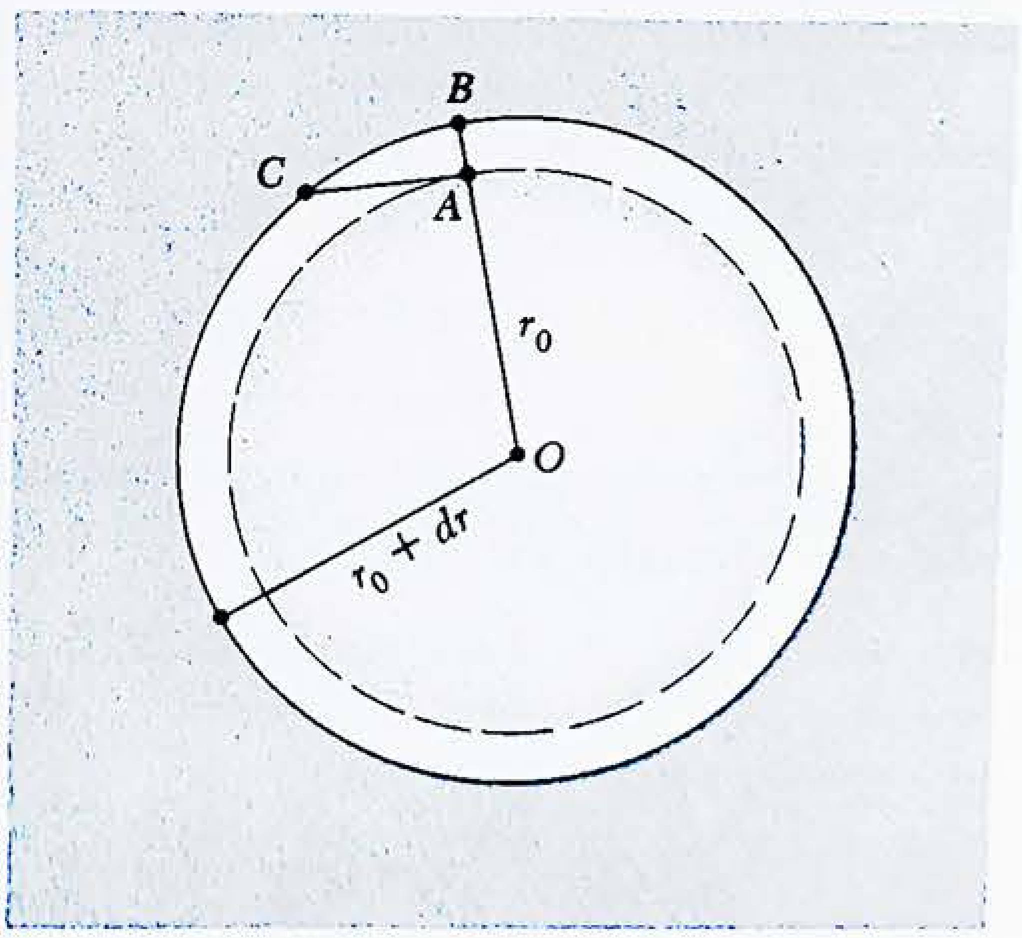


Fig. 2.3. Funcţia scalară $f(x, y)$ este reprezentată printr-o suprafaţă *(a)*. Săgeţile din *(b)* reprezintă funcţia vectorială grad f.

Fig. 2.4. Dacă f este funcţie numai de r, drumul cel mai scurt, pentru o variaţie dată a lui f, este pe direcţia razei.



număr de vectori, în diferitele puncte ale spațiului bidimensional, care include și punctul (x_1, y_1). Funcția vectorială ∇f, definită în ecuația (12) este, pur și simplu, o extindere a acestei idei la spațiul tridimensional. (Trebuie să fim atenți să nu confundăm figura 2.3, *a* cu spațiul real tridimensional x, y, z; aici, a treia coordonată este valoarea funcției $f(x, y)$).

Ca exemplu de funcție în spațiul tridimensional, să presupunem că funcția f depinde doar de r, unde r este distanța de la un punct fix oarecare O. Pe sfera cu centrul în O și de rază r_0 și $f = f(r_0)$ este constantă. Pe o sferă puțin mai mare, de rază $r_0 + dr$, ea este de asemenea constantă și are valoarea $f(r_0 + dr)$. Dacă vrem să trecem de la $f(r_0)$ la $f(r_0 + dr)$, drumul cel mai scurt este pe direcția razei (de la A la B) și nu de la A la C (fig. 2.4). „Panta" lui f este cea mai mare pe direcția razei, astfel încît ∇f în orice punct este un vector radial. De fapt $\nabla f = \hat{\mathbf{r}}(df/dr)$, $\hat{\mathbf{r}}$ reprezentînd în acest caz, pentru orice punct, un vector unitar pe direcția razei.

2.4. OBȚINEREA CÎMPULUI DIN POTENȚIAL

Acum este ușor de văzut că relația dintre funcția scalară f și funcția vectorială ∇f este similară, cu excepția semnului minus, cu relația dintre potențialul φ și cîmpul $\mathbf{E}$. Să luăm valoarea lui φ în două puncte apropiate (x, y, z) și $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Variația lui φ, trecînd de la primul punct în al doilea, este

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \tag{13}$$

Pe de altă parte, pornind de la definirea lui φ, variația mai poate fi exprimată ca

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{14}$$

Vectorul deplasare infinitezimală ds este $\hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy + \hat{\mathbf{z}}\,dz$. Astfel, dacă identificăm $\mathbf{E}$ cu $-\nabla\varphi$, ecuațiile (13) și (14) devin identice. Ca urmare, cîmpul electric este egal cu minus gradientul potențialului:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi} \tag{15}$$

Semnul minus arată că cîmpul electric este îndreptat dinspre regiunea cu potențial pozitiv înspre regiunea cu potențial negativ. Direcția vectorului $\nabla\varphi$ este în direcția creșterii lui φ. Pentru clarificare, să ne întoarcem la exemplul cîmpului din figura 2.2. Din potențialul dat de ecuația (11), $\varphi = -Kxy$, putem găsi cîmpul electric de la care am plecat:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x). \tag{16}$$

2.5. POTENŢIALUL UNEI DISTRIBUŢII DE SARCINĂ

Cunoaştem potenţialul în cazul unei sarcini punctiforme singulare, întrucît am calculat lucrul mecanic necesar pentru a aduce o sarcină în apropierea alteia (cap. I, ec. 3). Potenţialul, în oricare punct, în cîmpul unei sarcini punctiforme izolate q, este $q/4\pi\varepsilon_0 r$, unde r este distanţa de la punctul respectiv pînă la sursa q, dacă se consideră că potenţialul punctelor infinit depărtate de sursă este zero.

Principiul superpoziţiei trebuie să fie valabil şi în cazul potenţialelor, ca şi pentru cîmpuri. Dacă există cîteva surse, funcţia de potenţial este, pur şi simplu, suma funcţiilor de potenţial ale fiecărei surse luate aparte, pleclnd de la faptul că stabilim un potenţial zero unic. Dacă toate sursele sînt conţinute într-o regiune finită, oarecare, este întotdeauna posibil şi adeseori cel mai simplu, să considerăm potenţialul zero la infinit. Dacă adoptăm această regulă, potenţialul oricărei distribuţii de sarcină poate fi exprimat prin integrala:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\substack{pe\ toate \\ sursele}} \frac{\rho(x',\ y',\ z')\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'}{r} \tag{17}$$

unde r este distanţa de la elementul de volum $\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\ \mathrm{d}z'$ la punctul $(x,\ y,\ z)$ în care urmează să se calculeze potenţialul (fig. 2.5). Înseamnă că $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. Observaţi diferenţa dintre această integrală şi integrala care dă cîmpul electric al distribuţiei de sarcină (ec. 1.15). Aici, la numitor apare r şi nu r^2 şi integrala este un scalar nu un vector. Din funcţia scalară de potenţial $\varphi(x,\ y,\ z)$ putem oricînd găsi cîmpul electric luînd gradientul lui φ cu semnul minus, conform ecuaţiei (15).

Potenţialul a două sarcini punctiforme

Să luăm cel mai simplu exemplu — potenţialul a două sarcini punctiforme ca în figura 2.6. O sarcină pozitivă de 12 unităţi de sarcină se află la 3 cm de o sarcină negativă de —6 unităţi. Potenţialul în oricare punct din spaţiu este suma potenţialelor produse de fiecare sarcină în parte. Potenţialele, pentru cîteva puncte alese în spaţiu, sînt redate în figură. Nu avem o sumă vectorială ci doar adunarea algebrică de mărimi scalare. De exemplu, în punctul aflat în dreapta, la 6 cm depărtare de sarcina pozitivă şi 5 cm de sarcina negativă, potenţialul are valoarea 240 V. La infinit valoarea potenţialului tinde către zero. Pentru a aduce unitatea de sarcină pozitivă

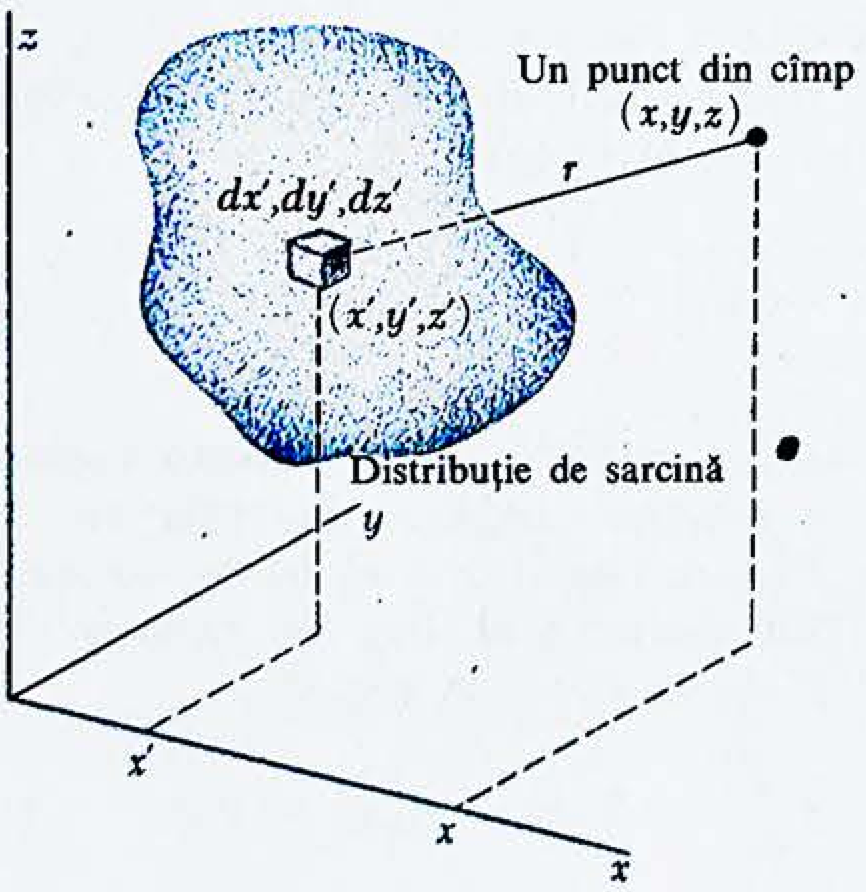
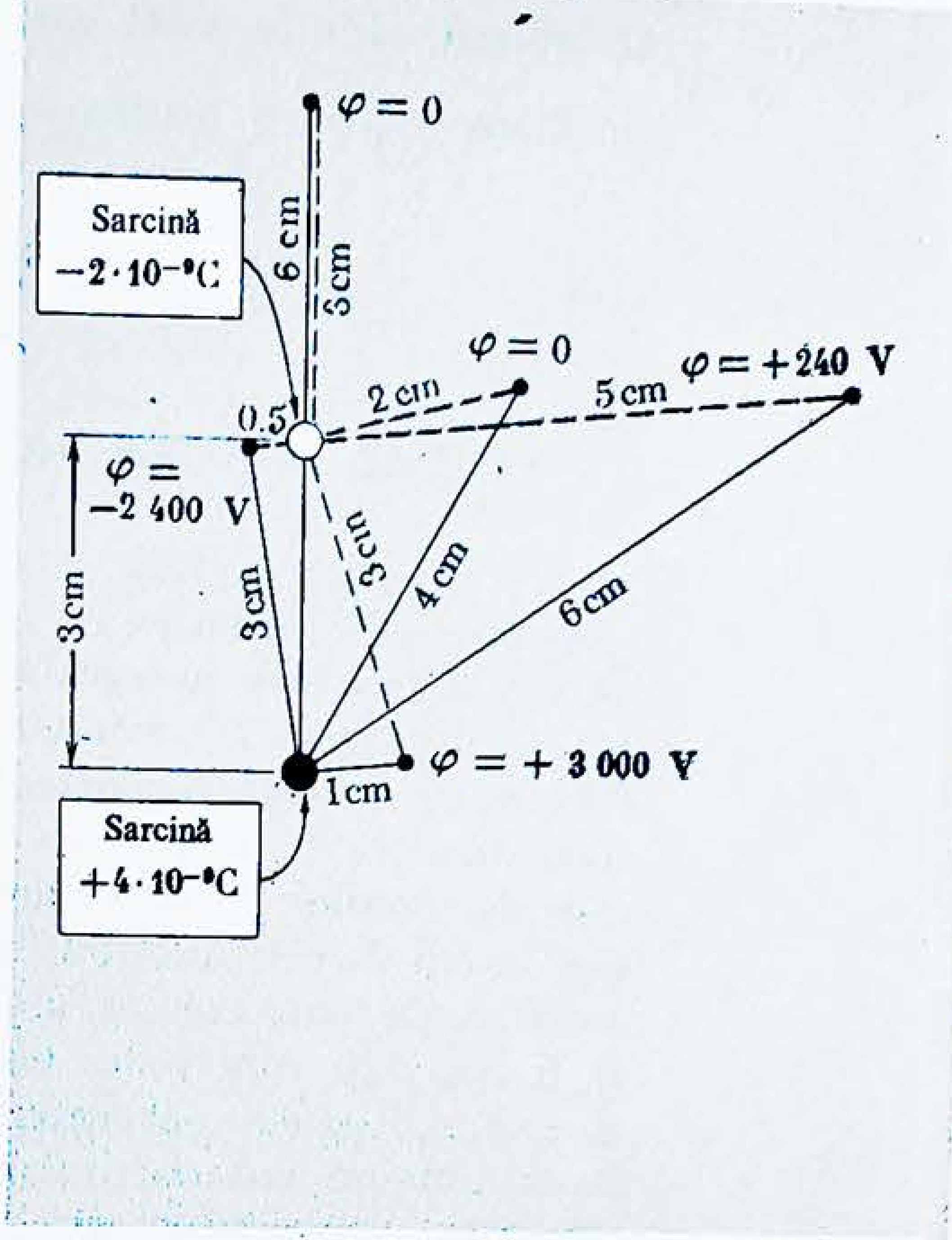


Fig. 2.5. Fiecare element al distribuţiei de sarcină $\rho(x',\ y',\ z')$ contribuie la potenţialul φ din punctul $(x,\ y,\ z)$. Potenţialul în acest punct este suma tuturor acestor contribuţii (ec. 17).

Fig. 2.6. Potențialul electric φ în diferitele puncte ale sistemului de două sarcini punctiforme. φ tinde către zero la infinit. φ este dat în volți.



de la infinit într-un punct unde $\varphi = 240$ V se efectuează un lucru mecanic de 240 J. Observați că două puncte din figură au $\varphi = 0$. Lucrul mecanic efectuat pentru aducerea oricărei sarcini într-unul din aceste puncte este zero. Se poate vedea că există un număr infinit de asemenea puncte care formează o suprafață ce cuprinde sarcina negativă. De fapt, locul geometric al punctelor ce au o anumită valoare φ este o suprafață, numită *suprafață echipotențială* care poate fi reprezentată, în spațiul bidimensional, printr-o curbă.

Potențialul unui conductor lung (încărcat)

În folosirea ecuației (17) se impune o restricție: ea este valabilă numai în cazurile în care toate sursele sînt distribuite într-o regiune finită din spațiu. Cazul unui conductor lung încărcat, al cărui cîmp **E** a fost studiat în paragraful 1.12, este unul din exemplele simple care scoate în evidență dificultățile ce apar în cazul unei distribuții infinite de sarcină. Dacă în acest sistem, luăm potențialul punctelor îndepărtate zero și efectuăm integrarea indicată în ecuația (15) asupra distribuției de sarcină, găsim că integrala este divergentă — obținem un rezultat infinit de mare. Acest rezultat era de așteptat întrucît, în acest caz, „infinitul" (adică spațiul aflat foarte departe de regiunea în care dorim să definim funcția potențială) cuprinde nu numai punctele îndepărtate de conductor dar și o bună parte din conductorul propriu zis! În găsirea cîmpului electric al conductorului infinit lung nu apar asemenea dificultăți deoarece contribuția elementelor distribuției liniare de sarcină la cîmp scade rapid cu distanța. Evident că, într-un sistem de sarcini distribuite la infinit, este mai bine să se localizeze potențialul zero undeva mai aproape. În acest caz, rămîne doar să calculăm diferența de potențial φ_{21}, dintre un punct oarecare (x, y, z) și punctul de referință ales, folosind relația fundamentală (17).

Pentru a vedea cum se aplică acest lucru în cazul unui conductor infinit lung încărcat, să alegem punctul de referință P_1 la distanța r_1 de conductor. Pentru a deplasa o sarcină din P_1 într-un alt punct P_2 aflat la distanța r_2, lucrul mecanic efectuat pe unitatea de sarcină este

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\lambda}{r}\right) dr = -\frac{\lambda \ln r_2}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\lambda \ln r_1}{2\pi\varepsilon_0}. \qquad (18)$$

Asta înseamnă că potențialul electric al conductorului încărcat este de forma

$$\varphi = -\frac{\lambda \ln r}{2\pi\varepsilon_0} + \text{const.} \qquad (19)$$

Constanta, care în acest caz este $\frac{\lambda \ln r_1}{2\pi\varepsilon_0}$, nu joacă nici un rol atunci cînd calculăm — grad φ pentru a obține cîmpul **E**. În acest caz

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\lambda\hat{\mathbf{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{20}$$

2.6. DISC UNIFORM ÎNCĂRCAT

Ca exemplu concret, să studiem potențialul și cîmpul electric din jurul unui disc uniform încărcat. Această distribuție de sarcină este asemănătoare cu cea studiată în paragraful 1.10, numai că este limitată. Discul plan de rază a, din figura 2.7, este încărcat pozitiv sarcina fiind distribuită, pe suprafața sa, cu densitatea constantă σ exprimată în C/m^2. (Acesta este un singur strat de sarcină, de grosime infinitezimală și nu două straturi pe cele două fețe ale discului. Prin urmare, sarcina totală a sistemului este $\pi a^2\sigma$). Vom mai întîlni deseori distribuții superficiale de sarcină, mai ales pe conductori metalici. Cu toate acestea, obiectul descris de noi nu este un conductor. Dacă ar fi așa, cum vom vedea imediat, sarcina n-ar rămîne distribuită uniform, ci s-ar redistribui concentrîndu-se la marginea discului. Discul ales este făcut dintr-un material izolant, de exemplu — material plastic, pe care sarcina este „pulverizată" astfel încît fiecare centimetru pătrat al discului păstrează aceeași cantitate de sarcină.

Să începem prin a determina potențialul într-un punct oarecare P_1, aflat pe axa de simetrie, pe care în cazul nostru am ales-o ca fiind axa y. Toate elementele de sarcină, cuprinse într-un segment subțire inelar al discului, se găsesc la aceeași distanță de punctul P_1. Dacă raza unui asemenea segment inelar este s și lățimea lui ds, suprafața segmentului este $2\pi s\,ds$. Prin urmare, sarcina dq pe care o conține este $dq = \sigma\cdot 2\pi s ds$. Toate porțiunile din acest inel se găsesc la aceeași distanță de P_1 egală cu $r = \sqrt{y^2+s^2}$, astfel încît contribuția inelului la potențialul din punctul P_1 este $dq/4\pi\varepsilon_0 r$ sau $2\pi\sigma s ds/\sqrt{y^2+s^2}$. Pentru a găsi potențialul creat de discul întreg trebuie să integrăm asupra tuturor segmentelor inelare:

$$\varphi(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{2\pi\sigma s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}} =$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+s^2}\right]_{s=0}^{s=a}. \tag{21}$$

Integrala este simplă, făcînd substituția $u = y^2 + s^2$ ea devine $\int u^{-1/2}du$.

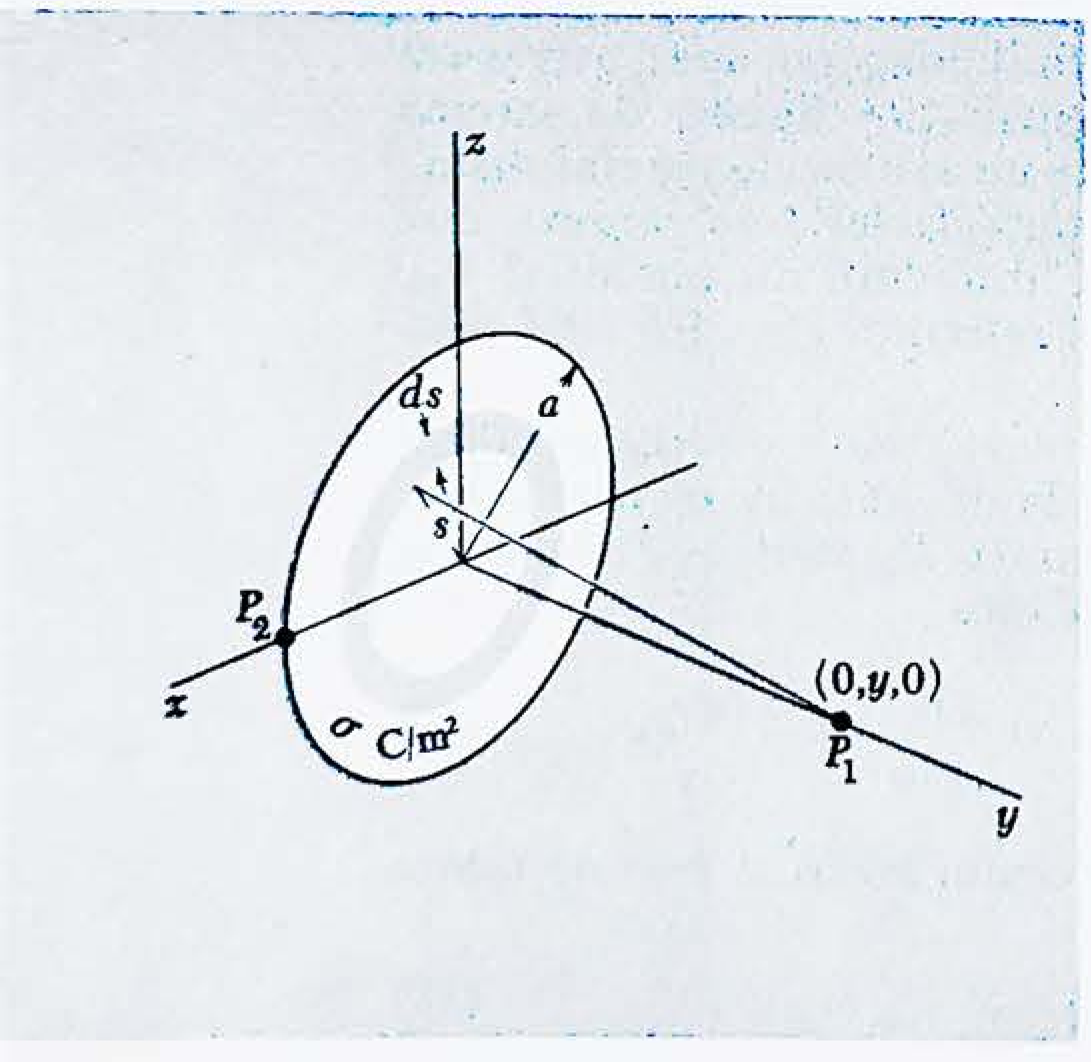


Fig. 2.7. Calculul potențialului în punctul P_1 aflat pe axa unui disc electrizat uniform.

Inlocuind cu limitele, obținem:

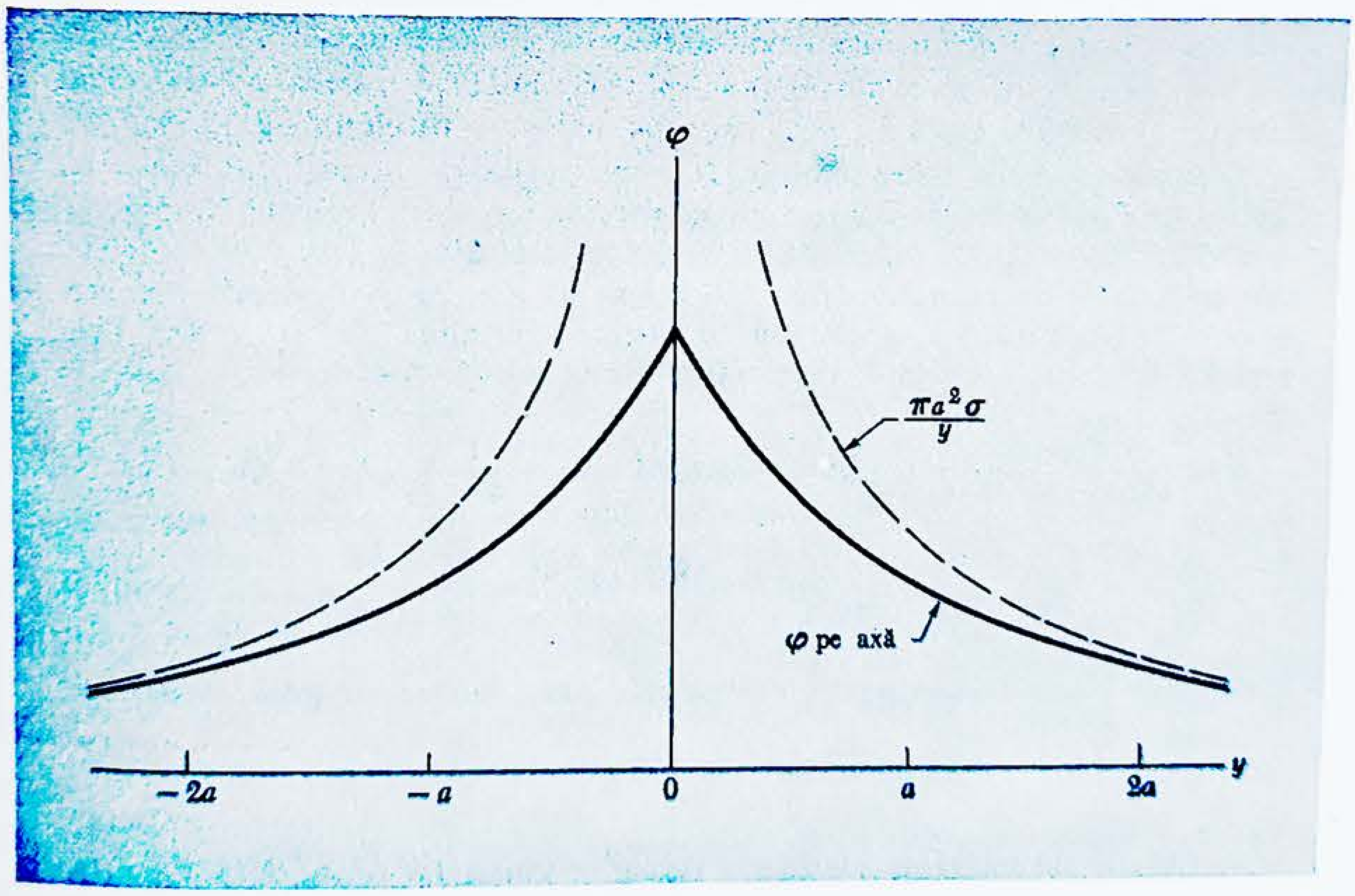
$$\varphi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}[\sqrt{y^2 + a^2} - y] \text{ pentru } y > 0. \quad (22)$$

Mai trebuie precizat că rezultatul exprimat de ecuația (22) este valabil pentru toate punctele aflate pe axa y pozitivă. Pe baza simetriei fizice a sistemului (nu există nici o diferență între cele două fețe ale discului) este evident că valoarea potențialului este aceeași și pentru axa y negativă și pentru cea pozitivă; acest lucru reiese clar din ecuația (21) exprimată numai în funcție de y^2. Scriind, însă, ecuația (22) am ales semnul cînd am calculat rădăcina pătrată din y^2 și ca urmare această ecuație este valabilă numai pentru axa y pozitivă. Expresia corectă pentru $y < 0$ se obține alegînd altfel semnul și este

$$\varphi(0, y, 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}[\sqrt{y^2 + a^2} + y] \text{ pentru } y < 0. \quad (23)$$

Avînd în vedere acest lucru, nu trebuie să ne surprindă găsirea unei singularități în $\varphi(0, y, 0)$ pentru $y = 0$. Așa cum se vede în figura 2.8, în care potențialul este reprezentat în funcție de y, panta funcției variază brusc. Potențialul în centrul discului este $\varphi(0, 0, 0) = 2\pi\sigma a$. Aceasta este valoarea lucrului mecanic efectuat prin aducerea unității de sarcină pozitive de la infinit în centrul discului, indiferent de drum.

Fig. 2.8. Graficul potențialului pe axă. Curba punctată reprezintă potențialul unei sarcini punctiforme $q = \pi a^2\sigma$.



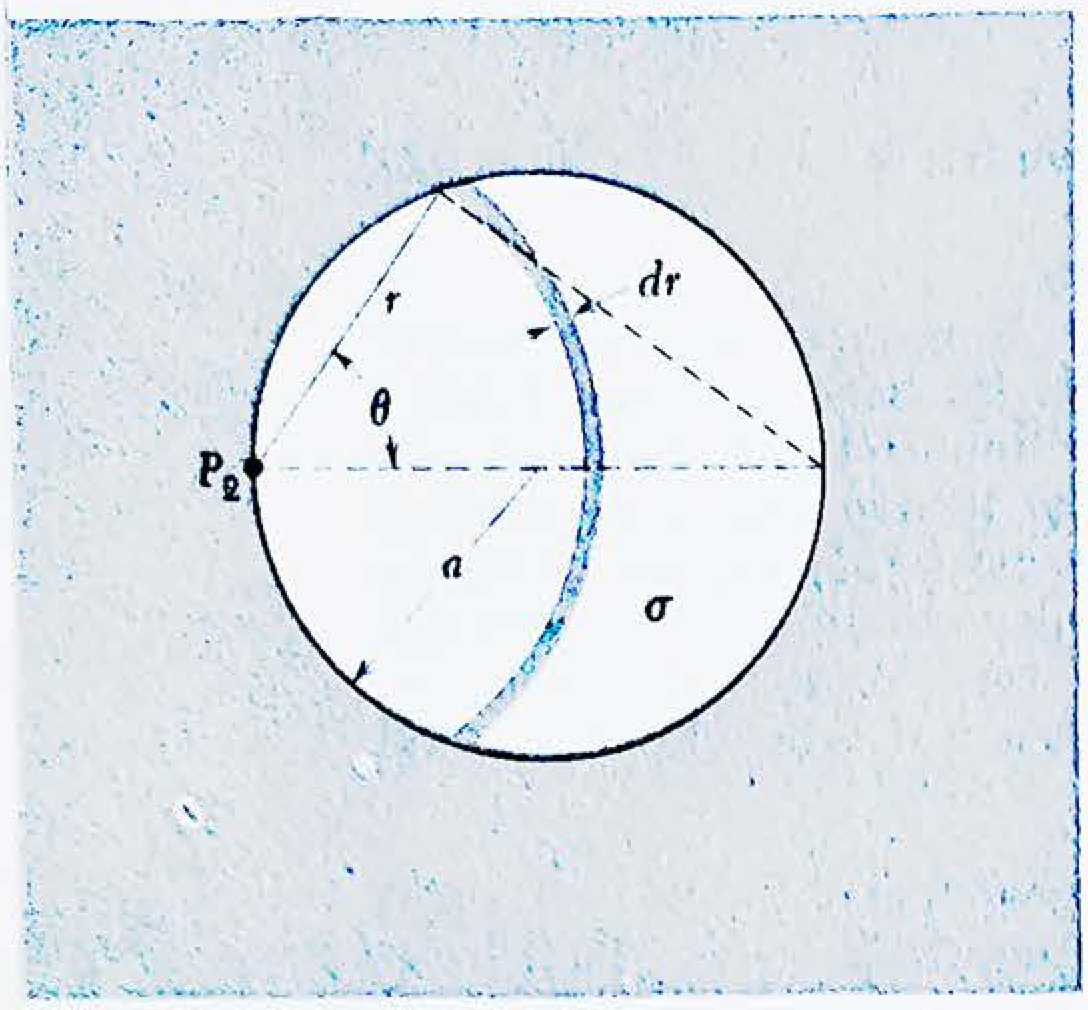


Fig. 2.9. Determinarea potențialului în punctul P_2 de pe marginea discului electrizat uniform.

Este interesantă comportarea funcției $\varphi(0, y, 0)$ pentru valori foarte mari ale lui y. Pentru $y \gg a$, ecuația (22) poate fi aproximată în modul următor:

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y\left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1\right] =$$

$$= y\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) \ldots - 1\right] \approx \frac{a^2}{2y} \qquad (24)$$

Prin urmare

$$\varphi(0, y, 0) \approx \frac{\pi a^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 y} \text{ pentru } y \gg a \qquad (25)$$

Întrucît $\pi a^2 \sigma$ este egală cu sarcina totală q de pe disc, ecuația (25) reprezintă potențialul produs de o sarcină punctiformă avînd această mărime. La o distanță considerabilă față de disc, (în raport cu diametrul), după cum este și de așteptat, nu contează prea mult forma sarcinii. În primă aproximație contează doar sarcina totală. Curba punctată din figura 2.8 reprezintă funcția $\pi a^2 \sigma / y$. Se vede că funcția potențială pe axă se apropie destul de repede de asimptotele ei. Găsirea potențialului pentru punctele aflate la o distanță oarecare de axa de simetrie, nu este chiar atît de simplă deoarece se ajunge la calculul unei *integrale eliptice*. Aceste funcții sînt bine cunoscute și tabelate*, dar aici nu este cazul să intrăm în amănunte.

Vom efectua un calcul destul de simplu care poate fi instructiv. Calculăm potențialul într-un punct P_2 aflat chiar pe marginea discului (fig. 2.9).

Pentru a calcula potențialul în P_2 vom considera un segment inelar cu centrul în P_2. Din figura 2.9 se vede că sarcina pe acest segment este $dq = \sigma 2r\theta dr$. Contribuția segmentului la potențialul din P_2 este $dq/r = 2\sigma\theta dr$. Din triunghiul dreptunghic (fig. 2.9) reiese că $r = 2a\cos\theta$ și prin urmare, $dr = -2a \sin\theta\, d\theta$. În acest fel θ devine variabila de integrare. Prin variația lui θ de la $\pi/2$ la 0, cuprindem discul întreg. Astfel:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{0} 2\sigma\theta(-2a \sin\theta\, d\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} 4\sigma a\, \theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\left[\sin\theta - \theta\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0} \qquad (26)$$

(Integrala $\int \theta \sin\theta\, d\theta$ se poate efectua prin părți sau putem folosi rezolvarea precedentă)

* Ele au fost date în vol. I la studiul riguros al pendulului simplu (v. vol.I, cap.7).

Comparînd acest rezultat cu $\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$ – potenţialul din centrul discului, observăm, aşa cum era şi de aşteptat, că potenţialul scade de la centrul discului în spre marginea sa. Prin urmare, cîmpul electric trebuie să aibă o componentă în planul discului şi îndreptată spre exterior. Iată de ce, aşa cum am mai amintit, sarcina liberă se va redistribui spre marginea discului. Cu alte cuvinte, discul uniform încărcat nu este o suprafaţă de potenţial constant, aşa cum ar trebui să fie orice suprafaţă conductoare, pe care sarcina este în repaus*.

Cîmpul electric pe axa de simetrie poate fi calculat direct din funcţia potenţială

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2}-y\right] \tag{27}$$

de unde

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right] \quad \text{pentru } y > 0 \tag{28}$$

(Nu este prea dificil de calculat E_y direct din distribuţia de sarcină de pe axă.)

Cînd y tinde spre zero dinspre partea pozitivă, componenta E_y tinde spre $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Pe cealaltă faţă a discului, din cealaltă direcţie a axei y, cîmpul $\mathbf{E}$ are sens invers şi componenta $E_y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Aceasta este valoarea cîmpului unui strat infinit încărcat, de densitate σ, pe care am obţinut-o în paragraful 1.10. Aceasta era de aşteptat, întrucît pentru punctele din centrul discului, prezenţa sau absenţa sarcinii de pe margine, nu are prea mare influenţă. Cu alte cuvinte, orice strat privit de aproape devine infinit. Într-adevăr, componenta E_y are valoarea $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ nu numai în centru ci pe toată suprafaţa discului. Pentru a demonstra aceasta putem folosi legea lui Gauss mai eficient ca în paragraful 1.10, dar trebuie să fim prudenţi întrucît cîmpul electric total într-un punct oarecare pe disc, nu este perpendicular pe planul discului. Să considerăm o porţiune oarecare de pe disc, de suprafaţă A, înconjurată de o cutie cu pereţi subţiri, ca în figura 2.10.

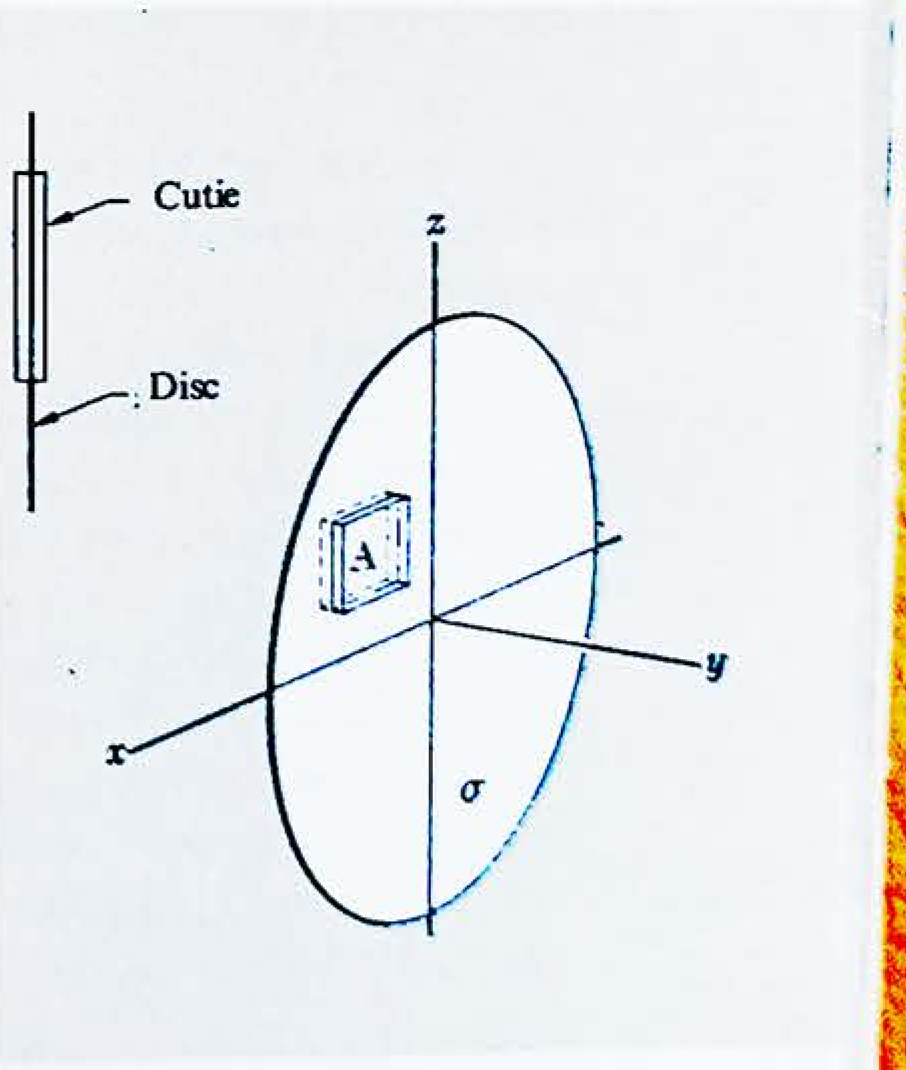


Fig. 2.10. Aplicarea legii lui Gauss la un disc încărcat.

* În capitolul 3 se va discuta mai amănunţit de ce suprafeţele conductoare trebuie să fie echipotenţiale.

Fie E_{y+} componenta pe y a cîmpului produs de sarcina superficială de pe fața anterioară și cu E_y componenta pe y a cîmpului pe fața posterioară. Fluxul dinspre cutie spre exterior este

$$\Phi = AE_{y+} - AE_{y-} + (\text{fluxul prin fețele laterale ale cutiei}) \tag{29}$$

Al doilea termen se ia cu semnul minus, deoarece vectorul ce reprezintă suprafața posterioară a cutiei este în sensul negativ al axei y. Fluxul prin fața laterală a cutiei poate fi micșorat oricît de mult, prin comprimarea cutiei*. Asta nu schimbă sarcina cuprinsă în ea, care rămîne σA. Conform legii lui Gauss, la limită

$$AE_{y+} - AE_{y-} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \tag{30}$$

sau

$$E_{y+} - E_{y-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{31}$$

Rezultatul ecuației (31) este general valabil pentru *orice* distribuție superficială de sarcină, uniformă sau nu: dacă σ este densitatea locală a sarcinii superficiale există, în acest loc, o variație bruscă sau o discontinuitate a componentei cîmpului electric perpendicular pe strat. Mărimea cu care variază este $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. În cazul nostru, σ este constant pe disc. De asemenea, deoarece cîmpurile pe cele două fețe ale discului sînt simetrice și alte surse de cîmp nu există, $E_{y+} = -E_{y-}$, astfel încît $E_{y+} = |E_{y-}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ pe tot discul.

În figura 2.11 sînt reprezentate cîteva linii de cîmp pentru acest sistem și de asemenea, punctat sînt reprezentate intersecțiile planului yz cu suprafețele de potențial constant. În apropierea centrului discului, acestea au formă de lentilă, iar la distanțe mult mai mari decît a ele se apropie de forma sferică a suprafețelor echipotențiale din jurul unei sarcini punctiforme.

Figura 2.11 ilustrează o proprietate generală a liniilor de cîmp și a suprafețelor echipotențiale. Linia de cîmp printr-un punct oarecare și suprafața echipotențială ce trece prin acel punct sînt *perpendiculare una pe alta*, la fel ca pe o hartă în relief a unui teren deluros, cea mai mare pantă se vede sub un unghi drept față de un contur de înălțime constantă. Așa și trebuie să fie, deoarece dacă cîmpul într-un punct oarecare ar avea o componentă paralelă la suprafața echipotențială prin acel punct, ar trebui să se efectueze un lucru mecanic pentru a deplasa o sarcină de probă în lungul unei suprafețe de potențial constant.

---

* Acest lucru e posibil întrucît cîmpul electric radial nu este infinit. Știm că cîmpul este finit *aproape* peste tot pe disc, deoarece diferența de potențial între centru și margine este finită. De fapt există un loc unde cîmpul radial crește infinit, și anume — chiar marginea discului. Pentru a evita o discontinuitate a lui E_{y+} și σ, marginile cutiei le alegem la o oarecare distanță de marginea discului.

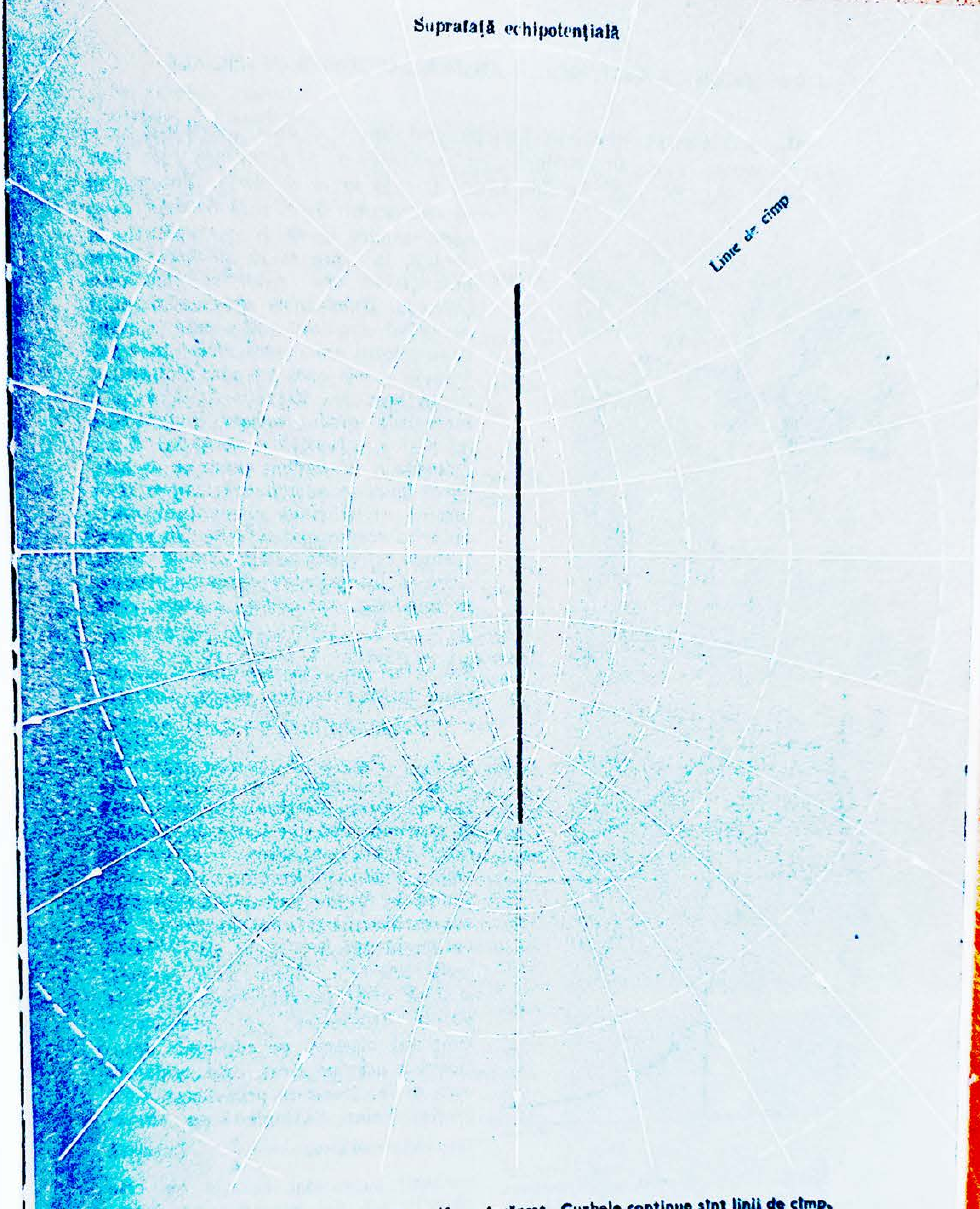


Fig. 2.11. Cîmpul electric al unui disc uniform încărcat. Curbele continue sînt linii de cîmp. Curbele punctate sînt intersecțiile planului figurii cu suprafețele de potențial constant.

2.7. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA SARCINII SUPERFICIALE

Mai putem învăța cîte ceva din exemplul simplu al unei distribuții simetrice de sarcină, uniform distribuite, cu densitatea σ, pe suprafața unei sfere de rază r_0 (fig. 2.12, *a*). Sarcina totală Q este egală cu $4\pi r_0^2\sigma$. Potențialul în exteriorul sferei este $Q/4\pi\varepsilon_0 r$, ca și cum sarcina Q ar fi concentrată în centru, în timp ce în *interiorul* sferei potențialul are valoarea constantă $Q/4\pi\varepsilon_0 r_0$. Bineînțeles gradientul unui potențial constant este zero; cîmpul în interiorul unui strat sferic încărcat trebuie — așa cum am mai stabilit — să se anuleze. Figurile 2.12, *b* și *c* reprezintă grafic variația potențialului φ și a intensității cîmpului E cu distanța r. Să vedem acum cu ce este egală forța ce acționează asupra unei sarcini superficiale elementare σdA, datorită respingerii suferite din partea tuturor celorlalte sarcini de pe sferă. Știm că intensitatea cîmpului electric în imediata apropiere a sferei este $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, iar $E_{int} = 0$. Care din valori am putea s-o folosim în calculul forței exercitate asupra sarcinii?

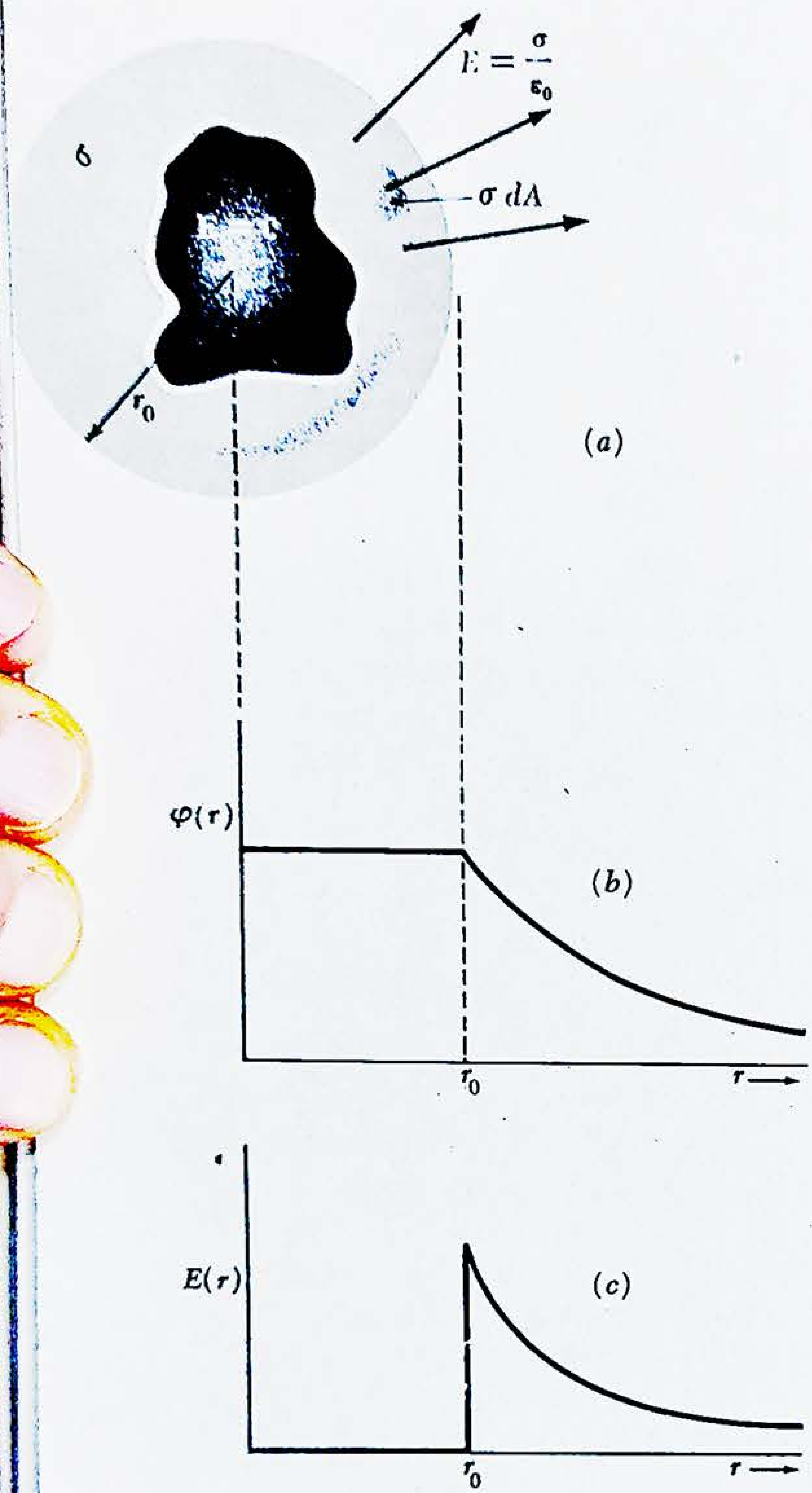


Fig. 2.12. Potențialul și cîmpul electric al unei sarcini superficiale sferice. *(a)* Secțiune în sferă. *(b)* φ în funcție de r. *(c)* E în funcție de r.

Răspunsul corect este $\frac{1}{2}(E_{ext} + E_{int})$. Putem să ne convingem de aceasta, concepînd sarcina de pe suprafața sferei distribuită într-un strat de grosime mică dar finită Δr, în interiorul căruia densitatea de sarcină de volum ρ este uniformă iar sarcina conținută în fiecare unitate de suprafață al acestui strat este σ. Cu alte cuvinte, indiferent de Δr, luăm pe ρ astfel încît $\rho\Delta r = \sigma$. Acum este evident, și dacă vreți, folosind legea lui Gauss puteți demonstra că intensitatea cîmpului electric pe suprafața interioară a acestui strat este egală cu zero și la trecerea prin acest strat crește liniar, atingînd pe suprafața exterioară valoarea $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. (Datorită curburii suprafeței funcția nu este chiar liniară, dar întrucît putem întotdeauna considera că $\Delta r \ll r_0$, practic,

în această regiune mică suprafaţa este plană). Intensitatea medie a cîmpului în această regiune şi prin urmare, forţa medie ce acţionează asupra unităţii de sarcină în interiorul stratului este $\frac{1}{2}(E_{int} + E_{ext})$ şi în acest caz pentru $E_{int} = 0$ este egală cu $\frac{1}{2}E_{ext}$ sau $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Figurile 2.13, *a-c* reprezintă diferitele situaţii cînd grosimea stratului se micşorează, menţinînd constantă sarcina pe unitatea de suprafaţă. Nu se întîmplă nimic spectaculos: cîmpul variază doar pe distanţe mici şi densitatea de sarcină de volum creşte la infinit.

Chiar dacă densitatea de sarcină în strat nu este uniformă ca, de exemplu, în figura 2.13, *d*, aceasta nu influenţează variaţia totală a lui E prin trecerea dintr-o parte în alta a stratului.

Şi în cazul cînd variaţia cîmpului este neliniară, forţa totală exercitată asupra unităţii de suprafaţă a unei asemenea plăci este egală cu $1/2\,(E_{int} + E_{ext})$ înmulţită cu sarcina totală a unităţii de suprafaţă. Problema 1.29 prezintă o verificare a acestui caz simplu,iar problema 1.30 oferă posibilitatea unei generalizări pentru cei interesaţi.

Sarcinile superficiale reale nu pot fi, bineînţeles, distribuite într-un strat de grosime nulă cu o densitate de volum infinit de mare, astfel încît reprezentarea noastră intermediară este mult mai realistă decît cazul limită. De exemplu, sarcina pe suprafaţa unui metal poate fi distribuită într-un strat cu grosimea de cîţiva angströmi. Problema constă în aceea, că atîta timp cît stratul este subţire în comparaţie cu celelalte dimensiuni ale sistemului, pentru calculul tuturor efectelor macroscopice, el poate fi considerat de grosime nulă şi caracterizat doar prin densitatea locală de sarcină pentru unitatea de suprafaţă. Pe de altă parte, distribuţia reală în adîncime poate prezenta

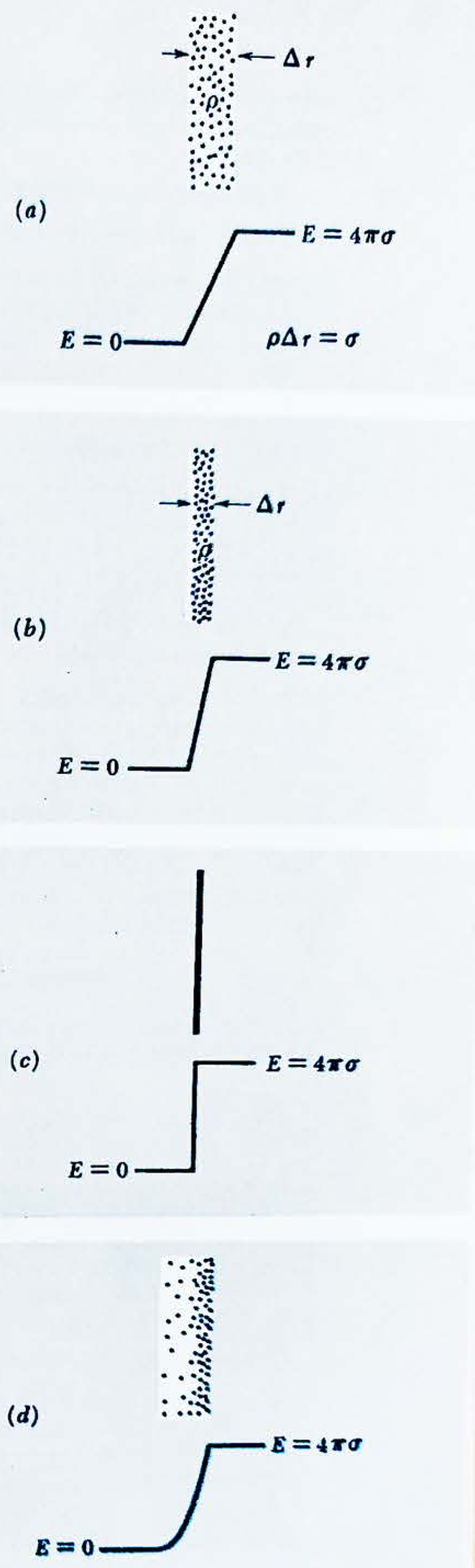


Fig. 2.13. Variaţia cîmpului unui strat încărcat depinde doar de sarcina totală pe unitatea de suprafaţă.

importanţă pentru fenomenele atomice ce au loc sub suprafaţă ca, de exemplu, trecerea electronilor dintr-o substanţă în alta prin suprafaţa ce le separă.

Revenind la problema cu care am început acest paragraf, observăm că forţa exercitată asupra unui element de sarcină superficială dq este $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot dq$, şi întrucît cantitatea de sarcină în elementul de suprafaţă dA este $dq = \sigma\, dA$, forţa ce acţionează asupra acestui element de suprafaţă dA este:

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, dA. \tag{32}$$

Înseamnă că forţa exercitată asupra unităţii de suprafaţă este $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. Această forţă se datoreşte respingerii sarcinilor şi este îndreptată în afară. Bineînţeles, dacă sarcinile nu se risipesc, înseamnă că această forţă trebuie să fie echilibrată de o altă forţă, de natură atomică sau moleculară, care nu este inclusă în ecuaţiile noastre şi care reţine purtătorii de sarcină pe sferă.

Dacă am încărca un balon de cauciuc, forţa de respingere electrică pe unitatea de suprafaţă pe care am calculat-o, $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, ar dilata balonul. Şi invers, pentru a micşora diametrul unei asemenea distribuţii de sarcină, menţinînd sarcina totală constantă, trebuie să efectuăm un lucru mecanic asupra sistemului. Să presupunem că vrem să micşorăm raza sferei de la r_0 la $r_0 - dr$ ca în figura 2.14. Ţinînd cont de lucrul mecanic ce trebuie efectuat doar pentru învingerea forţelor electrice, trebuie să aplicăm asupra fiecărei unităţi de suprafaţă o forţă egală cu $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ newtoni îndreptată spre interiorul suprafeţei. Această forţă acţionează pe distanţa dr, astfel încît lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de aceste forţe exterioare este

$$dW = (4\pi r_0^2)\left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right) dr = \frac{2\pi}{\varepsilon_0}\sigma^2 r_0^2\, dr. \tag{33}$$

Această relaţie poate fi exprimată şi în funcţie de sarcina totală $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$:

$$dW = \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r_0^2}. \tag{34}$$



Fig. 2.14. Comprimarea unui strat sferic sau a unui balon încărcat.

2.8. ENERGIA UNUI CÎMP ELECTRIC

Observați că singurul rezultat al comprimării sferei, în ceea ce privește cîmpul electric, este crearea unui cîmp de intensitate $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ în spațiul dintre $r_0 - dr$ și r_0, unde înainte cîmpul era nul. În tot restul spațiului cîmpul rămîne neschimbat. Această regiune a cîmpului a fost creată, putem spune, pe seama lucrului mecanic dW. Lucrul mecanic dW poate fi exprimat în funcție de noul volum dv ocupat de cîmp sub forma

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv. \tag{35}$$

Acesta este un caz particular al unei teoreme generale pe care n-o vom demonstra acum: *Energia potențială U a unui sistem de sarcini, care reprezintă lucrul mecanic total necesar formării acestui sistem, poate fi calculată simplu cu ajutorul cîmpului electric, atribuind fiecărui element de volum dv energia $E^2/2\varepsilon_0 dv$ și integrînd pe tot spațiul în care există cîmp electric.*

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{pe tot}\\ \text{cîmpul}}} E^2 dv}. \tag{36}$$

E^2 este, bineînțeles, o mărime scalară: $E^2 \equiv \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$.

Prin urmare, lucrul mecanic necesar pentru formarea stării inițiale a sferei încărcate (fig. 2.14) poate fi calculat după cum urmează: $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, $r > r_0$; $E = 0$, $r < r_0$, astfel încît

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{37}$$

Același rezultat se obține dacă se calculează lucrul mecanic necesar pentru a comprima sfera de la o rază infinit de mare la o rază finită r_0, folosind ecuația (34):

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2\, dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2\, dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{38}$$

Unii denumesc aceasta energia „înmagazinată" în cîmp. Întrucît sistemul este conservativ, această energie poate fi cedată, bineînțeles, dacă sarcinile s-ar putea răspîndi, astfel încît e firesc să gîndim că această energie „există undeva". Raționamentul nostru este corect dacă considerăm că densitatea energiei înmagazinate în spațiu este egală cu $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\frac{\text{jouli}}{\text{m}^3}$. Acest lucru este adevărat deși nu avem dreptul, fără alte considerente, să atribuim energia înmagazinată unui anume metru cub din spațiu. Din punct de vedere fizic putem măsura doar energia totală, adică lucrul mecanic efectuat pentru a aduce sarcina dintr-o configurație în alta. Exprimînd energia potențială totală a unui sistem electrostatic prin ecuația (36) în loc de ecuația (1.9) ne folosim doar de o altă metodă de a calcula, la fel ca în cazul folosirii legii lui Coulomb sau a noțiunii de cîmp electric pentru descrierea comportării sarcinilor electrice. Privind aceleași probleme din

diferite puncte de vedere sau folosind diferite metode de calcul, se stimulează idei noi şi se aprofundează problemele studiate. Noţiunea de cîmp electric, ca o realitate independentă, a apărut în urma studierii comportării dinamice a substanţei încărcate electric şi a radiaţiei electromagnetice.

Am vorbit despre energia potenţială şi potenţialul electric. Trebuie reţinut că acestea sînt lucruri complet diferite. Energia potenţială U, a unui sistem de sarcini în repaus, reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a forma acest sistem, adică energia pe care o putem considera înmagazinată în sistemul format. Ea este o mărime scalară şi o proprietate a sistemului *ca un întreg*. Potenţialul electric φ este funcţie de poziţia din spaţiu pentru o distribuţie dată de sarcini electrice. El se exprimă în volt. Diferenţa dintre valorile lui φ, în două puncte ale spaţiului, este lucrul mecanic efectuat pe unitatea de sarcină pentru a o deplasa dintr-un punct în altul.

Pentru a sublinia diferenţa dintre φ şi U, să scriem ecuaţia (36) în funcţie de φ şi nu de $\mathbf{E}$. Întrucît $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, avem

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\substack{\text{tot}\\ \text{spaţiul}}} |\nabla\varphi|^2 dv. \tag{39}$$

Există şi o altă metodă de a calcula energia înmagazinată. În capitolul I s-a arătat că energia necesară pentru asamblarea unor sarcini punctiforme discrete $q_1, \ldots, q_j, \ldots$ este dată de ecuaţia 1.9:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}. \tag{40}$$

S-o scriem în următoarea formă:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j \left[\sum_{k\neq j}\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}\right] \tag{41}$$

şi să studiem expresia din paranteză. Fiecare termen al acestei sume reprezintă contribuţia uneia din sarcini la potenţialul electric φ în punctul în care se găseşte sarcina q_j, astfel încît întreaga sumă, pe care o vom nota cu φ_j, reprezintă potenţialul în q_j, datorat tuturor celorlalte sarcini. În acest fel, U poate fi scris ca:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j} q_j\varphi_j. \tag{42}$$

Dacă în locul sarcinilor punctuale avem o distribuţie continuă de sarcini $\rho(x, y, z)$, înlocuim, pur şi simplu, suma din ec. (42) cu integrala:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dv. \tag{43}$$

Aici, întrucît elementul de sarcină analog lui q_j este ρdv şi este infinit mic, nu mai are rost precizarea că potenţialul φ se datorește tuturor celorlalte sarcini. În acest fel φ din ec. (43) este potenţialul electric al întregului sistem, $\varphi(x, y, z)$. Bineînţeles, ecuaţia (43) este echivalentă cu ec. (39) şi cu ec. (36).

2.9. DIVERGENŢA UNEI FUNCŢII VECTORIALE

În fiecare punct, cîmpul electric are o direcţie şi o mărime bine definită. El este o funcţie vectorială de coordonate, adică $\mathbf{E}(x, y, z)$. Ceea ce vom discuta în continuare, se referă la orice funcţie vectorială, nu numai la cîmpul electric; vom nota această funcţie cu $\mathbf{F}(x, y, z)$. Cu alte cuvinte, vom acorda, deocamdată, prioritate matematicii şi nu fizicii şi vom numi $\mathbf{F}$ o funcţie vectorială oarecare în spaţiul tridimensional.

Să considerăm un volum finit V de formă oarecare, a cărui suprafaţă o notăm cu S. Cunoaştem deja noţiunea de flux total care iese din S. Acesta este dat de valoarea integralei de suprafaţă a lui $\mathbf{F}$ extinsă pe toată suprafaţa:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \tag{44}$$

$d\mathbf{a}$ este un vector infinitezimal a cărui mărime este egală cu aria unui element mic al suprafeţei S, iar direcţia coincide cu normala exterioară la acest element de suprafaţă (fig. 2.15, *a*).

Să împărţim acum volumul V în două prin suprafaţa sau diafragma D care secţionează „balonul" S ca în figura 2.15, *b*. Să notăm aceste două părţi ale lui V cu V_1 şi V_2, considerîndu-le două volume distincte şi calculînd integralele de suprafaţă pentru fiecare în parte. Suprafaţa S_1 ce delimitează volumul V_1 include pe D ca şi suprafaţa S_2 ce delimitează volumul V_2. Este evident că suma celor două integrale de suprafaţă

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \tag{45}$$

va fi egală cu integrala pe întreaga suprafaţă din ecuaţia (44). Acest lucru se explică prin aceea că fiecare porţiune din D contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală şi cu

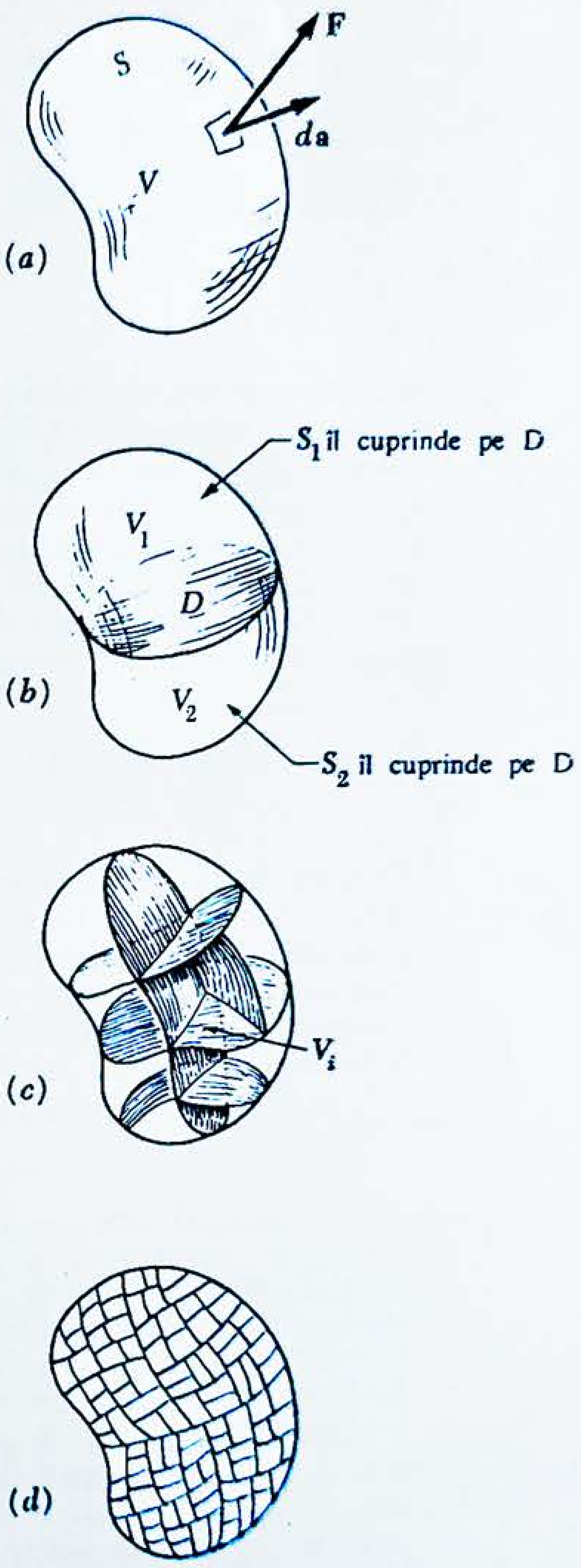


Fig. 2.15. Un volum V delimitat de o suprafaţă S (*a*) este împărţit în două porţiuni delimitate de suprafeţele S_1 şi S_2 (*b*). Indiferent cît de departe mergem cu divizarea, ca în (*c*) şi (*d*), suma integralelor de suprafaţă pe toate porţiunile este egală cu integrala de suprafaţă pe suprafaţa iniţială S, pentru oricare funcţie vectorială $\mathbf{F}$.

2.9. DIVERGENȚA UNEI FUNCȚII VECTORIALE

În fiecare punct, cîmpul electric are o direcție și o mărime bine definită. El este o funcție vectorială de coordonate, adică $\mathbf{E}(x, y, z)$. Ceea ce vom discuta în continuare, se referă la orice funcție vectorială, nu numai la cîmpul electric; vom nota această funcție cu $\mathbf{F}(x, y, z)$. Cu alte cuvinte, vom acorda, deocamdată, prioritate matematicii și nu fizicii și vom numi $\mathbf{F}$ o funcție vectorială oarecare în spațiul tridimensional.

Să considerăm un volum finit V de formă oarecare, a cărui suprafață o notăm cu S. Cunoaștem deja noțiunea de flux total care iese din S. Acesta este dat de valoarea integralei de suprafață a lui $\mathbf{F}$ extinsă pe toată suprafața:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \qquad (44)$$

$d\mathbf{a}$ este un vector infinitezimal a cărui mărime este egală cu aria unui element mic al suprafeței S, iar direcția coincide cu normala exterioară la acest element de suprafață (fig. 2.15, *a*).

Să împărțim acum volumul V în două prin suprafața sau diafragma D care secționează „balonul" S ca în figura 2.15, *b*. Să notăm aceste două părți ale lui V cu V_1 și V_2, considerîndu-le două volume distincte și calculînd integralele de suprafață pentru fiecare în parte. Suprafața S_1 ce delimitează volumul V_1 include pe D ca și suprafața S_2 ce delimitează volumul V_2. Este evident că suma celor două integrale de suprafață

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (45)$$

va fi egală cu integrala pe întreaga suprafață din ecuația (44). Acest lucru se explică prin aceea că fiecare porțiune din D contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală și cu

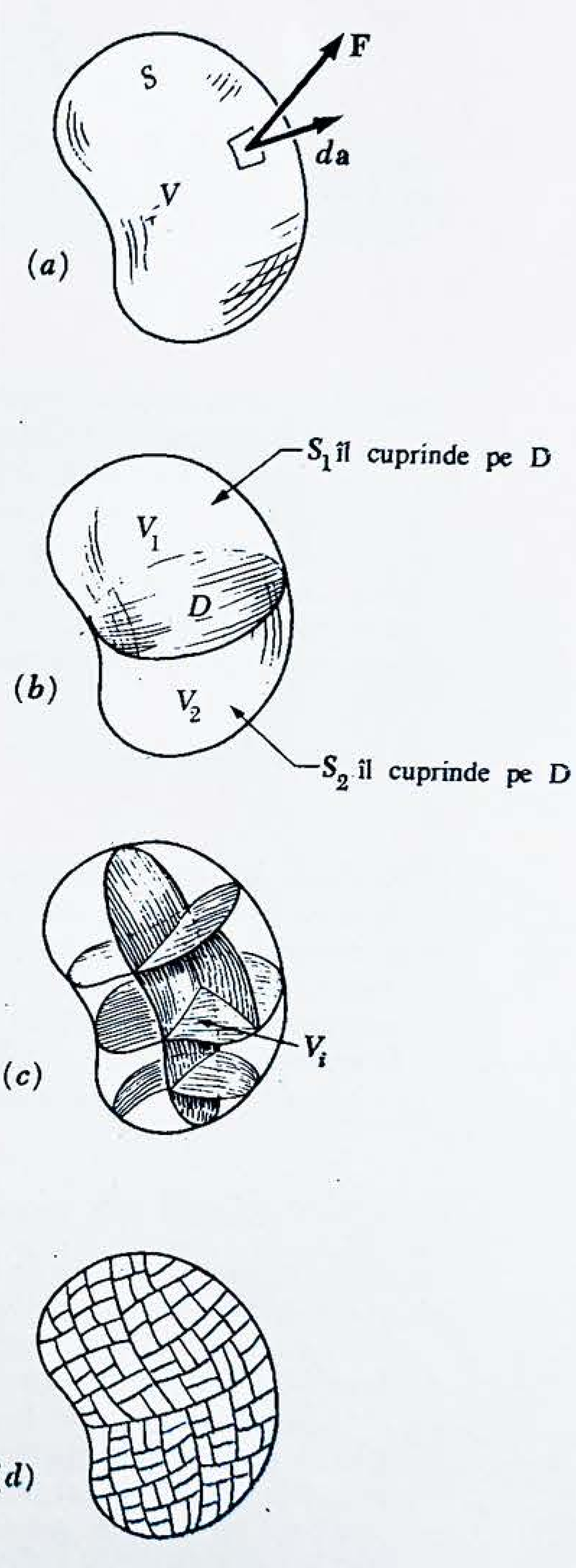


Fig. 2.15. Un volum V delimitat de o suprafață S *(a)* este împărțit în două porțiuni delimitate de suprafețele S_1 și S_2 *(b)*. Indiferent cît de departe mergem cu divizarea, ca în *(c)* și *(d)*, suma integralelor de suprafață pe toate porțiunile este egală cu integrala de suprafață pe suprafața inițială S, pentru oricare funcție vectorială $\mathbf{F}$.

semn opus în a doua integrală, întrucît direcţia „spre exterior" într-un caz devine direcţie „spre interior" în celălalt.

Cu alte cuvinte, orice flux care iese din V_1 prin suprafaţa D este un flux ce intră în V_2. Restul suprafeţei este identic cu cel al volumului iniţial întreg. Putem continua această divizare a volumului V într-un mare număr de porţiuni $V_1, ..., V_i, ..., V_N$, cu suprafeţele ce le delimitează $S_1, ..., S_i, ..., S_N$. Indiferent de numărul porţiunilor, putem fi siguri că

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi. \tag{46}$$

La limită, cînd N devine foarte mare, vrem să găsim ce este caracteristic pentru o porţiune foarte mică şi în final — pentru vecinătatea unui punct. Dar integrala de suprafaţă

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{47}$$

nu este o asemenea mărime, întrucît dacă continuăm divizarea, N devine $2N$ şi această integrală se împarte în doi termeni, fiecare din ei mai mic decît cel dinainte de divizare, deoarece suma lor rămîne constantă. Cu alte cuvinte, pe măsură ce luăm volume din ce în ce mai mici în jurul aceluiaşi punct, integrala de suprafaţă pe unul din aceste volume se micşorează continuu. Observăm că volumul se împarte de asemenea în două părţi a căror sumă dă volumul iniţial. Asta înseamnă că trebuie să luăm în considerare raportul dintre integrala de suprafaţă şi volumul elementului din spaţiul divizat:

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}}{V_i}. \tag{48}$$

Evident, pentru N suficient de mare, adică pentru o divizare în porţiuni din ce în ce mai mici, la fiecare împărţire a integralei de suprafaţă în doi termeni şi volumul va fi împărţit în două. Continuînd o asemenea divizare, în jurul unei anumite regiuni, acest raport tinde către o limită. Această limită este o proprietate caracteristică funcţiei vectoriale **F** în vecinătatea acestui punct. O numim *divergenţa* lui **F** şi o notăm div **F**.

Înseamnă că valoarea div **F** în orice punct este egală cu:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{49}$$

unde V_i este volumul ce conţine punctul respectiv şi S_i suprafaţa ce delimitează acest volum şi peste care se ia integrala de suprafaţă. Trebuie neapărat introdusă condiţia că limita există şi este independentă de modul de divizare. Deocamdată considerăm că această condiţie este îndeplinită.

Noţiunea de div **F** poate fi formulată în modul următor: div **F** este fluxul pe unitatea de volum ce iese din volumul V_i, pentru V_i infinit de mic. Ea este, evident, o mărime scalară. Ea poate varia de la punct la punct, valoarea ei într-un punct oarecare (x, y, z) fiind dată de limita raportului din ecuaţia (49) cînd V_i devine din ce în ce mai mic, cuprinzînd tot timpul punctul (x, y, z). În acest fel, div **F** este pur şi simplu o funcţie scalară de coordonate.

2.10. TEOREMA LUI GAUSS ŞI FORMA DIFERENŢIALĂ A LEGII LUI GAUSS

Dacă cunoaştem această funcţie scalară de coordonate div **F**, putem să ne întoarcem din nou la integrala de suprafaţă ce delimitează un volum mare. Să scriem, mai întîi, ecuaţia (46) sub forma:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right]. \tag{50}$$

La limită cînd $N \to \infty$, $V_i \to 0$, termenul din paranteză devine divergenta lui **F** şi suma trece într-o integrală de volum:

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv}. \tag{51}$$

Ecuaţia (51) este numită *teorema lui Gauss* sau *teorema divergenţei.* Ea este valabilă pentru orice cîmp vectorial pentru care există limita scrisă în ecuaţia (49).

Să vedem ce consecinţe are asupra cîmpului electric **E**.

Cunoaştem legea lui Gauss, care se scrie:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dv \tag{52}$$

Dacă teorema divergenţei este valabilă pentru orice cîmp vectorial, ea este bineînţeles, valabilă şi pentru **E**:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dv. \tag{53}$$

Ambele ecuaţii (52 şi 53) sînt valabile pentru *orice* volum ales, indiferent de formă, dimensiune şi dispunere. Comparîndu-le, observăm că acest lucru este adevărat numai dacă în fiecare punct,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}. \tag{54}$$

Dacă considerăm teorema divergenţei ca făcînd parte din bagajul nostru de cunoştinţe matematice pe care le vom folosi de acum înainte, ecuaţia (54) poate fi considerată ca o altă formulare a legii lui Gauss. Ea reprezintă forma diferenţială a legii lui Gauss, exprimată prin relaţia (locală) dintre densitatea de sarcină şi cîmpul electric.

2.11. DIVERGENŢA ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Ecuaţia (49) este definiţia fundamentală a *divergenţei* independent de sistemul de coordonate. Este util să ştim cum se calculează divergenţa unei funcţii vectoriale dată într-o formă explicită. Să presupunem că funcţia vectorială **F** este exprimată în coordonatele carteziene x, y şi z. Asta in-

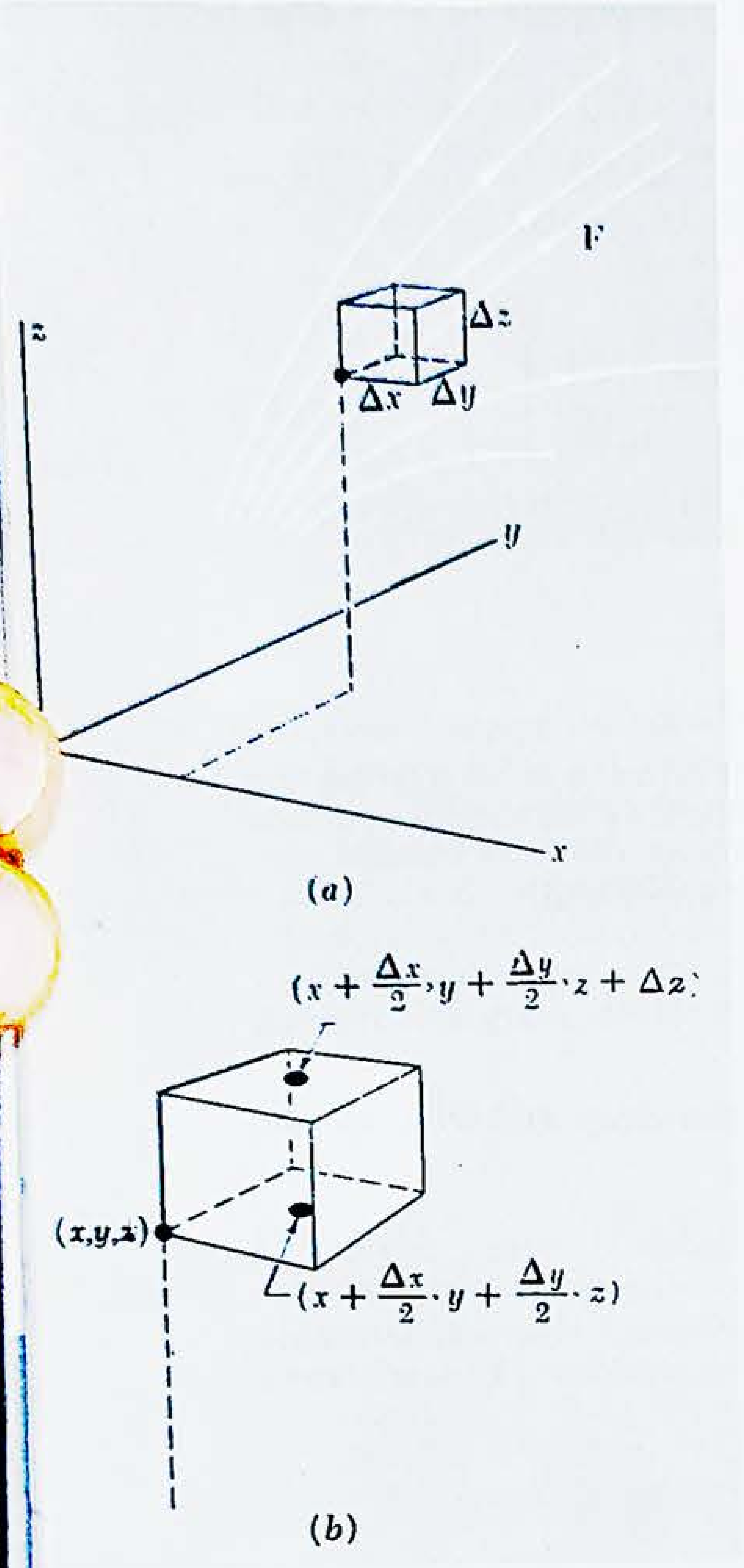


Fig. 2.16. Calculul fluxului ce iese dintr-o cutie de volum $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$.

seamnă că avem trei funcţii scalare $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ şi $F_z(x, y, z)$. Vom considera un volum V_t de forma unei mici cutii rectangulare, cu unul din colţuri în punctul (x, y, z) şi cu laturile Δx, Δy şi Δz (fig. 2.16). La întrebarea, dacă pentru un volum de altă formă obţinem aceeaşi valoare a limitei, vom răspunde mai tîrziu.

Să luăm două feţe opuse ale cutiei, de exemplu cea superioară şi cea inferioară, reprezentate prin vectorii $\hat{z}\Delta x\Delta y$ şi $-\hat{z}\Delta x\Delta y$. Fluxul prin aceste suprafeţe se datorează doar componentei pe direcţia z a lui $\mathbf{F}$ şi contribuţia finală depinde doar de *diferenţa* dintre F_z pe suprafaţa superioară şi F_z pe suprafaţa inferioară, sau mai precis, de diferenţa dintre valoarea medie a lui F_z pe suprafaţa superioară şi valoarea medie a lui F_z pe suprafaţa inferioară. În aproximaţia de ordinul întîi, această diferenţă este egală cu $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Delta z$. Vom explica acest lucru cu ajutorul figurii 2.16, *b*. Valoarea medie a lui F_z pe suprafaţa interioară a cutiei — considerînd doar aproximaţia de ordinul întîi în variaţia lui F_z pe acest dreptunghi mic — este egală cu valoarea lui F_z în centrul acestui dreptunghi. Această mărime în aproximaţia de ordinul întîi*, în raport cu Δx şi Δy este:

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}. \tag{55}$$

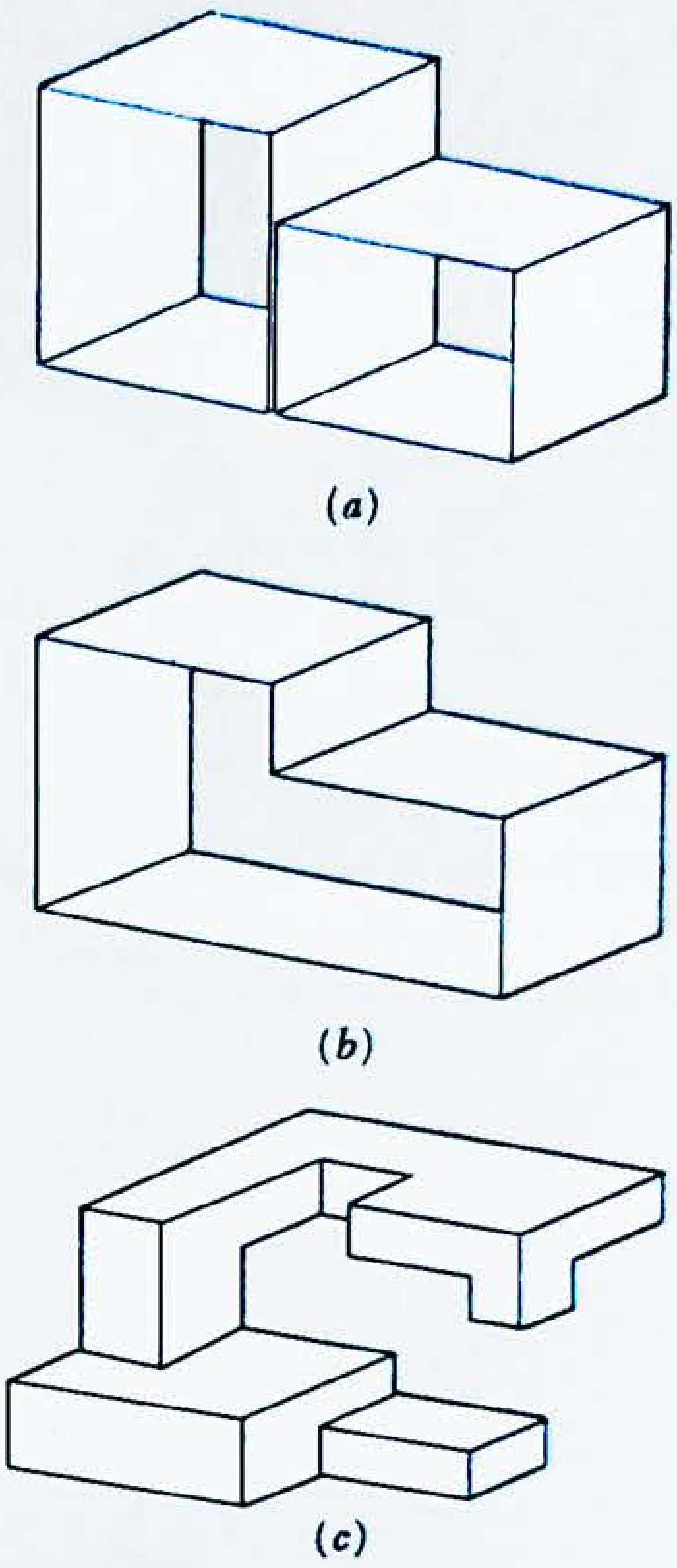
Pentru valoarea medie a funcţiei F_z pe faţa superioară luăm valoarea ei în centrul feţei inferioare, din nou în aproximaţia de ordinul întîi în raport cu deplasările mici:

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{56}$$

---

* Aceasta nu este decît începutul unei dezvoltări în serie Taylor a funcţiei scalare F_z în vecinătatea punctului (x, y, z). Adică, $F_z(x + a, y + b, z + c) = F_z(x, y, z) + \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_z + \ldots + \left(\frac{1}{n!}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_z + \ldots$ Toate derivatele se calculează în punctul (x, y, z). În cazul nostru $a = \frac{\Delta x}{2}$, $b = \frac{\Delta y}{2}$, $c = 0$ şi termenii de ordin superior ai dezvoltării îi neglijăm.

Fig. 2.17. Limita raportului dintre flux şi volum este independentă de forma cutiei.



Fluxul total ce iese din cutie prin cele două suprafeţe a căror arie este $\Delta x \Delta y$, este egal cu:

$$\underbrace{\Delta x \Delta y\left[F_z(x,y,z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]}_{\text{(fluxul ce iese prin suprafaţa superioară)}}-$$

$$\underbrace{-\,\Delta x \Delta y\left[F_z(x, y, z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\right]}_{\text{(fluxul ce intră prin suprafaţa inferioară)}} \quad (57)$$

care se reduce la $\Delta x \Delta y(\partial F_z/\partial z)$. Este evident că acelaşi raţionament se aplică şi celorlalte perechi de suprafeţe.

Astfel, fluxul total ce iese din cutie prin suprafeţele paralele cu planul yz este $\Delta y \Delta z \Delta x(\partial F_x/\partial x)$. Observăm că şi aici apare produsul $\Delta x \Delta y \Delta z$. Prin urmare, fluxul total ce iese din această cutie mică este egal cu:

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right). \quad (58)$$

Întrucît volumul cutiei este $\Delta x \Delta y \Delta z$, fluxul raportat la volum este $\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$; în această expresie nu intră dimensiunile cutiei, ea nu se schimbă la micşorarea cutiei. (Dacă în calculul fluxului am fi reţinut termenii proporţionali cu $(\Delta x)^2$, $(\Delta x \Delta y)$ ş.a.m.d., bineînţeles, că la limită aceştia ar fi dispărut.)

Acum începe să ne devină clar de ce această limită nu depinde de forma cutiei. Este evident că ea nu depinde de dimensiunile cutiei, dar aceasta nu ne spune prea mult. Este uşor de văzut că această limită va fi aceeaşi pentru orice volum, pe care-l putem construi prin asamblarea unor cutioare rectangulare de dimensiuni şi forme oarecare. Să considerăm două cutii ca în figura 2.17. Suma fluxului Φ_1 ce iese din cutia 1 şi a fluxului Φ_2 ce iese din cutia 2 nu se schimbă dacă se îndepărtează peretele despărţitor pentru a forma o singură cutie; orice flux care ar trece prin această suprafaţă va fi negativ pentru o faţă şi pozitiv pentru cealaltă. Prin urmare, nici o formă bizară ca cea din figura 2.17, *c* nu schimbă rezultatul. Generalizarea în con-

tinuare a rezultatului o lăsăm în seama cititorului. Suprafeţele înclinate trebuie alese cu grijă dacă vreţi mai întîi, să demonstraţi că suma vectorială a celor patru feţe ale tetraedrului din figura 2.18, este nulă.

Ajungem la concluzia că, presupunînd funcţiile F_x, F_y şi F_z diferenţiabile, limita trebuie să existe şi este dată de

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{59}$$

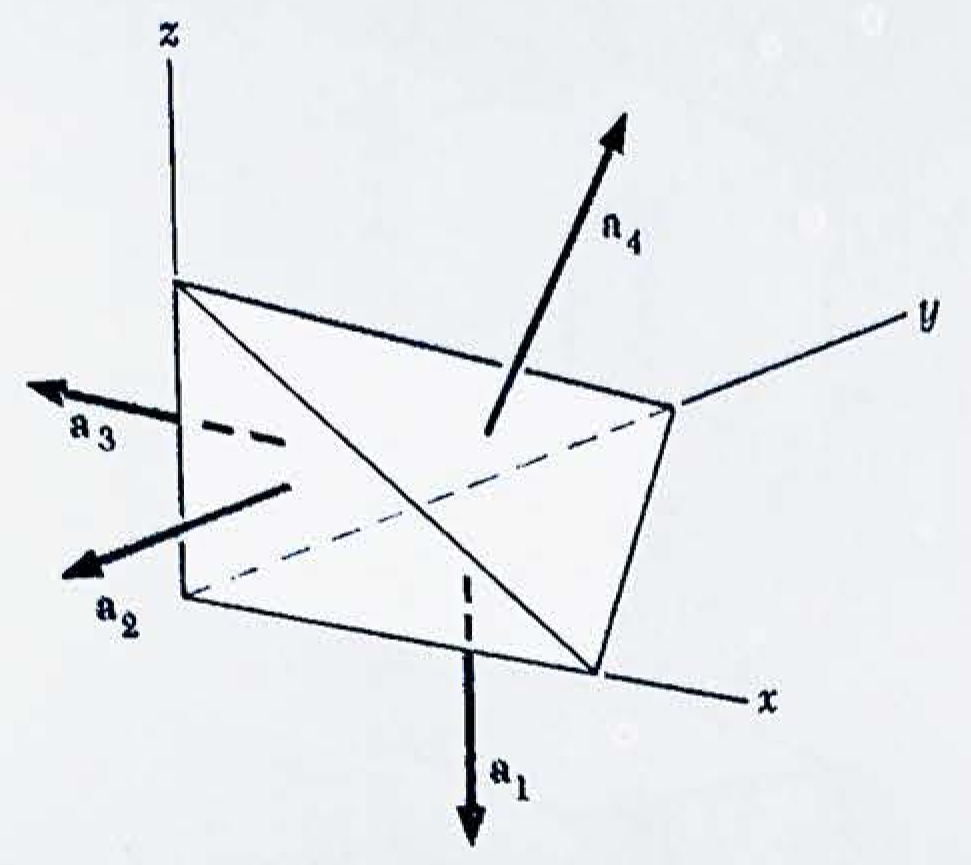


Fig. 2.18. Puteţi demonstra că $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

Dacă div **F** are o valoare pozitivă într-un punct oarecare, considerînd că **F** este un cîmp de viteze, putem găsi „fluxul extern" total în această regiune. De exemplu, dacă toate derivatele parţiale din ecuaţia (59) sînt pozitive în punctul P, atunci în vecinătatea acestui punct putem avea un cîmp vectorial asemănător cu cel reprezentat în figura 2.19. Dar cîmpul poate fi cu totul altul şi să aibă, totuşi, divergenţa pozitivă, întrucît i se poate suprapune orice funcţie vectorială **G** cu condiţia ca div **G** = 0. În acest fel. una sau două din cele trei derivate parţiale pot fi negative, iar div **F** > 0. Divergenţa este o mărime ce determină doar un aspect al variaţiei spaţiale a unui cîmp vectorial.

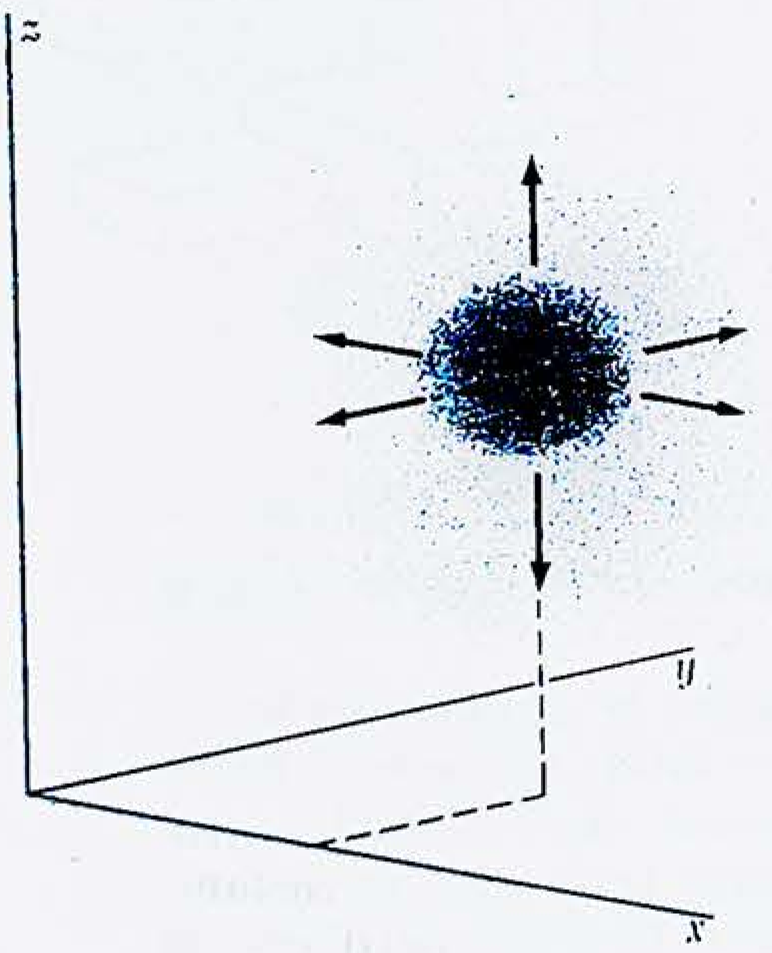
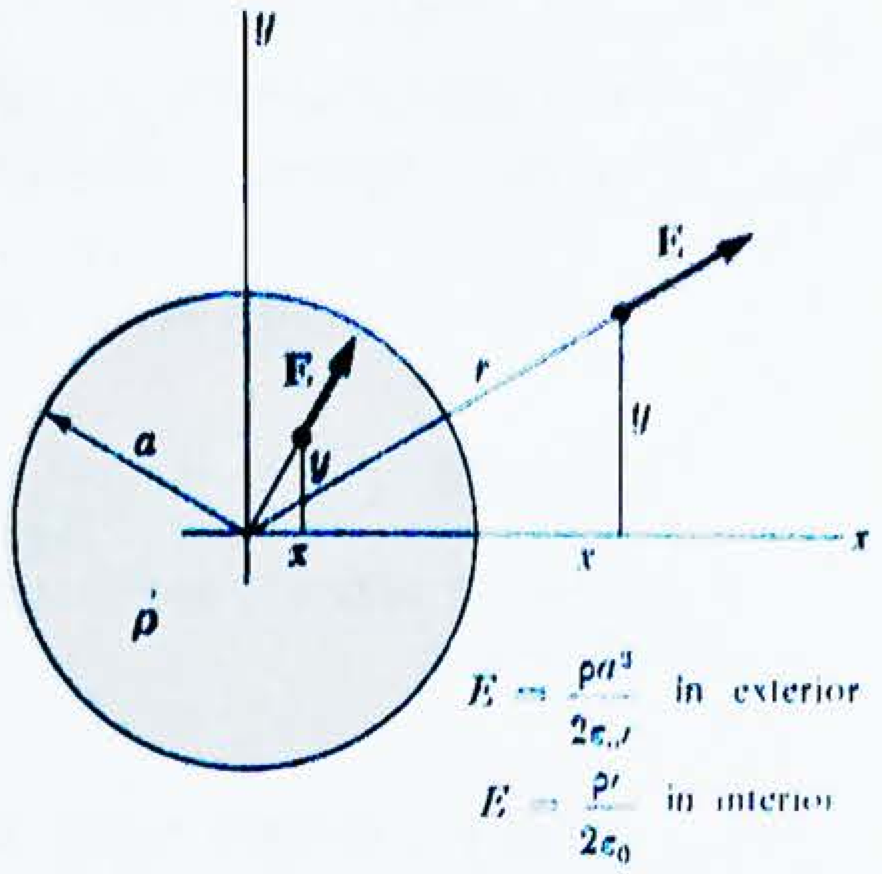


Fig. 2.19. Este reprezentat un cîmp a cărui divergenţă în vecinătatea punctului P este diferită de zero.

Să aplicăm aceste raţionamente unui cîmp electric pe care ni-l reprezentăm mai uşor. Un cilindru circular de lungime infinită şi de rază a conţine sarcină pozitivă astfel distribuită încît densitatea este ρ. În exteriorul cilindrului intensitatea cîmpului electric este aceeaşi cu cea produsă de distribuţia liniară de pe axă. Este un cîmp radial a cărui mărime este proporţională cu $1/r$. Aplicînd legea lui Gauss, pentru un cilindru de rază $r < a$, găsim cîmpul din interiorul cilindrului. Această problemă o puteţi rezolva uşor. Veţi găsi că cîmpul în interiorul cilindrului este direct proporţional cu r şi este tot radial. Valorile exacte ale intensităţii cîmpului sînt:

$$E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{pentru } r > a$$
$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad \text{pentru } r < a. \tag{60}$$

Fig. 2.20. Cîmpul în interiorul şi în exteriorul unei distribuţii de sarcină cilindrice uniforme.



În figura 2.20 este reprezentată o secţiune transversală a cilindrului, perpendiculară pe axa sa. Alegerea sistemului rectangular de axe de coordonate, nu este cea mai fericită în acest caz, dar ne vom folosi de el în rezolvarea ecuaţiei (59), în scopul exersării. Pentru $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, componentele cîmpului pot fi exprimate după cum urmează:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \left(\frac{x}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 x}{2\varepsilon_0(x^2 + y^2)} \quad \text{pentru } r > a \\
&= \frac{\rho x}{2\varepsilon_0} \quad \text{pentru } r < a \\
E_y &= \left(\frac{y}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 y}{2\varepsilon_0(x^2 + y^2)} \quad \text{pentru } r > a \\
&= \frac{\rho y}{2\varepsilon_0} \quad \text{pentru } r < a.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Componenta E_z este, bineînţeles, zero.

În exteriorul cilindrului încărcat div **E** este

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] = 0. \tag{62}$$

În interiorul cilindrului div **E** este

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho(1 + 1)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{63}$$

Ne aşteptam la aceste rezultate. În exteriorul cilindrului, unde nu există sarcină, fluxul total ce iese din orice volum — mare sau mic — este zero, astfel încît limita raportului flux/volum este bineînţeles zero. Rezultatul pe care l-am obţinut pentru interiorul cilindrului rezultă din relaţia fundamentală (54).

2.12. LAPLACEANUL

Am întîlnit pînă acum două funcţii scalare legate de cîmpul electric: funcţia potenţială φ şi divergenţa div **E**. În sistemul de axe de coordonate relaţiile dintre ele se scriu:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \tag{64}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{65}$$

Din ecuaţia (64) rezultă că componenta pe x a lui $\mathbf{E}$ este $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Introducînd această expresie şi expresiile corespunzătoare pentru E_y şi E_z în (65), obţinem o relaţie ce leagă div $\mathbf{E}$ cu φ:

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad } \varphi = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right). \tag{66}$$

Operaţia aplicată lui φ în ecuaţia (66), fără semnul minus, o vom numi „div grad" sau „divergenţă din gradient de...". Simbolul folosit pentru această operaţie este ∇^2, numit *operatorul lui Laplace* sau, pur şi simplu, *laplacean*. Expresia

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

reprezintă laplaceanul în coordonate carteziene.

Notaţia ∇^2 se explică în modul următor: operatorul gradient se notează frecvent ∇ şi se numeşte „nabla". În coordonate carteziene el se scrie:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{67}$$

Dacă îl considerăm un vector, ridicîndu-l la pătrat, obţinem:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{68}$$

acelaşi cu laplaceanul în coordonate carteziene. Astfel, laplaceanul este deseori numit „nabla la pătrat" şi spunem „nabla pătrat din φ" înţelegînd, prin aceasta, „div grad φ". Atragem atenţia că în alte sisteme de coordonate, de exemplu, coordonate sferice, relaţia dintre operatorul gradient şi operatorul lui Laplace nu mai este aşa simplă. Esenţial este să ştim că operatorul lui Laplace înseamnă aplicarea operaţiei „divergenţă din gradient de...".

Acum putem exprima direct o relaţie (locală) între densitatea de sarcină într-un punct oarecare şi funcţia potenţială în imediata lui vecinătate. Aplicînd legea lui Gauss în forma diferenţială, div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, avem

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}. \tag{69}$$

Ecuaţia (69), numită uneori ecuaţia lui Poisson, leagă densitatea de sarcină cu derivatele de ordinul doi ale potenţialului. În sistemul de coordonate carteziene, ea se scrie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{70}$$

Această relație poate fi considerată ca exprimarea diferențială a integralei (17), cu ajutorul căreia se calculează potențialul într-un punct, însumînd contribuțiile tuturor surselor apropiate și îndepărtate*.

2.13. ECUAȚIA LUI LAPLACE

Peste tot unde $\rho = 0$, adică în toate punctele spațiului care nu conțin sarcini electrice, potențialul electric φ satisface ecuația

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0}. \tag{71}$$

Ea se numește *ecuația lui Laplace* și o întîlnim în multe capitole ale fizicii. Într-adevăr, din punct de vedere matematic, în majoritatea cazurilor, teoria cîmpurilor clasice constă în studiul soluțiilor acestei ecuații. Clasa de funcții care satisface ecuația lui Laplace sînt numite *funcții armonice*. Ele au proprietăți remarcabile, una dintre ele fiind următoarea: *dacă funcția $\varphi(x, y, z)$ satisface ecuația lui Laplace, atunci valoarea medie a lui φ pe suprafața unei sfere oarecare (nu neapărat o sferă mică) este egală cu valoarea lui în centrul sferei*. Această proprietate se demonstrează ușor pentru potențialul electric φ, în regiunile ce nu conțin sarcini. Să considerăm o sferă S în cîmpul unei sarcini punctiforme q aflată în afara sferei (fig. 2.21). Să presupunem că o sarcină de probă q' este uniform distribuită pe această sferă. Lucrul mecanic necesar pentru a distribui în acest mod sarcina q', este egal cu q' înmulțită cu valoarea medie a potențialului produs de q pe sferă. Dar noi știm că acest lucru mecanic va fi același cu cel efectuat pentru a aduce sarcina q de la infinit în această poziție, sarcina de probă q' găsindu-se aici de la început, și că în acest caz lucrul mecanic este același ca și în cazul cînd q' este concentrată în centrul acestei sfere în loc să fie distribuită pe suprafața ei. Astfel se demonstrează cele afirmate pentru acest caz.

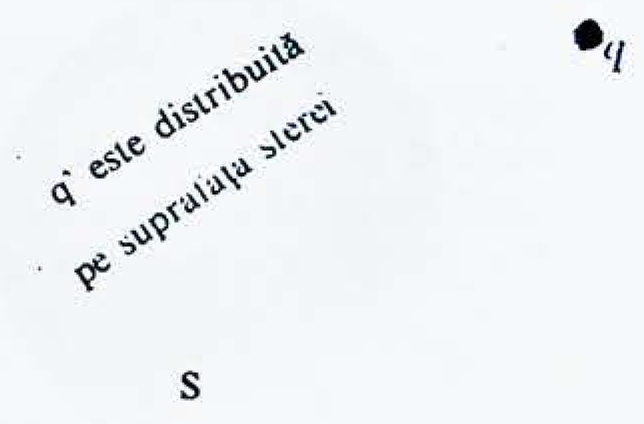


Fig. 2.21. Lucrul mecanic necesar pentru aducerea sarcinii q' și distribuirea ei pe sferă este egal cu produsul dintre q' și valoarea medie a potențialului φ creat de sarcina q pe sferă.

Întrucît potențialele mai multor surse se adună, înseamnă că acest lucru este valabil pentru orice sistem de surse aflate în exteriorul sferei S.

Această proprietate a potențialului este legată de un fapt care v-ar putea dezamăgi; nu se poate constitui un asemenea cîmp electric care să mențină o particulă încărcată în *echilibru* stabil în vid. Această „teoremă a imposibilității", ca și alte teoreme din fizică, ne scutește de

---

* De fapt, se poate arăta că ecuația (70) este echivalentul *matematic* al ecuației (17). Dacă se aplică operatorul lui Laplace integralei din ecuația (17), se obține $-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Nu ne vom opri asupra acestei demonstrații; vom accepta afirmația sau veți încerca s-o faceți singuri.

speculaţii inutile. Să vedem de ce este adevărată această teoremă. Să presupunem că avem un cîmp electric în care, contrar teoremei, *există* un punct P, unde o particulă încărcată pozitiv se află în echilibru stabil. Asta înseamnă că *orice* deplasare mică a particulei din punctul P, o va aduce într-un loc de unde sub acţiunea cîmpului electric, se va întoarce în punctul P. Dar asta înseamnă că cîmpul **E**, al unei sfere mici din jurul punctului P, este îndreptat spre interior în orice punct de pe suprafaţă. Aceasta contrazice legea lui Gauss, întrucît în interiorul regiunii nu există sursă de sarcină negativă. (Sarcina noastră de probă nu se ia în consideraţie şi în afară de aceasta, ea este pozitivă.) Cu alte cuvinte, nu există o regiune de vid, în care, în toate punctele cîmpul electric să fie îndreptat numai spre interior sau numai spre exterior, care este condiţia necesară pentru echilibru stabil. Exprimînd acelaşi lucru cu ajutorul potenţialului electric, se poate spune că poziţia stabilă a unei particule încărcate este aceea în care potenţialul φ este sau mai mic decît al tuturor punctelor învecinate (dacă particula este încărcată pozitiv) sau mai mare decît a tuturor punctelor învecinate (dacă particula este încărcată negativ). Evident, pentru o funcţie a cărei valoare medie pe sferă este întotdeauna egală cu valoarea ei în centrul sferei, nu este posibilă nici una din condiţii.

Bineînţeles, o particulă încărcată se poate găsi în *echilibru* într-un cîmp electrostatic în sensul că forţa ce acţionează asupra ei este nulă. Un asemenea caz este punctul din figura 1.10 în care $\mathbf{E} = 0$. Punctul aflat la mijlocul distanţei dintre două sarcini pozitive egale, constituie o poziţie de echilibru pentru o a treia sarcină, fie pozitivă, fie negativă. (Ce se va întîmpla dacă a treia sarcină va fi deplasată puţin din poziţia ei de echilibru?) Între altele, cu ajutorul cîmpurilor electrice variabile în timp, *este* posibilă captarea şi menţinerea unei particule încărcate în stare de echilibru stabil.

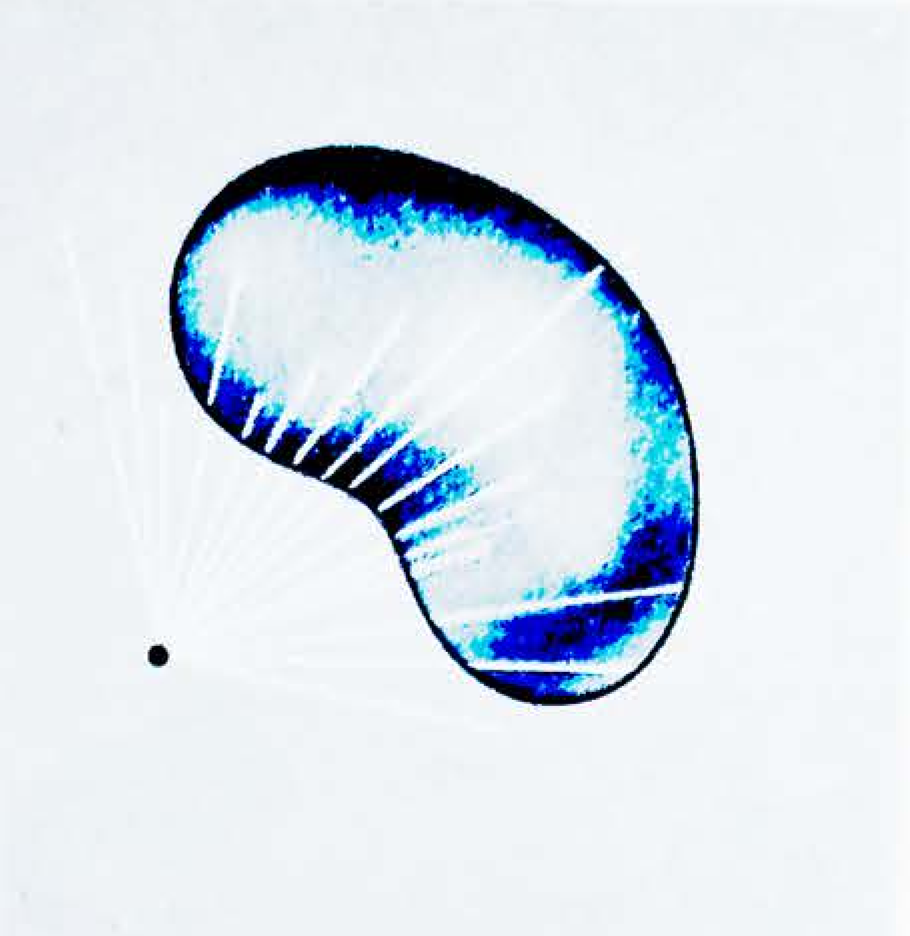
2.14. DEOSEBIREA DINTRE FIZICĂ ŞI MATEMATICĂ

În ultimele paragrafe ne-am ocupat de relaţii matematice şi de noi moduri de exprimare a faptelor cunoscute. Pentru a deosebi fizica de matematică şi legea de definiţie, să încercăm să ne imaginăm ce s-ar întîmpla dacă forţa electrică n-ar varia invers proporţional cu pătratul distanţei, ci ar fi o forţă cu o rază de acţiune finită, variind, de exemplu, după legea

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}. \qquad (72)$$

În acest caz, legea lui Gauss, exprimată în formă integrală în ecuaţia (52) nu este adevărată, întrucît pe o suprafaţă foarte mare, ce cuprinde cîteva surse, intensitatea cîmpului pe această suprafaţă tinde spre o valoare foarte mică. Totuşi, vom mai putea defini un cîmp în orice punct al spaţiului. Putem calcula divergenţa acestui cîmp, iar ecuaţia (53), care descrie proprietatea matematică a *oricărui* cîmp vectorial, va rămîne adevărată. Există vreo contradicţie aici? Nu, deoarece ecuaţia (54), de asemenea, nu va fi valabilă. Divergenţa cîmpului nu va mai fi egală cu densitatea sursei. Putem înţelege aceasta, observînd că printr-un volum mic, lipsit de surse, poate totuşi trece un flux, dacă cîmpul sursei aflate *în afara* volumului este limitat în spaţiu. După cum se vede în figura 2.22, prin acea parte a suprafeţei, ce se află în dreptul sursei, fluxul ce intră este mult mai mare decît cel care iese.

Fig. 2.22. Într-un cîmp ce nu variază invers proporţional cu pătratul distanţei, fluxul printr-o suprafaţă închisă nu este nul.



Prin urmare, putem afirma că ecuaţiile (52) şi (54) exprimă una şi aceeaşi *lege fizică*, legea proporţionalităţii inverse cu pătratul distanţei pe care Coulomb a stabilit-o măsurînd direct forţele ce acţionează între două corpuri încărcate, în timp ce ecuaţia (53) este expresia unei *teoreme matematice*, care ne permite trecerea acestei legi din forma diferenţială în cea integrală şi invers.

Cum pot fi explicate aceste relaţii diferenţiale între sursă şi cîmp într-o lume, în care sarcina electrică nu este un „jeleu" uniform, ci o concentrare de particule, despre a căror structură internă ştim foarte puţin? Efectiv, ecuaţia lui Poisson, — formula (69), are sens numai la scară macroscopică. Densitatea de sarcină ρ poate fi interpretată ca o valoare medie de sarcină pe o regiune mică dar finită, care conţine multe particule. Prin urmare, funcţia ρ, în sens matematic, nu poate fi continuă. Atunci cînd micşorăm domeniul V_i, pentru a obţine forma diferenţială a legii lui Gauss, ca fizicieni, ştim că nu-l putem micşora oricît. E neplăcut să recunoaştem că, practic, ne descurcăm cu modelele continue numai pentru sistemele electrice la scară macroscopică. În lumea atomului există particule elementare şi vid. În interiorul particulelor, chiar dacă legea lui Coulomb joacă vreun rol, mai au loc multe alte fenomene. În electrostatică, vidul se supune ecuaţiei lui Laplace. Cu toate acestea, nu sîntem convinşi, că chiar şi în vid, trecerea la limită către zero n-ar avea vreun sens *fizic*.

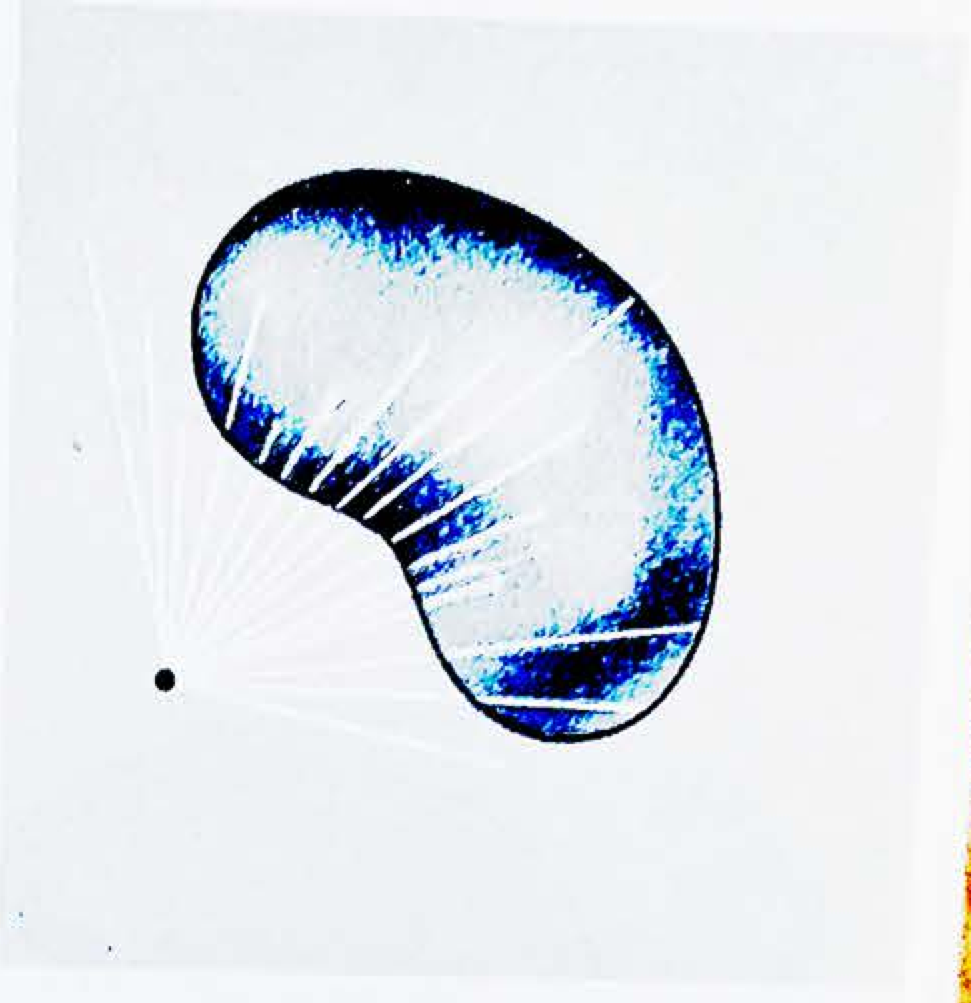
2.15. ROTORUL UNEI FUNCŢII VECTORIALE

Am introdus noţiunea de divergenţă, ca o proprietate locală a cîmpului vectorial, pornind de la integrala de suprafaţă pe o suprafaţă mare, închisă. În acelaşi mod, să considerăm integrala de linie a unui cîmp vectorial oarecare $\mathbf{F}(x, y, z)$, pe un contur închis şi anume pe curba C. Putem considera că curba C mărgineşte o suprafaţă oarecare S. Denumirea potrivită pentru mărimea unei asemenea integrale de linie, luată pe un contur închis, este cea de *circulaţie*; ca simbol al ei vom folosi Γ (litera grecească mare gama):

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{73}$$

$d\mathbf{s}$ este elementul de drum, un vector infinitezimal tangent la C în punctul respectiv (fig. 2.23, *a*). Există două sensuri de parcurgere a lui C; pentru a determina direcţia lui $d\mathbf{s}$, alegem una din ele. În general, nu e nevoie ca curba C să fie plană, ea poate fi deformată oricum.

Fig. 2.22. Într-un cîmp ce nu variază invers proporțional cu pătratul distanței, fluxul printr-o suprafață închisă nu este nul.



Prin urmare, putem afirma că ecuațiile (52) și (54) exprimă una și aceeași *lege fizică*, legea proporționalității inverse cu pătratul distanței pe care Coulomb a stabilit-o măsurînd direct forțele ce acționează între două corpuri încărcate, în timp ce ecuația (53) este expresia unei *teoreme matematice*, care ne permite trecerea acestei legi din forma diferențială în cea integrală și invers.

Cum pot fi explicate aceste relații diferențiale între sursă și cîmp într-o lume, în care sarcina electrică nu este un „jeleu" uniform, ci o concentrare de particule, despre a căror structură internă știm foarte puțin? Efectiv, ecuația lui Poisson, — formula (69), are sens numai la scară macroscopică. Densitatea de sarcină ρ poate fi interpretată ca o valoare medie de sarcină pe o regiune mică dar finită, care conține multe particule. Prin urmare, funcția ρ, în sens matematic, nu poate fi continuă. Atunci cînd micșorăm domeniul V_i, pentru a obține forma diferențială a legii lui Gauss, ca fizicieni, știm că nu-l putem micșora oricît. E neplăcut să recunoaștem că, practic, ne descurcăm cu modelele continue numai pentru sistemele electrice la scară macroscopică. În lumea atomului există particule elementare și vid. În interiorul particulelor, chiar dacă legea lui Coulomb joacă vreun rol, mai au loc multe alte fenomene. În electrostatică, vidul se supune ecuației lui Laplace. Cu toate acestea, nu sîntem convinși, că chiar și în vid, trecerea la limită către zero n-ar avea vreun sens *fizic*.

2.15. ROTORUL UNEI FUNCȚII VECTORIALE

Am introdus noțiunea de divergență, ca o proprietate locală a cîmpului vectorial, pornind de la integrala de suprafață pe o suprafață mare, închisă. În același mod, să considerăm integrala de linie a unui cîmp vectorial oarecare $\mathbf{F}(x, y, z)$, pe un contur închis și anume pe curba C. Putem considera că curba C mărginește o suprafață oarecare S. Denumirea potrivită pentru mărimea unei asemenea integrale de linie, luată pe un contur închis, este cea de *circulație*; ca simbol al ei vom folosi Γ (litera grecească mare gama):

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{73}$$

$d\mathbf{s}$ este elementul de drum, un vector infinitezimal tangent la C în punctul respectiv (fig. 2.23, *a*). Există două sensuri de parcurgere a lui C; pentru a determina direcția lui $d\mathbf{s}$, alegem una din ele. În general, nu e nevoie ca curba C să fie plană, ea poate fi deformată oricum.

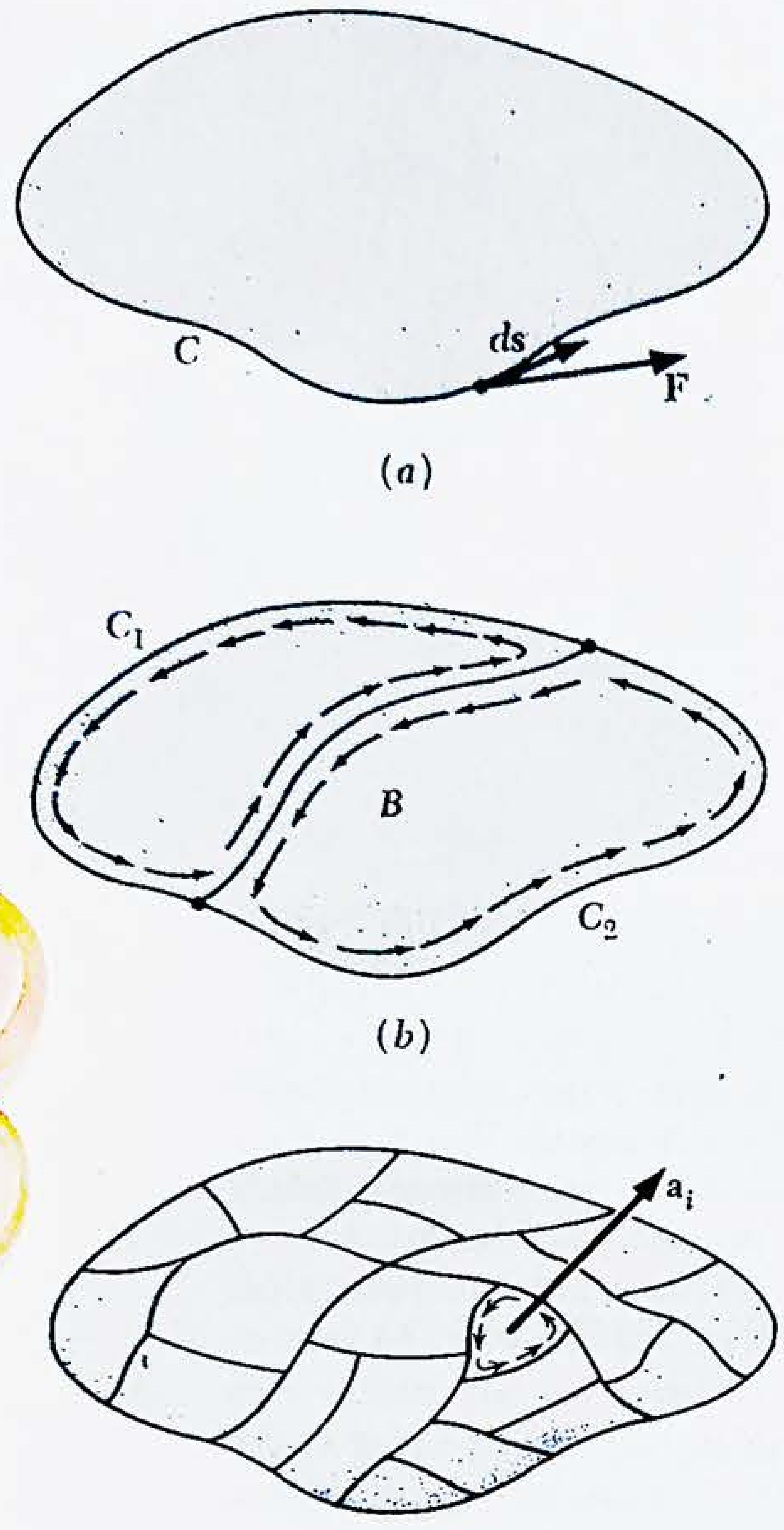


Fig. 2.23. Pentru bucla subdivizată, suma tuturor circulațiilor și în jurul tuturor elementelor este egală cu circulația în jurul curbei inițiale C.

Traversăm suprafața C pe drumul B, formînd două bucle C_1 și C_2, ambele cuprinzînd drumul B (fig. 2.23, *b*). Calculăm integrala de linie pe fiecare din ele, parcurgîndu-le în același sens. Este ușor de observat că suma celor două circulații Γ_1 și Γ_2, va fi egală cu circulația inițială de-a lungul curbei C. Acest lucru se explică prin aceea că, în cele două integrări, drumul B este parcurs în sensuri opuse și, prin urmare, în integrale rămîne doar contribuția acelor părți ale buclelor, care împreună formează curba inițială C. Dacă se continuă subdivizarea în bucle mai mici $C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_N$ suma integralelor nu se schimbă:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_i \quad \text{sau} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i. \tag{74}$$

Aici, de asemenea, se poate continua subdivizarea, cu scopul ca la limită să obținem o caracteristică cantitativă locală a cîmpului. Micșorînd buclele, se micșorează circulația, dar și aria. Este normal, astfel, să considerăm raportul dintre *circulația buclei* și *aria buclei*, exact cum am procedat în paragraful 2.9, cînd am considerat raportul dintre *flux* și *volum*. Totuși, aici situația este puțin diferită, deoarece aria $\mathbf{a}_i$, a elementului de suprafață mărginită de bucla C_i, este în realitate un vector; o suprafață are o orientare în spațiu. Nu putem lua raportul dintre un scalar și un vector! De fapt, micșorînd buclele, în vecinătatea unui punct dat, putem alege orientarea buclei oricum. (Nu uitați că nu sîntem legați de o suprafață anume, mărginită de curba C.) De aceea noi putem trece la limită în moduri complet diferite, iar rezultatul va reflecta acest lucru.

Să alegem o orientare oarecare pentru elementul de suprafață aflat într-unul din ultimele stadii de divizare. Vectorul unitar $\hat{n}$ indică normala la acest element de suprafață și acest vector va rămîne constant la micșorarea drumului din jurul punctului P. Limita *raportului dintre circulație și aria elementului* se va scrie în felul următor:

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad \text{sau} \quad \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \tag{75}$$

Regula pentru semnele legate de direcţia lui $\hat{\mathbf{n}}$ şi sensul de parcurgere a lui C_i în integrala de linie, sînt date de regula burghiului drept (fig. 2.24). Limita obţinută în acest fel reprezintă o mărime scalară, asociată punctului P în cîmpul vectorial $\mathbf{F}$ şi direcţiei $\hat{\mathbf{n}}$. Alegînd trei direcţii independente $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ şi $\hat{\mathbf{z}}$, obţinem trei numere diferite. Rezultă că aceste trei numere pot fi considerate ca componentele unui vector. Acest vector îl numim rotor $\mathbf{F}$. Cu alte cuvinte, limita obţinută pentru o anumită direcţie $\hat{\mathbf{n}}$, este componenta vectorului rotor $\mathbf{F}$ pe acea direcţie. Să exprimăm acest lucru printr-o ecuaţie:

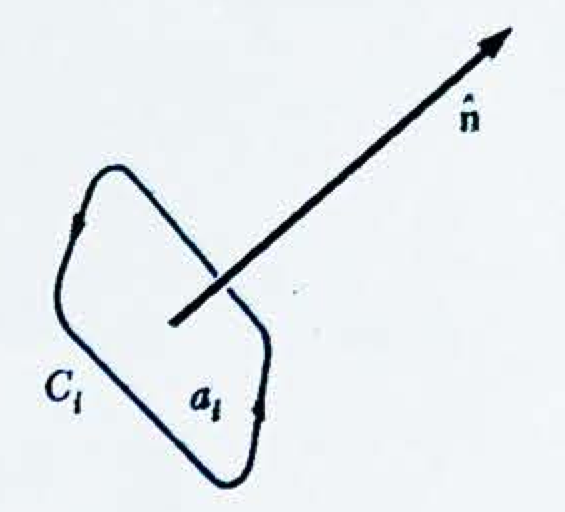


Fig. 2.24. Regula burghiului drept pentru stabilirea relaţiei dintre normala la suprafaţă şi direcţia circulaţiei integralei de linie.

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \quad (76)$$

De exemplu, componenta x a rot $\mathbf{F}$ se obţine alegînd $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ (fig. 2.25). Bucla micşorîndu-se în jurul punctului P, ea rămîne într-un plan perpendicular pe axa x. În general, vectorul rot $\mathbf{F}$ variază de la punct la punct. Dacă vom micşora suprafaţa în jurul altui punct, raportul dintre circulaţie şi arie va avea altă valoare, depinzînd de natura funcţiei vectoriale $\mathbf{F}$. Înseamnă că rot $\mathbf{F}$ este el însuşi o funcţie vectorială de coordonate. Direcţia lui, în orice punct, este normală la planul ce trece prin acel punct pentru care mărimea circulaţiei este maximă. Mărimea rotorului este egală cu valoarea limită a circulaţiei pe unitatea de arie a planului din jurul punctului ales.

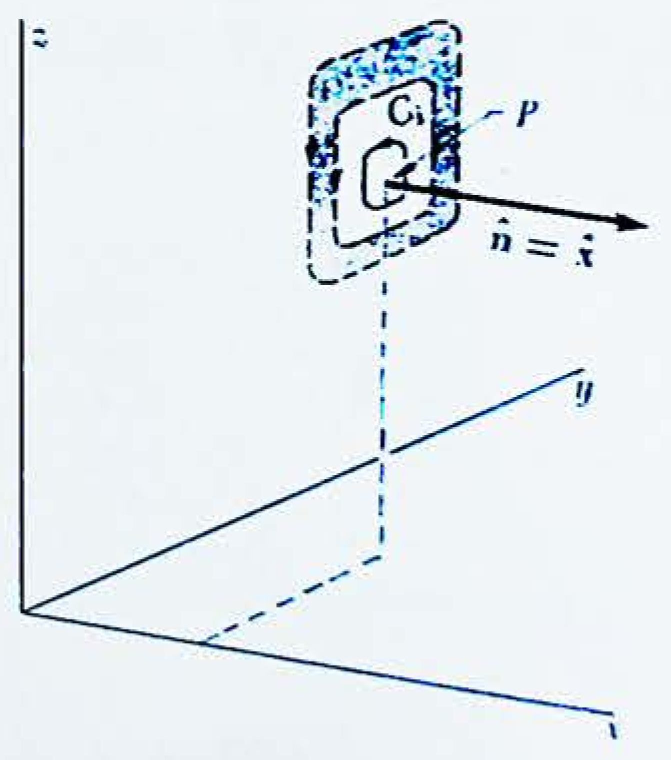


Fig. 2.25. Elementul se micşorează în jurul punctului P, direcţia normalei, ce coincide cu axa x, rămînînd neschimbată.

Noi am afirmat doar, că mărimea astfel determinată este un vector, fără a demonstra acest lucru. Pentru a fi vector, componentele astfel determinate, trebuie să se comporte în toate privinţele ca componentele unui vector. Să presupunem că am găsit anumite valori pentru componentele x, y şi z, conform ecuaţiei (76). Dacă alegem apoi o a patra direcţie arbitrară pentru vectorul $\hat{\mathbf{n}}$, atunci rezultatul obţinut din relaţia (76), trebuie să corespundă cu cele trei componente obţinute anterior întrucît un vector este determinat

doar de trei componente. Dacă vă interesează această chestiune, problema 2.24 vă va sugera o cale pentru a vă convinge că ecuația (76) definește, într-adevăr, o componentă a unui vector.

2.16. TEOREMA LUI STOKES

Pornind de la circulația în jurul unei suprafețe infinitezimale, ne putem întoarce la circulația în jurul buclei mari inițiale C:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right]. \tag{77}$$

Ultimul termen l-am înmulțit și împărțit, pur și simplu, cu a_i. Să observăm acum, ce se întîmplă cu termenul din partea dreaptă a ecuației dacă N crește foarte mult, iar toate ariile a_i se micșorează. Mărimea din paranteză devine $(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$, unde $\hat{\mathbf{n}}_i$ este vectorul unitate perpendicular pe elementul de suprafață i. Astfel, în partea dreaptă a ecuației, avem suma produsului dintre componenta normală a $(\text{rot}\,\mathbf{F})$ și aria elementului de suprafață, peste toate elementele de suprafață care formează suprafața S subîntinsă de C. Aceasta nu este altceva decît *integrala de suprafață*, pe suprafața S, a vectorului rot $\mathbf{F}$:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i\,(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \to \int_S d\mathbf{a} \cdot \text{rot}\,\mathbf{F}. \tag{78}$$

Vom găsi că:

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}} \tag{79}$$

Relația (79) este o teoremă matematică numită teorema lui Stokes. Observăm că ea seamănă ca structură cu teorema lui Gauss, adică cu teorema divergenței. Teorema lui Stokes stabilește o relație între integrala de linie a unui vector și integrala de suprafață a rotorului vectorului. Teorema lui Gauss (ec. 51) leagă integrala de suprafață a unui vector de integrala de volum a divergenței vectorului. Teorema lui Stokes se referă la suprafața mărginită de o curbă, iar teorema lui Gauss la volumul și suprafața ce delimitează acest volum.

2.17. ROTORUL ÎN COORDONATE CARTEZIENE

Relația (76) este ecuația de definiție a rotorului $\mathbf{F}$, formulată fără a specifica sistemul de coordonate. În această privință ea este analogă cu ecuația de definiție a divergenței (49). Ca și în cazul divergenței, vom calcula rot $\mathbf{F}$ cînd funcția vectorială $\mathbf{F}(x, y, z)$ este dată explicit. Pentru aceasta, vom rezolva integrala din relația (76), dar o vom face pentru un drum foarte simplu și anume, drumul ce delimitează un element de suprafață dreptunghiulară, paralelă cu planul xy (fig. 2.26). În acest caz $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Conform

regulii stabilite pentru semne, sensul integrării va fi în sensul acelor unui ceasornic, dacă privim de jos în sus pe direcţia lui $\hat{\mathbf{n}}$. În figura 2.27 dreptunghiul este privit de sus în jos.

Integrala de linie din **A** pe un asemenea element de drum depinde de variaţia lui A_x cu y şi variaţia lui A_y cu x. Întrucît A_x are aceeaşi valoare medie şi pe latura superioară a dreptunghiului (fig. 2.27) ca şi pe latura inferioară, evident, contribuţiile acestora în integrala de linie se vor anihila reciproc. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru celelalte laturi ale dreptunghiului. În aproximaţia de ordinul întîi, diferenţa dintre valoarea medie a lui A_x pe segmentul de sus pentru $y + \Delta y$ şi valoarea medie pe segmentul de jos pentru y, este

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y. \tag{80}$$

Folosim acelaşi raţionament, pe care l-am folosit în figura 2.16, *b*:

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

(la mijlocul segmentului inferior) (81)

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(la mijlocul segmentului superior).

Aceste valori medii s-au obţinut din dezvoltarea în serie Taylor, reţinînd termenii de ordinul întîi. Contribuţia finală în circulaţie este dată de produsul dintre diferenţa lor şi lungimea elementului de drum Δx. Această contribuţie este egală cu $-\Delta x \Delta y (\partial A_x/\partial y)$. Semnul minus apare datorită faptului că integrarea se face de la dreapta la stînga pe latura de sus a dreptunghiului, şi dacă componenta pozitivă A_x este mai mare sus, ea dă o contribuţie negativă în circulaţie. Contribuţia celorlalte laturi este $\Delta y \Delta x (\partial A_y/\partial x)$, semnul fiind pozitiv, întrucît componenta pozitivă A_y este mai mare pe latura din dreapta, contribuţia acestor două laturi în circulaţie este pozitivă.

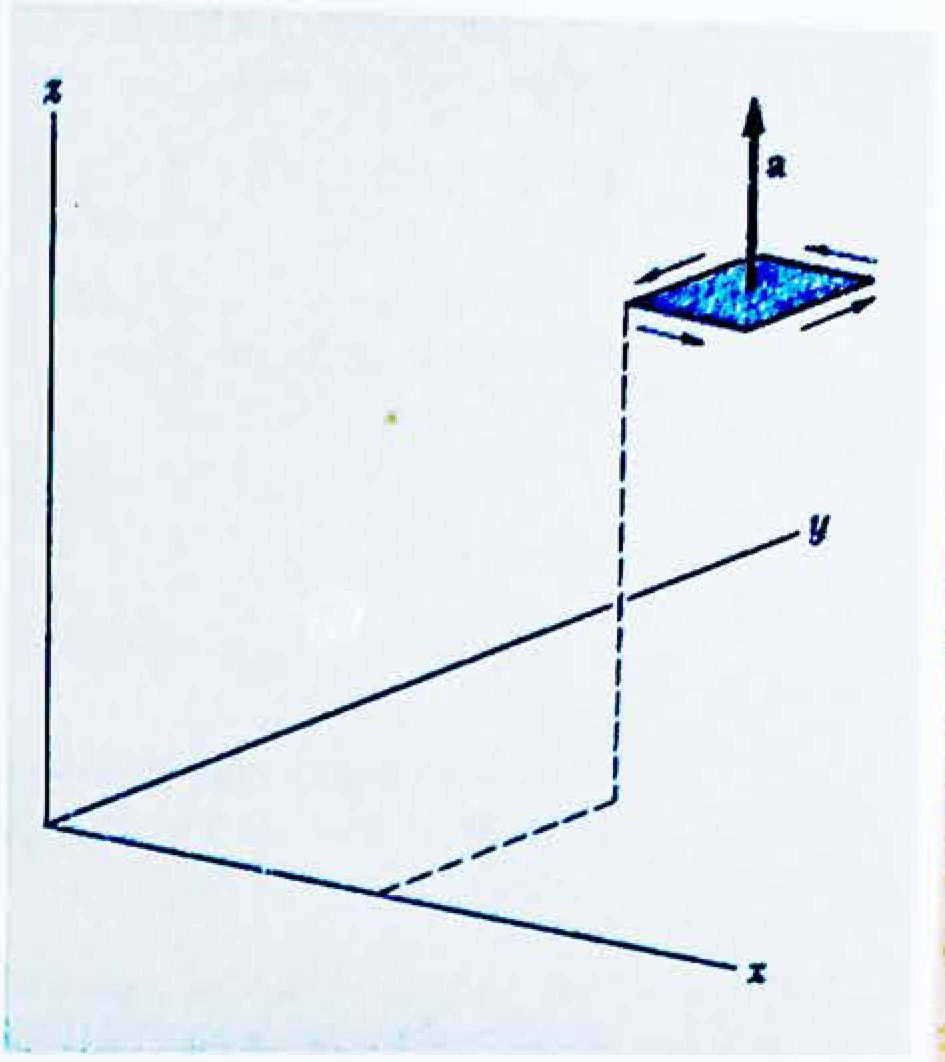


Fig. 2.26. Circulaţia în jurul unei porţiuni dreptunghiulare cu $\hat{n} = \hat{z}$.

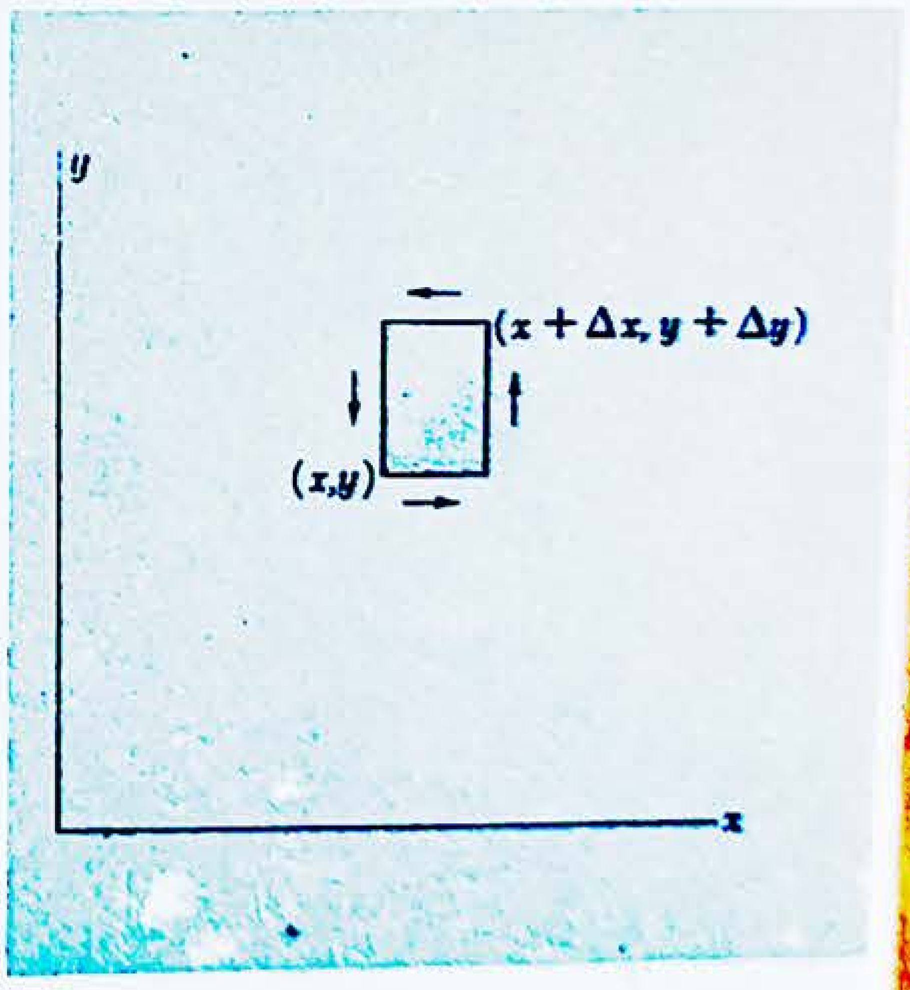


Fig. 2.27. Elementul de suprafaţă din figura 2.26 este privit de sus în jos.

regulii stabilite pentru semne, sensul integrării va fi în sensul acelor unui ceasornic, dacă privim de jos în sus pe direcţia lui $\hat{\mathbf{n}}$. În figura 2.27 dreptunghiul este privit de sus în jos.

Integrala de linie din $\mathbf{A}$ pe un asemenea element de drum depinde de variaţia lui A_x cu y şi variaţia lui A_y cu x. Întrucît A_x are aceeaşi valoare medie şi pe latura superioară a dreptunghiului (fig. 2.27) ca şi pe latura inferioară, evident, contribuţiile acestora în integrala de linie se vor anihila reciproc. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru celelalte laturi ale dreptunghiului. În aproximaţia de ordinul întîi, diferenţa dintre valoarea medie a lui A_x pe segmentul de sus pentru $y + \Delta y$ şi valoarea medie pe segmentul de jos pentru y, este

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y. \tag{80}$$

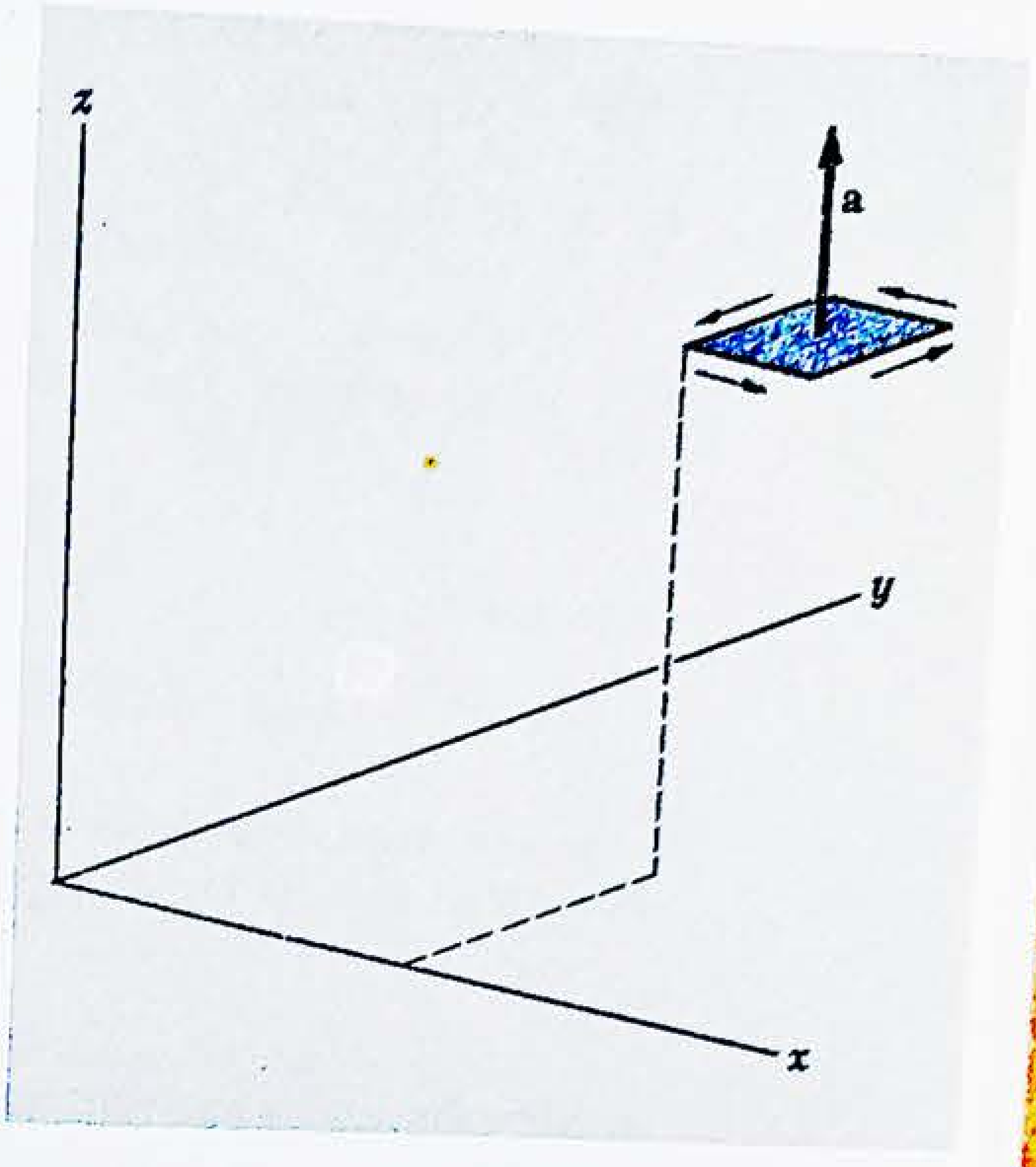


Fig. 2.26. Circulaţia în jurul unei porţiuni dreptunghiulare cu $\hat{n} = \hat{z}$.

Folosim acelaşi raţionament, pe care l-am folosit în figura 2.16, *b*:

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

(la mijlocul segmentului inferior) (81)

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(la mijlocul segmentului superior).

Aceste valori medii s-au obţinut din dezvoltarea în serie Taylor, reţinînd termenii de ordinul întîi. Contribuţia finală în circulaţie este dată de produsul dintre diferenţa lor şi lungimea elementului de drum Δx. Această contribuţie este egală cu $-\Delta x \Delta y(\partial A_x/\partial y)$. Semnul minus apare datorită faptului că integrarea se face de la dreapta la stînga pe latura de sus a dreptunghiului, şi dacă componenta pozitivă A_x este mai mare sus, ea dă o contribuţie negativă în circulaţie. Contribuţia celorlalte laturi este $\Delta y \Delta x(\partial A_y/\partial x)$, semnul fiind pozitiv, întrucît componenta pozitivă A_y este mai mare pe latura din dreapta, contribuţia acestor două laturi în circulaţie este pozitivă.

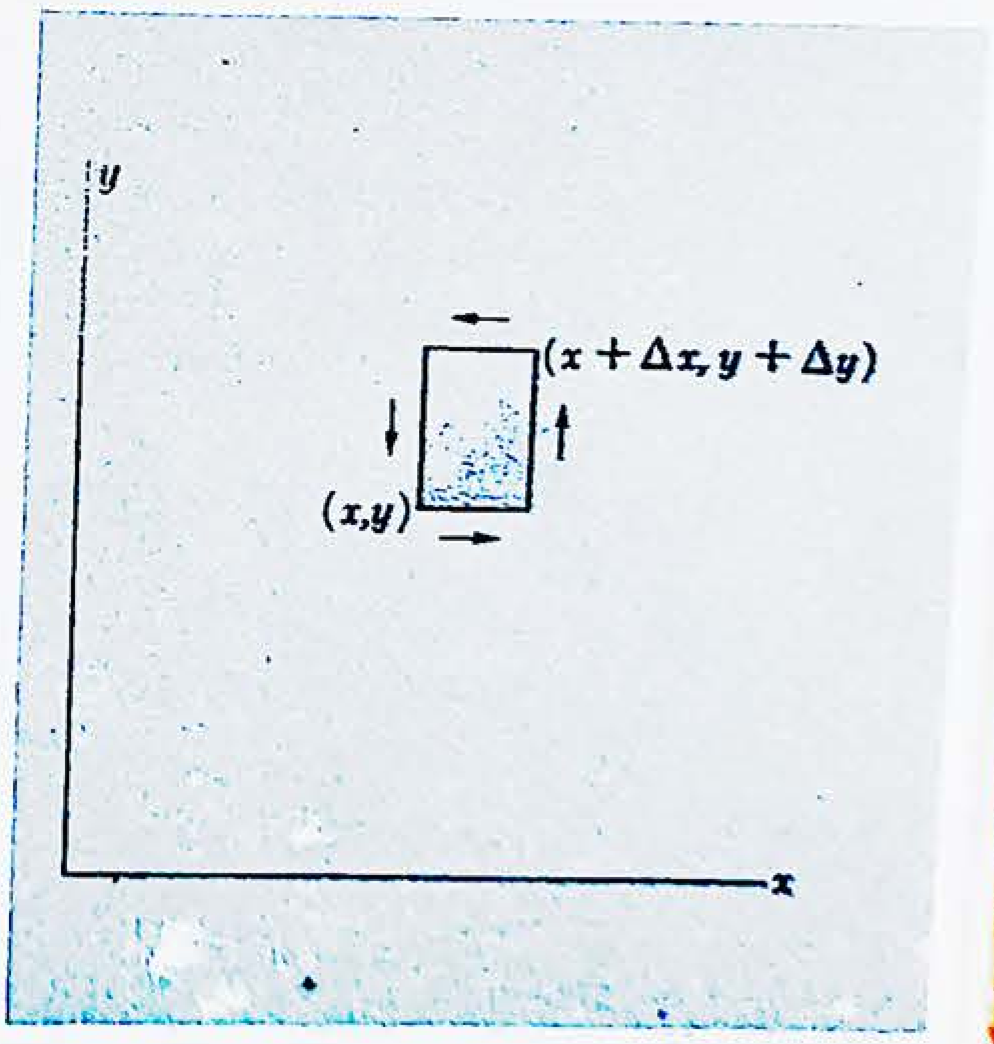


Fig. 2.27. Elementul de suprafaţă din figura 2.26 este privit de sus în jos.

Neglijînd puterile mai mari ale lui Δx şi Δy, integrala de linie pe tot dreptunghiul este

$$\int_{\square} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -(\Delta x)\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta y + (\Delta y)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\Delta x = \Delta x \Delta y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \quad (82)$$

Dar $\Delta x \Delta y$ este aria dreptunghiului, pe care o reprezentăm printr-un vector pe direcţia axei z. Evident, mărimea

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (83)$$

este limita raportului

$$\frac{\text{integrala de linie din jurul suprafeţei}}{\text{aria suprafeţei}} \quad (84)$$

cînd aria suprafeţei tinde către zero. Dacă normala la suprafaţa dreptunghiulară ar fi coincis cu direcţia pozitivă a axei y, am fi găsit expresia

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (85)$$

pentru limita raportului corespunzător, iar dacă normala ar fi coincis cu direcţia axei x, ca suprafaţa din dreapta a figurii 2.28, am fi obţinut

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (86)$$

Deşi am considerat doar suprafeţe dreptunghiulare, în realitate, rezultatul nu depinde de forma suprafeţei elementare şi a conturului ce-o mărgineşte din aceleaşi motive pe care le-am întîlnit în cazul integralelor din teorema divergenţei. Este evident că, de exemplu, putem reuni diferite dreptunghiuri (formînd astfel diferite figuri), integralele de linie pe contururile ce coincid anulîndu-se reciproc (fig. 2.29).

Ajungem la concluzia că, indiferent de orientarea suprafeţei, limita raportului dintre circulaţie şi suprafaţă nu depinde de forma suprafeţei alese. În acest fel, obţinem o formulă generală pentru componentele vectorului rot **F**, dacă **F** este funcţie de x, y şi z:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \quad (87)$$

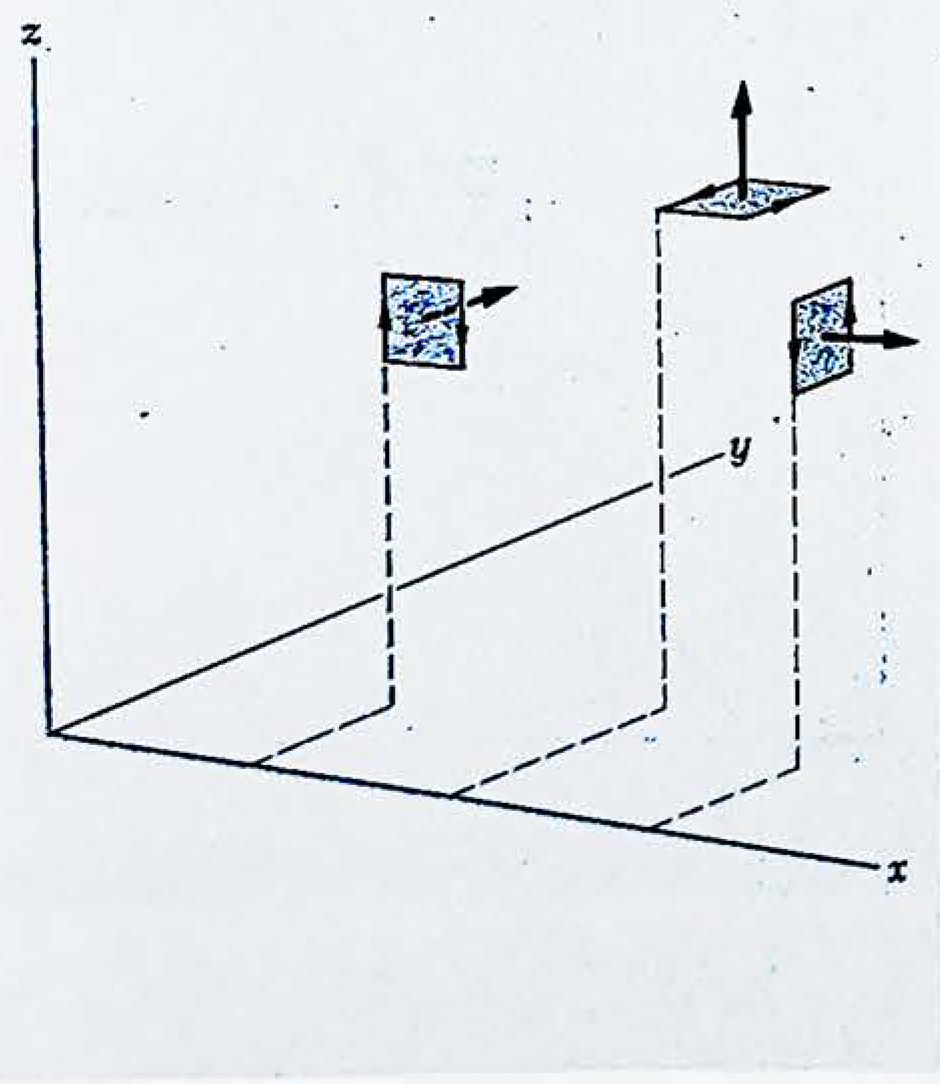


Fig. 2.28. Pentru fiecare orientare, limita raportului dintre circulaţie şi arie determină o componentă a rot **A** în acel punct. Pentru a determina toate componentele vectorului rot **A** într-un punct oarecare, toate suprafeţele vor fi grupate în jurul acelui punct; aici, pentru mai multă claritate, ele sînt reprezentate în puncte diferite.

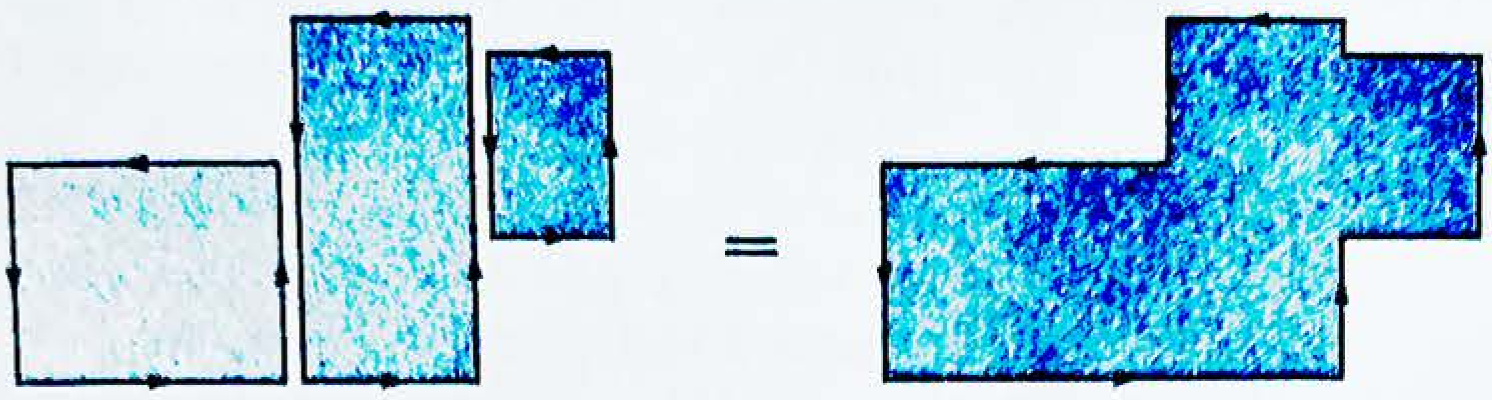


Fig. 2.29. Circulaţia pe conturul din dreapta este egală cu suma circulaţiilor pe contururile dreptunghiurilor; aria suprafeţei din dreapta este suma ariilor dreptunghiurilor. Acest desen arată, de ce raportul dintre circulaţie şi arie este independent de forma contururilor.

Se poate găsi o regulă care este mai uşor de reţinut decît formula. Scriem un determinant de forma:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{88}$$

Se dezvoltă după regula dezvoltării determinanţilor şi se obţine expresia pentru rot **F** ca în ecuaţia (87). Observaţi că componenta x a lui rot **F** depinde de variaţia lui F_z pe direcţia lui y şi de variaţia negativă a lui F_x pe direcţia lui z ş.a.m.d.

Dacă simbolul ∇ este un vector

$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{89}$$

atunci $\nabla \times \mathbf{F}$ este un produs vectorial al cărui rezultat este un vector, numit rot **F**. Astfel, rot **F** şi $\nabla \times \mathbf{F}$ reprezintă acelaşi lucru.

2.18. SEMNIFICAŢIA FIZICĂ A ROTORULUI

Denumirea de „rotor" ne aminteşte că cîmpul vectorial, al cărui rotor este diferit de zero, are circulaţie sau vîrtej. Maxwell folosea cuvîntul *rotaţie* (de unde provine şi prescurtarea rot). Să ne imaginăm un cîmp vectorial de viteze **G** şi să presupunem că rot **G** este diferit de zero. Atunci vitezele, în

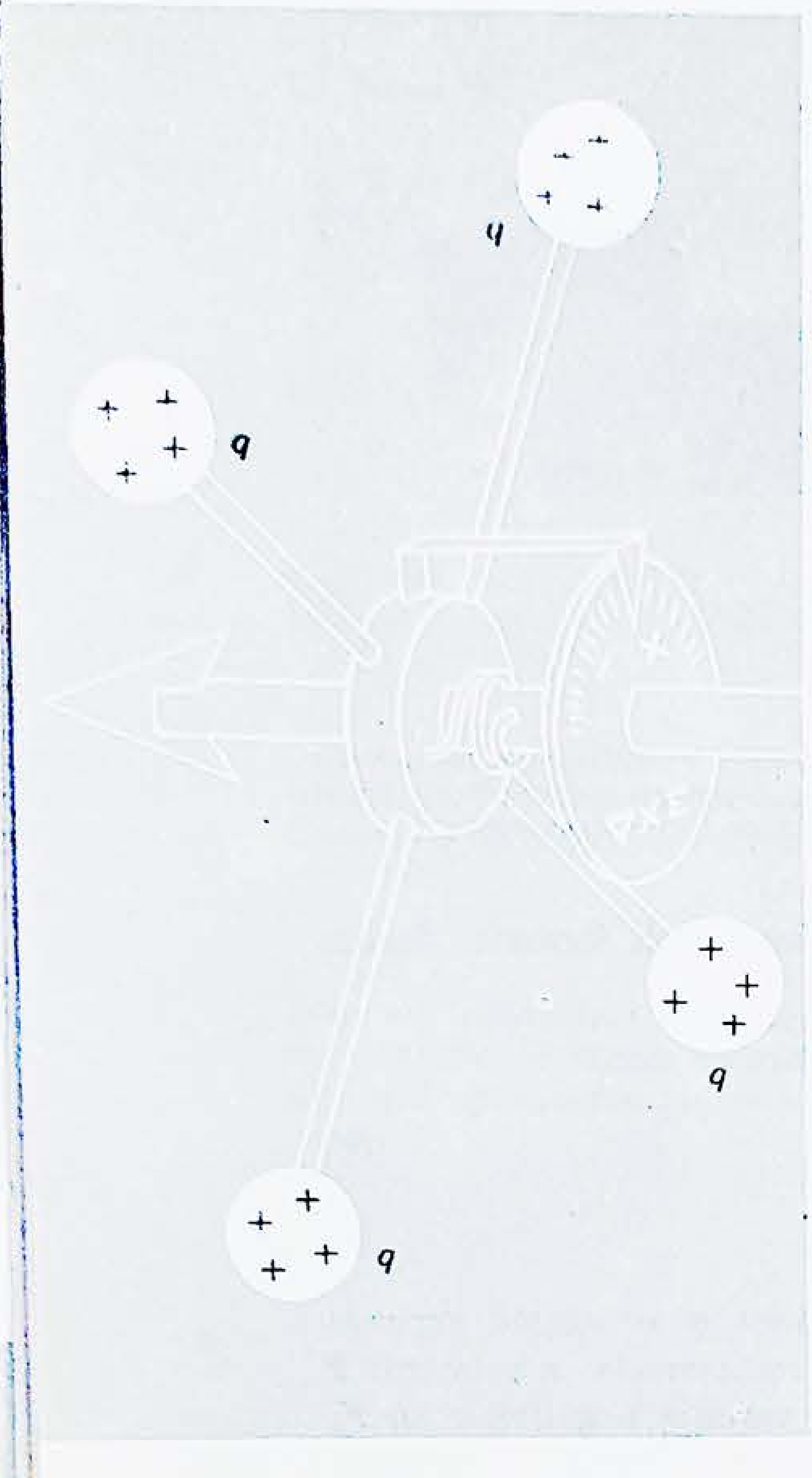
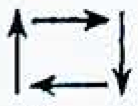
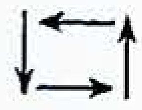


Fig. 2.30. „Rotormetru".

acest cîmp, arată cam așa:  sau  și posibil că se suprapun peste direcția curentului, care curge într-una din direcții. De exemplu, cîmpul de viteze al apei care se scurge dintr-o cadă are, de obicei, aspectul circulației. Rotorul ei este diferit de zero pe cea mai mare parte a suprafeței. Dacă un obiect oarecare plutește pe suprafața apei, el se rotește (v. problemele 2.16 și 2.26). În fizica curgerii fluidelor — în hidrodinamică și aerodinamică — acest lucru este de o deosebită importanță.

Pentru a construi un „rotormetru" pentru cîmpul electric — măcar imaginar — ar trebui să fixăm sarcinile electrice pozitive de butuc cu ajutorul unor spițe izolate ca în figura 2.30. Explorînd un cîmp electric cu acest dispozitiv, am afla că peste tot unde rot **E** este diferit de zero, roata are tendința să se învîrtă în jurul axei sale. Cu ajutorul unui arc care să împiedice rotația s-ar putea determina după mărimea unghiului de răsucire, momentul cuplului care va fi proporțional cu componenta rotorului vectorului **E** pe direcția axei. Dacă putem găsi direcția axului, pentru care momentul cuplului e maxim și este în sensul acelor de ceasornic, atunci aceasta este direcția vectorului rot **E**. (Bineînțeles, nu putem avea încredere într-un rotormetru aflat într-un cîmp care variază puternic chiar în limitele dimensiunilor rotormetrului.)

Ce putem spune, în lumina celor expuse, despre cîmpul electrostatic **E**? Concluzia este simplă: rotormetrul va indica întotdeauna zero! Asta, după cum știm, se explică prin faptul că în cîmpul electrostatic integrala de linie a lui **E**, de-a lungul oricărui contur închis este zero. Amintiți-vă, că integrala de linie a lui **E** între două puncte oarecare P_1 și P_2, ca în figura 2.31, este independentă de drum. Dacă apropiem foarte mult cele două puncte P_1 și P_2, integrala de linie pe cel mai scurt drum este, evident, egală cu zero dacă poziția finală a punctelor nu este o singularitate ca în cazul sarcinii punctiforme; acest caz poate fi exclus. Prin urmare, integrala de linie, pe un contur închis (fig. 2.31, *d*), trebuie să fie egală cu zero. Dar, dacă circulația este zero pe un contur închis *oarecare*, conform teoremei lui Stokes, integrala de suprafață din rot **E** pe o porțiune de orice dimensiune, formă sau poziție, este de asemenea egală cu zero. Dar atunci rot **E** trebuie să fie zero *peste tot*

Fig. 2.31. Dacă integrala de linie între punctele P_1 și P_2 nu depinde de drum, integrala de linie pe un drum închis trebuie să fie zero.



deoarece dacă ar fi diferită de zero într-un loc, am putea alege o porțiune în acea vecinătate contrazicînd, astfel, această concluzie. Toate acestea duc la o concluzie simplă și anume că: în cîmpul electrostatic **E**

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \text{(peste tot)} \tag{90}$$

Cu alte cuvinte, se poate spune că ecuația (90) este o condiție *suficientă* pentru ca un cîmp să fie *conservativ*, adică pentru ca cîmpul să poată fi descris de gradientul unei funcții potențiale oarecare.

Această condiție este ușor de aplicat. Cînd am introdus prima oară funcția vectorială (fig. 2.2), am afirmat că ea reprezintă un posibil cîmp electrostatic. Ca componente am ales $E_x = y$ și $E_y = Kx$ la care, pentru descrierea completă a cîmpului în spațiul tridimensional, putem adăuga $E_z = 0$. Calculînd rot **E**, găsim că:

$$(\text{rot } \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(\text{rot } \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \tag{91}$$

$$(\text{rot } \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0$$

Asta înseamnă că **E** este gradientul unui potențial scalar. Întîmplător, acest tip de cîmp **E** are divergența zero, prin urmare:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{92}$$

Acesta reprezintă un cîmp electrostatic într-o regiune *lipsită de sarcini*.

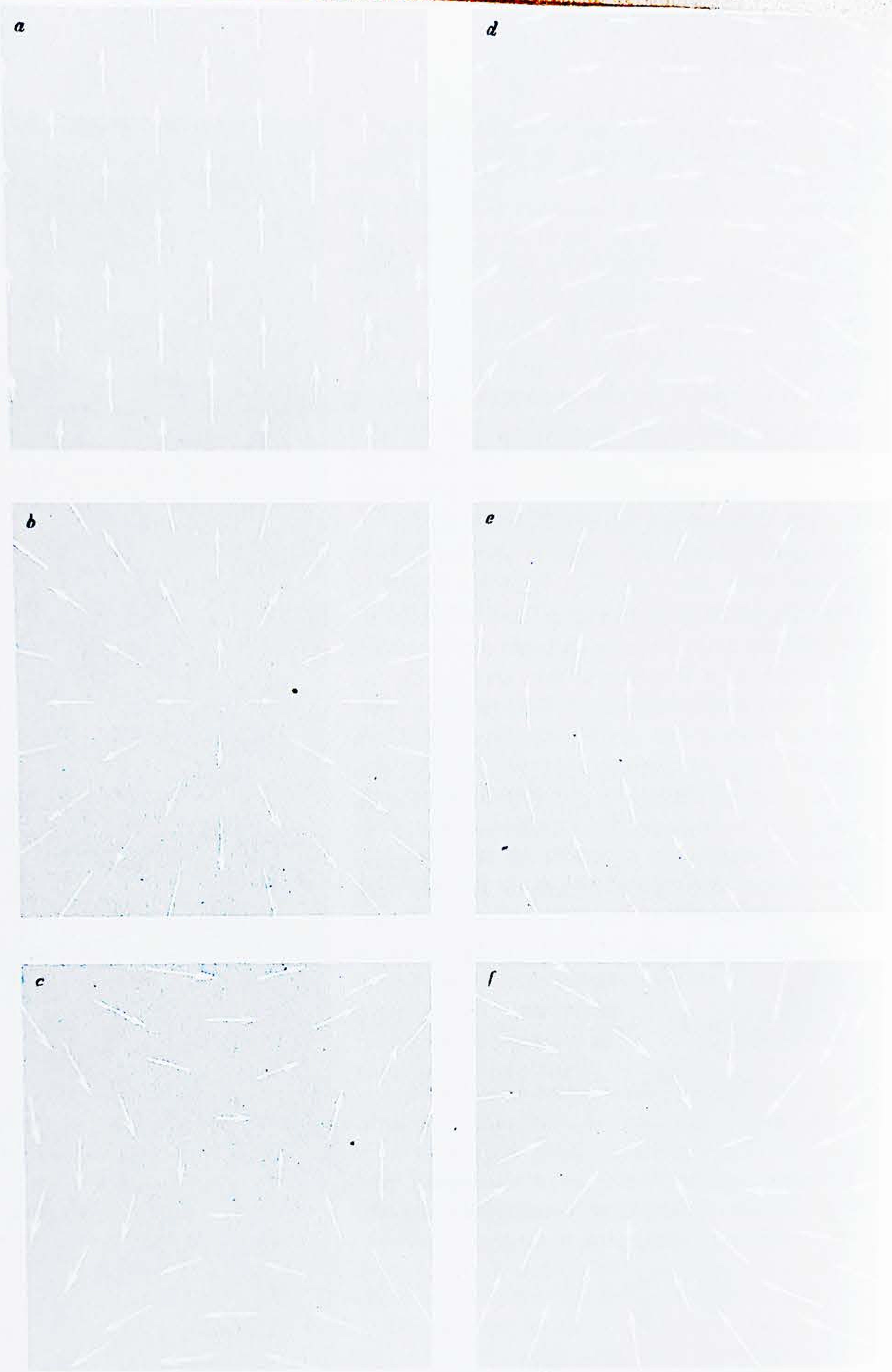


Fig. 2.32. Divergența a patru din aceste cîmpuri vectoriale este zero în regiunea reprezentată. Rotorul a trei dintre ele este zero. Le puteți indica?

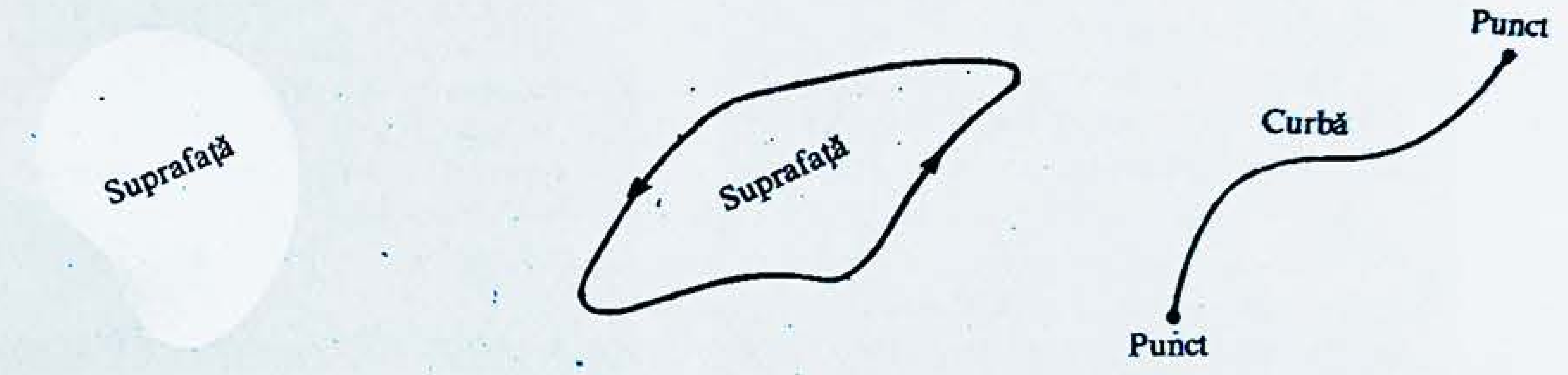
Pe de altă parte, rotorul unei funcţii vectoriale la fel de simple definită de componentele $F_x = Ky$; $F_y = -Kx$; $F_z = 0$, este diferit de zero:

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = -2K. \tag{93}$$

Nici un cîmp electrostatic nu este de această formă. Încercînd să reprezentaţi un asemenea cîmp, veţi vedea imediat că el are circulaţie.

Puteţi să vă formaţi o idee despre asemenea funcţii vectoriale, studiind cîmpurile bidimensionale reprezentate în figura 2.32. Pentru patru din aceste cîmpuri divergenţa funcţiei vectoriale este zero pe întreg domeniul reprezentat. Încercaţi să le identificaţi. Divergenţa implică existenţa unui flux total ce intră sau iese din vecinătatea punctului considerat. Pe unele desene este uşor de observat acest lucru. În alte figuri, se vede imediat că divergenţa este zero. În trei dintre cîmpuri rotorul funcţiei vectoriale este zero pentru toată porţiunea de cîmp reprezentată. Încercaţi să le identificaţi, stabilind pentru fiecare desen dacă integrala de linie de-a lungul unui contur oarecare,

Fig. 2.33. Rezumarea unor relaţii vectoriale.



$$\int_{\text{suprafaţă}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{volum}} \text{div}\,\mathbf{F}\,dv \qquad \int_{\text{curbă}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{suprafaţă}} \text{rot}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{curbă}} \text{grad}\,\varphi\cdot d\mathbf{s}$$

ÎN COORDONATE CARTEZIENE

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{F}$$

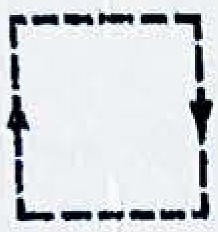
$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$\text{grad}\,\varphi = \hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

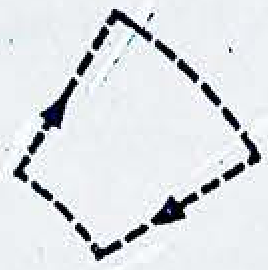
(a)

(a) Observaţi că vectorul rămîne constant, dacă vă mişcaţi pe direcţia lui în sensul indicat. Adică $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. $F_x = 0$. Prin urmare, div F = 0. Observaţi, că integrala de linie de-a lungul conturului punctat nu este zero.



div F = 0 rot F ≠ 0.

(b)



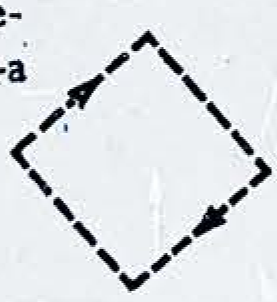
(c) Evident, circulaţia ar putea fi zero de-a lungul contururilor din figură. În realitate, acesta este un posibil cîmp electrostatic, acelaşi ca în figura 2.2. Nu este evident doar din această figură că div F = 0, dar se vede că ea ar putea fi şi zero.

div F = 0 rot F = 0

(c)

(e) Din acelaşi motiv ca mai sus, deducem că div F este zero. Aici, mărimea lui *F* este aceeaşi peste tot, astfel încît integrala de linie de-a lungul porţiunii mai lungi a drumului nu este anulată de integrala de pe porţiunea mai scurtă şi circulaţia este diferită de zero.

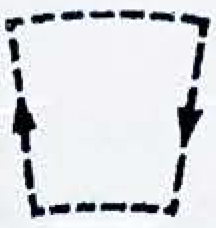




div F = 0 rot F = 0.

(d)

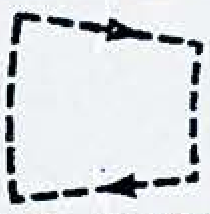
(b) Acesta este un cîmp central. Asta înseamnă că funcţia F este radială şi pentru un *r* dat, mărimea ei este constantă. Rotorul oricărui cîmp central este zero; circulaţia este zero, pe conturul punctat şi pe oricare alt contur. Dar, evident, divergenţa nu este zero.



div F ≠ 0 rot F = 0.

(e)

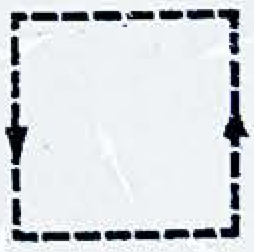
(d) Observaţi că, aici, în aproximaţia de ordinul întîi, mărimea lui F nu variază dacă ne mişcăm pe direcţia lui F. Această condiţie este suficientă pentru ca divergenţa să fie zero. Rezultă că circulaţia pe conturul reprezentat, ar putea fi zero, întrucît *F* este mai slab pe latura mai lungă decît pe cea mai scurtă. În realitate, acesta este un posibil cîmp electrostatic cu *F* proporţional cu 1/*r*, unde *r* este distanţa la un punct aflat în afara figurii.



div F = 0 rot F = 0.

(f)

(f) Este evident că circulaţia pe conturul punctat este diferită de zero. Rezultă, de asemenea, că nici divergenţa nu este zero, întrucît, aşa cum se vede, vectorii converg către centru din toate direcţiile.



div F ≠ 0 rot F ≠ 0.

Fig. 2.34.

este egală sau diferită de zero. Asta este de fapt şi esenţa rotorului. (După ce aţi studiat desenele, meditaţi asupra acestor chestiuni, înainte de a compara raţionamentele voastre cu explicaţiile date în figura 2.34.)

Mai tîrziu, cînd ne vom ocupa de cîmpurile electrice şi magnetice al căror rotor este diferit de zero, rotorul unei funcţii vectoriale ne va fi de un real folos. Am introdus acum noţiunea de rotor deoarece ca idee ea se aseamănă foarte mult cu cea de divergenţă. Putem spune că am întîlnit două feluri de derivate ale unui cîmp vectorial. Una din ele — divergenţa, reprezintă viteza de variaţie a componentei vectorului pe direcţia sa $\partial F_x/\partial_x$ ş.a.m.d. Cealaltă — rotorul, este un fel de „derivată transversală", care reprezintă viteza de variaţie a lui F_x pe direcţia lui y sau z.

Relaţiile numite teoremele lui Gauss şi Stokes, sînt rezumate în figura 2.33. Relaţia dintre funcţia potenţial scalar şi integrala de linie din gradientul ei, poate fi şi ea inclusă în familia acestor teoreme şi ca urmare apare în desen.

PROBLEME

Integrala de linie şi gradientul. Acest cîmp se mai studiază în problemele 2.11 şi 2.20.

2.1. Funcţia vectorială următoare reprezintă un posibil cîmp electrostatic:

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - y^2 \quad E_z = 0$$

Să se calculeze integrala de linie din **E** de la punctul (0, 0, 0) la punctul $(x_1, y_1, 0)$, de-a lungul drumului direct de la (0, 0, 0) la $(x_1, 0, 0)$ şi de aici la punctul $(x_1, y_1, 0)$. Faceţi acelaşi calcul pentru drumul ce parcurge celelalte două laturi ale dreptunghiului format ce trec prin punctul $(0, y_1, 0)$. Dacă afirmaţia este corectă, veţi obţine aceleaşi rezultate. Avînd funcţia potenţială $\varphi(x, y, z)$, calculaţi gradientul acestei funcţii; verificaţi dacă obţineţi astfel componentele cîmpului dat.

Potenţialul a două sarcini punctiforme.

2.2. Să considerăm sistemul format din două sarcini punctiforme ca în figura 2.6. Fie z coordonata pe dreapta ce uneşte cele două sarcini şi sarcina pozitivă aşezată în punctul $z = 0$. Construiţi graficul variaţiei potenţialului φ în funcţie de z, de la $z = -5$ la $z = 15$.

Diferenţa de potenţial dintre două sfere concentrice.

2.3. O sferă mică de rază r este amplasată în centrul unei sfere mai mari de rază R. Sarcinile q, respectiv Q sînt uniform distribuite pe suprafaţa sferelor. Să se calculeze diferenţa de potenţial dintre ele. Observaţi că, dacă q este pozitiv, potenţialul sferei interioare va fi întotdeauna mai mare ca potenţialul sferei exterioare. Prin urmare, dacă se unesc sferele printr-un conductor, sarcina q se va scurge integral pe sfera exterioară, indiferent de mărimea sarcinii Q.

Potenţialul unei vergele încărcate.

2.4. O bară subţire are lungimea măsurată pe axa z între punctele $z = -a$ şi $z = a$. Sarcina este uniform distribuită pe lungimea barei şi este egală cu λ.

Să se calculeze potențialul pentru toate punctele de pe axa x, pentru $x > 0$.

Straturi paralele încărcate.

2.5. Pe fiecare din cele trei plane infinite $x = -a$, $x = 0$ și $x = 0$ există o sarcină de suprafață uniform distribuită, de aceeași densitate σ. Să se găsească cîmpul electric și potențialul pentru tot spațiul, luînd $\varphi = 0$, în punctul $x = 0$.

O distribuție cilindrică de sarcină.

2.6. Pentru cilindrul cu densitate de sarcină uniformă, din figura 2.20:

a) Să se arate că expresia din figură, pentru cîmpul din interiorul cilindrului, rezultă din legea lui Gauss.

b) Să se exprime potențialul φ în funcție de r în interiorul și în afara cilindrului.

c) Să se reprezinte grafic φ în funcție de r. De ce natură este singularitatea din punctul $r = a$?

Potențialul unei plăci cu densitate volumică de sarcină.

2.7. În spațiul dintre planele $y = 0$ și $y = b$ sarcina cu densitatea de volum ρ este uniform distribuită, nemaiexistînd alte sarcini. Să se determine cîmpul electric în fiecare punct al acestui sistem.

Să se determine valoarea aproximativă a funcției potențiale pentru acest cîmp și să se arate că ea satisface ecuația lui Poisson peste tot.

Suprafețe echipotențiale în cîmpul unui disc încărcat.

2.8. Pentru sistemul din figura 2.7, hașurați suprafața echipotențială de la marginea discului. Să se găsească punctul în care ea intersectează axa de simetrie.

Energia unui sistem de sarcini, exprimată în funcție de potențiale. În același mod am calculat energia unor asemenea sisteme în cap. 1.

2.9. Aplicați ecuația (2.42) pentru a determina energia necesară așezării a patru electroni în colțurile unui tetraedru cu latura egală cu 1 Å, în centrul căruia se găsește un proton. Ce puteți spune despre forța rezultantă ce acționează asupra unuia din electroni, dacă semnul energiei este cunoscut?

2.10. Două sfere identice de rază r sînt separate prin distanța $d \gg r$. O sarcină Q este distribuită pe suprafața sferei:

a) Care este energia potențială a sistemului dacă pe fiecare sferă se găsește sarcina $\frac{Q}{2}$?

b) Care este energia potențială dacă întreaga sarcină se află pe una din sfere și pe cealaltă nu e nici o sarcină?

c) Care este potențialul electric pe fiecare din sfere în cazurile *a)* și *b)*?

d) Dacă cele două sfere din *b)* ar fi legate între ele printr-un conductor subțire, astfel încît sarcina să poată trece de pe o sferă pe alta, care va fi configurația finală a sarcinilor? Ce se poate spune despre conservarea energiei?

2.11. Calculînd explicit componentele lui $\nabla \times \mathbf{E}$, să se arate că funcția vectorială din problema 2.1, este un

posibil cîmp electrostatic. (Dacă ați lucrat problema, ați demonstrat, bineînțeles, acest lucru pe altă cale, determinînd funcția scalară al cărei gradient este acest cîmp). Să se evalueze divergența acestui cîmp.

2.12. Satisface funcția $f(x, y) = x^2 + y^2$ ecuația bidimensională a lui Laplace? Dar funcția $g(x, y) = x^2 - y^2$? Reprezentați a doua funcție grafic, calculați gradientul în punctele $(x = 0,\ y = 1)$; $(x = 1,\ y = 0)$; $(x = 0,\ y = -1)$ și $(x = -1,\ y = 0)$ și indicați prin săgeți direcția acestor vectori.

O aplicație simplă a rotorului și teoremei lui Stokes.

2.13. Trasați „liniile de cîmp" pentru funcția vectorială $\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ în planul xy. Calculați rotorul lui $\mathbf{A}$ și desenați vectorul care indică direcția lui. Calculați integrala de linie

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

pe curba închisă $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. Arătați că teorema lui Stokes este valabilă, calculînd integrala de suprafață din $\nabla \times \mathbf{A}$ pe suprafața mărginită de această curbă.

2.14. Calculați rotorul și divergența pentru fiecare din următoarele cîmpuri vectoriale:

a) $F_x = x + y;\ F_y = -x + y;\ F_z = -2z.$

b) $G_x = 2y;\ G_y = 2x + 3z;\ G_z = 3y.$

c) $H_x = x^2 - z^2;\ H_y = 2;\ H_z = 2xz.$

Dacă găsiți că rotorul este egal cu zero, încercați să determinați funcția scalară φ, al cărui cîmp vectorial este gradientul.

O teoremă vectorială importantă.

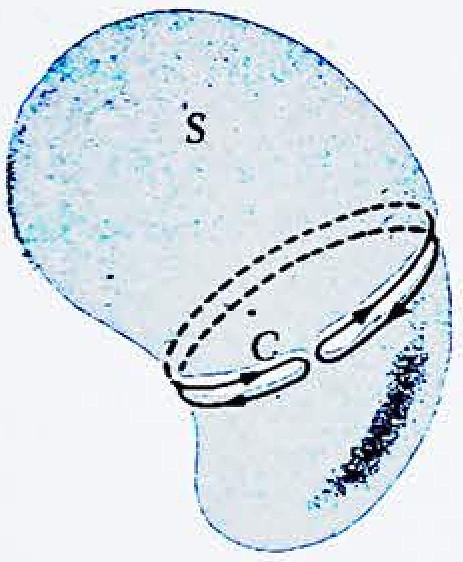


Fig. la problema 2.15

2.15. Dacă $\mathbf{A}$ este un cîmp vectorial oarecare cu derivate continue, div (rot $\mathbf{A}$) = 0 sau $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$. Vom avea nevoie de această teoremă mai tîrziu. Scopul problemei este demonstrarea acestei teoreme. Există două căi diferite în care se poate demonstra:

a) Calculul direct într-un sistem de coordonate bine determinat. Folosind expresia lui ∇ în coordonate carteziene, deduceți derivatele parțiale de ordinul doi de tipul $\nabla(\nabla \times \mathbf{A})$.

b) Folosind teorema divergenței și teorema lui Stokes nu e necesară precizarea sistemului de coordonate. Considerăm o suprafață S ca în figura 2.15, și anume, un balon aproape tăiat în două și înconjurat de curba închisă C. Aplicați integrala de linie pe curba C, pentru un cîmp vectorial oarecare. Aplicați apoi teoremele lui Stokes și Gauss.

Exemple din fizică de cîmpuri vectoriale de viteze cu o simetrie particulară: simetrie axială, viteza fiind orientată pe o circumferință.

2.16. Fie funcția vectorială $\mathbf{v}(x, y, z)$, care reprezintă viteza într-un punct oarecare dintr-un fluid. Fluidul se consideră incompresibil, adică, densitatea este aceeași peste tot. Înseamnă că viteza transportului de substanță printr-o suprafață oarecare — un mic cadru fixat în spațiu, va fi proporțională cu $\mathbf{v}$. Rezultă că dacă $\mathbf{v}$, într-un punct oarecare, este constant în timp și dacă proprietățile

substanţei nu se schimbă, atunci div **v** trebuie să fie zero peste tot. De ce? Această situaţie este incidentală, de fapt problema se referă mai mult la rot **v**. Să considerăm cazul cînd liniile de curent sînt independente de timp, simetrice faţă de o axă oarecare, **v** fiind tot timpul orientat pe o circumferinţă. Înseamnă că **v**, în orice punct, este un vector perpendicular pe planul ce cuprinde punctul şi axa. Simetria fiind axială, e convenabil să alegem coordonate polare z, r şi φ. Mai impunem condiţia ca **v** să fie funcţie numai de r. Atunci, orice curgere de acest tip poate fi descrisă de $\mathbf{v} = \hat{\varphi} v(r)$, unde $\hat{\varphi}$ este un vector perpendicular pe $\hat{\mathbf{r}}$ şi $\hat{\mathbf{z}}$. Pornind de la definiţia rot **v** în funcţie de integrala de linie pe o porţiune mică, arătaţi că pentru cîmpurile cu această simetrie, rot **v** este dat de expresia

$$\text{rot } \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} (rv(r))$$

Folosiţi această expresie pentru a studia cazurile particulare, corespunzătoare următoarelor funcţii $v(r)$:

a) Fluidul se mişcă ca un corp rigid, rotindu-se în jurul axei cu viteza unghiulară ω. Care este expresia rot **v** în acest caz?

b) Fluidul se mişcă astfel încît rot $\mathbf{v} = 0$. Este aceasta valabilă peste tot? Care este funcţia $v(r)$? Încercaţi să schiţaţi o asemenea curgere.

c) Mişcarea fluidului este de aşa natură încît $v(r)$ este dat de legea lui Kepler pentru mişcarea circulară a planetelor. Care este rot **v**? Poate fi această mişcare asemuită cu mişcarea inelelor lui Saturn?

Deducerea formulei generale pentru energia înmagazinată în cîmpul electric.

2.17. Ecuaţia (36) şi echivalentul ei (39) am dat-o fără demonstraţie. Dar demonstrarea ecuaţiei (43) o putem face pornind invers. Astfel, vom demonstra că ecuaţia (39) derivă din ecuaţia (43). Pentru a face acest lucru, ne vom folosi de:

a) identitatea vectorială $\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f$ care poate fi folosită fără demonstraţie, aceasta nefiind complicată.

b) ecuaţia lui Poisson.

c) teorema divergenţei.

Capitolul 3

Cîmpul electric în jurul conductorilor

3.1. Conductori şi izolatori 100
3.2. Conductori în cîmp electrostatic 101
3.3. Problema fundamentală a electrostaticii; teorema unicităţii 107
3.4. Cîteva sisteme simple de conductori 109
3.5. Condensatori şi capacitate 114
3.6. Potenţiale şi sarcini pe diferiţi conductori 117
3.7. Energia înmagazinată într-un condensator 119
3.8. Alte aspecte ale problemei la limită 120
Probleme 123

3.1. CONDUCTORI ŞI IZOLATORI

Chiar de la primele experienţe din domeniul electricităţii, s-a observat că substanţele diferă după capacitatea lor de a păstra „acel ceva electric". Unele materiale pot fi uşor electrizate prin frecare şi menţinute în această stare; altele, se pare, nu pot fi electrizate pe această cale şi dacă se electrizează nu-şi menţin această stare. Experimentatorii de la începutul secolului al XVIII-lea au clasificat substanţele în „electrice" şi „neelectrice". În jurul anului 1730, în Anglia, experienţele lui Stephen Gray au arătat că, „acel ceva electric" poate fi transmis de la un corp la altul cu ajutorul unei sfori orizontale, la o distanţă de cîteva sute de metri dacă sfoara este, la rîndul ei, suspendată cu nişte fire de mătase.* Odată stabilită diferenţa dintre conductor şi neconductor, electrotehnicienii acelor timpuri au observat că chiar substanţele „neelectrice" pot fi puternic electrizate dacă sînt aşezate pe sticlă sau suspendate de un fir de mătase. Un rezultat spectaculos al uneia dintre popularele demonstraţii de electricitate din acel timp era probabil electrizarea unui băieţel, suspendat de căpriori cu ajutorul unor fire de mătase: părul i se ridica vîlvoi, iar din vîrful nasului se puteau scoate scîntei.

După lucrările lui Gray şi ale contemporanilor săi, substanţele „neelectrice" şi „electrice" s-au denumit *izolatori* electrici şi *conductori* electrici. Această deosebire între proprietăţile substanţelor a rămas pînă în zilele noastre una din cele mai uluitoare contraste ale naturii. Conductibilitatea electrică a conductorilor buni obişnuiţi, ca de exemplu metalele, depăşeşte conductibilitatea electrică a izolatorilor obişnuiţi, ca sticla şi plasticul, de 10^{20} de ori. În lumina concepţiilor secolului al XVIII-lea, experimentatori ca Gray sau Benjamin Franklin, ar fi explicat acest lucru astfel: un glob metalic, aşezat pe un postament de metal, îşi pierde electrizarea într-o milionime de secundă pe cînd acelaşi glob, aşezat pe un postament de lemn, şi-o poate păstra mai mulţi ani. (Pentru demonstrarea ultimei afirmaţii, trebuie luate anumite măsuri de precauţie, care nu erau la îndemîna laboratoarelor din secolul al XVIII-lea. Puteţi numi cîteva dintre ele?) Deosebirea dintre un bun conductor şi un bun izolator, din punct de vedere electric, este tot atît de mare ca deosebirea dintre un lichid şi un solid, din punct de vedere mecanic. Acest lucru nu este chiar întîmplător. Comportarea electrică ca şi cea mecanică a corpului depinde de *mobilitatea* particulelor atomice: conductibilitatea electrică depinde de mobilitatea purtătorilor de sarcină —

---

* Fără îndoială, că „sfoara" utilizată în experienţele lui era, în comparaţie cu o sîrmă, slab conductoare însă suficient de bună pentru transferul de sarcină în experienţe electrostatice. Tot Gray a observat că o sîrmă subţire de cupru este conductor şi totuşi pentru transportul sarcinilor la distanţe mari s-a folosit de sfoară.

electroni sau ioni; iar proprietățile mecanice depind de mobilitatea atomilor sau moleculelor, care determină structura substanței. Analogia poate fi dusă puțin mai departe dacă amintim substanțele a căror fluiditate este intermediară, plasîndu-se între solid și lichid, ca de exemplu, smoala și îngheţata. Într-adevăr, unele substanțe (sticla constituie un exemplu bun) prin scăderea temperaturii cu cîteva sute de grade, își schimbă treptat și continuu proprietățile, pe măsura trecerii din starea fluidă în starea de solid rigid. Conductibilitatea electrică a unor substanțe variază, de asemenea, într-un interval larg, cuprins între „buni conductori" și „buni izolatori", în funcție de temperatura lor. De această proprietate și de încă multe alte proprietăți interesante, se bucură o clasă excepțională de materiale, cu multe aplicații, numite semiconductoare.

Una și aceeași substanță poate fi solidă sau lichidă, în funcție de timpul și probabil, de distanța considerată. Dacă țineți în mînă o bucată de asfalt natural, ea vi se pare destul de solidă. Din punct de vedere geologic, ea este lichidă, provenind din straturile subterane, putînd forma chiar lacuri. Din motive similare, ne putem aștepta ca un material să fie considerat izolator sau conductor, în funcție de timpul la care studiem fenomenul respectiv.

Vom ajunge la concluzia, că pentru o clasă destul de simplă și de generală de fenomene criteriul de clasificare este *numai* timpul și nu distanța.

3.2. CONDUCTORI ÎN CÎMPUL ELECTROSTATIC

Vom studia, la început, sistemele electrostatice formate din conductori. Ca urmare, ne va interesa starea *staționară* a sarcinii și cîmpului electric, care se stabilește după redistribuirea sarcinilor în conductori. Toți izolatorii pe care îi vom întîlni îi vom considera izolatori perfecți. După cum am amintit, chiar și izolatorii cei mai obișnuiți nu sînt prea departe de această idealizare, astfel încît sistemele studiate nu sînt prea artificiale. Exemplul următor ne poate clarifica asupra tipului de sistem la care ne referim. Luăm două sfere metalice încărcate, izolate una de alta și de alte corpuri. Le fixăm relativ aproape una de alta. Care este cîmpul electric rezultat în spațiul dintre sfere și din jurul lor și care este sarcina distribuită pe fiecare din sfere? Să începem cu o chestiune mai generală: ce se poate spune despre cîmpul electric din interiorul substanței conductoare, după ce purtătorii de sarcină au încetat să se mai miște?

În starea staționară nu există purtători de sarcină în mișcare. Ați putea fi tentați să afirmați că cîmpul în interiorul substanței conductoare trebuie să fie nul. Ați putea argumenta că, dacă cîmpul n-ar fi zero, asupra purtătorului mobil de sarcină s-ar exercita o forță care l-ar pune în mișcare și ca urmare nu va mai fi o stare staționară. O asemenea argumentare elimină posibilitatea existenței *altor* forțe care ar putea acționa asupra purtătorilor de sarcină și care ar putea echilibra forțele electrice, determinînd astfel o stare staționară. Din punct de vedere fizic, în afara forțelor electrice, asupra purtătorilor de sarcină mai poate acționa forța gravitațională. Ionul pozitiv are greutate, asupra lui, în cîmpul gravitațional, acționează o forță; același lucru este valabil și pentru electron. Forțele ce se exercită asupra lor nu sînt egale. Acest exemplu este destul de absurd. Știm că la scară atomică forțele gravitaționale sînt neglijabile. Există alte forțe, pe care le-am putea numi „chimice". Într-o baterie și în multe alte exemple în care au loc reacții chimice, inclusiv

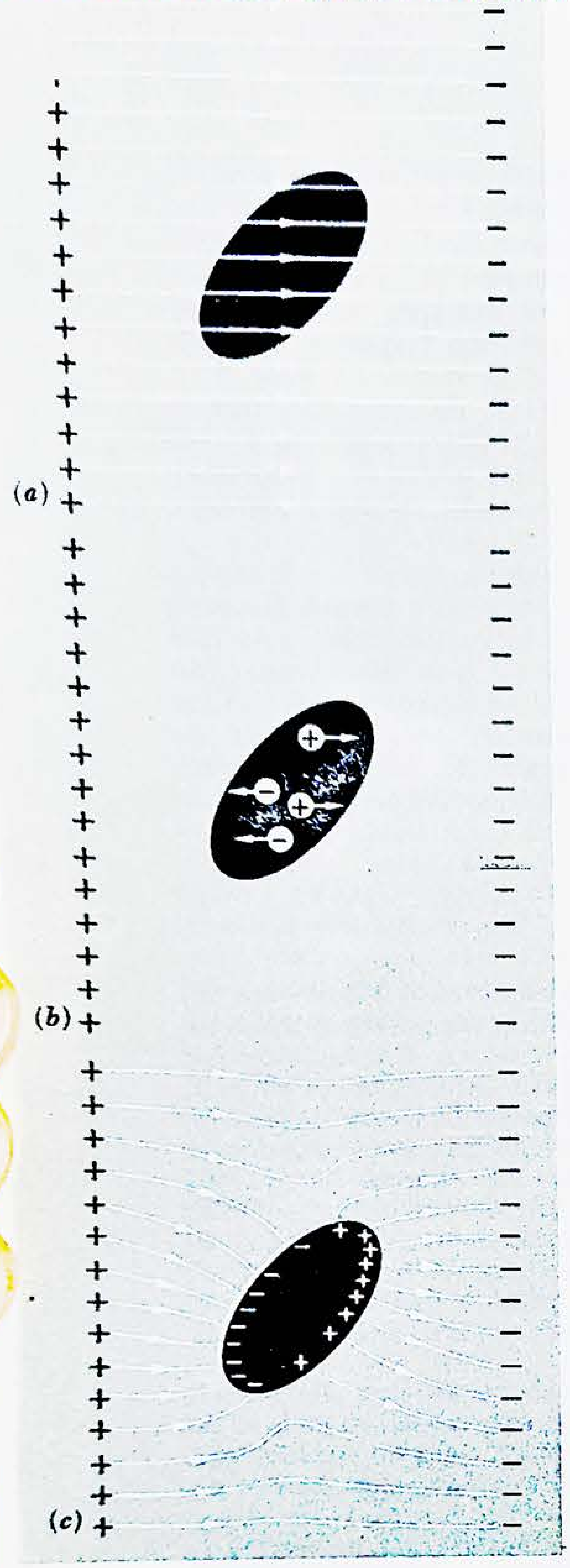


Fig. 3.1. Corpul din *(a)* este un izolator neutru. Sarcinile din interiorul lui, pozitive și negative, nu se mișcă. În *(b)* sarcinile eliberate încep să se miște. Ele se vor mișca pînă la atingerea stării finale din *(c)*.

celula vie, purtătorii de sarcină se mișcă, uneori, *în sens opus* cîmpului electric; în acest fel se consumă mai puțină energie decît necesita reacția chimică. Ezităm să numim aceste forțe neelectrice știind că structura atomilor și moleculelor și forțele ce se exercită între ele, pot fi explicate cu ajutorul legii lui Coulomb și a mecanicii cuantice. Totuși, din punct de vedere al teoriei clasice a electricității, ele trebuie considerate de altă natură. Ele se și comportă diferit de forțele pe baza cărora ne-am fundamentat teoria și care sînt invers proporționale cu pătratul distanței. Despre necesitatea luării în considerare și a forțelor de altă natură, așa-numite neelectrice, am vorbit și în capitolul 2, observînd că forțele ce variază invers proporțional cu distanța nu pot explica structura statică stabilă. Rezultă, de fapt, că în unele cazuri, trebuie să admitem posibilitatea existenței unor forțe neechilibrate, necoulombiene, care acționează asupra purtătorilor de sarcină din interiorul substanței conductoare. În aceste cazuri, starea electrostatică se atinge doar prin *prezența* unui cîmp electric finit în conductor care anihilează influența altor forțe, de orice natură.

Ținînd cont de cele spuse, ne întoarcem la cazul, bine cunoscut și important, cînd asemenea forțe nu există — cazul unui material conductor omogen și izotrop. Într-un asemenea conductor, în cazul static, putem afirma cu siguranță că cîmpul electric este nul*. În caz contrar purtătorii de sarcină ar fi trebuit să se miște. Rezultă că, toate regiunile din interiorul conductorului inclusiv toate punctele aflate chiar sub suprafața sa, trebuie să aibă același potențial. Se știe că la trecerea din interiorul conductorului spre exteriorul său poten-

* Prin cîmpul electric din interiorul conductorului înțelegem valoarea medie a cîmpului, mediat pe un volum mare în comparație cu dimensiunile unei structuri atomice. Știm că în toate substanțele, inclusiv conductoare, la scară microscopică, în apropierea nucleului atomic, există cîmpuri foarte puternice. De fapt, particulele alfa, cu care Rutherford, Geiger și Marsden au bombardat foița de aur (v. vol. I, cap. 15, nota istorică 1), erau deviate tot de un cîmp electric. În general, cîmpul electric al nucleului nu este luat în considerare în cîmpul mediu din substanță, întrucît într-o parte a nucleului are un sens și în alta — sens opus. Modul de determinare și de măsurare al acestui cîmp mediu nu-l vom studia acum.

ţialul suferă o variaţie bruscă (v. probl. 3.21). Dar într-un conductor omogen şi izotrop, cel pe care-l avem în vedere acum, variaţia va fi aceeaşi pe toată suprafaţa conductorului. În exteriorul conductorului cîmpul electric nu este nul. Suprafaţa conductorului trebuie să fie o suprafaţă echipotenţială a acestui cîmp.

Să ne imaginăm că putem transforma substanţa, după dorinţă, din izolator în conductor. (Acest lucru nu este imposibil — sticla, prin încălzire, devine conductoare; orice gaz poate fi ionizat de razele X). În figura 3.1, *a* este arătat un izolator neîncărcat, în cîmpul electric produs de două straturi de sarcini fixe. Cîmpul electric în interiorul şi în exteriorul corpului este acelaşi. (Un corp dens, de exemplu sticla, ar putea deforma cîmpul; acest efect îl vom studia în cap. 9, dar aici nu este important.)

Acum, într-un fel sau altul, creăm sarcini mobile (sau ioni), care să transforme corpul într-un conductor. Aşa cum se vede în figura 3.1, *b*, sub acţiunea cîmpului ionii pozitivi se vor îndrepta într-un sens, iar ionii negativi în sens opus. Ei nu vor trece de suprafaţa conductorului; îngrămădindu-se în apropierea suprafeţei, ei creează un cîmp electric propriu în interiorul corpului care tinde să anihileze cîmpul iniţial. Mişcarea sarcinilor va continua pînă la anihilarea completă a cîmpului iniţial. Distribuţia finală a sarcinilor pe suprafaţă (fig. 3.1, *c*) este astfel încît, cîmpul creat de ele şi cîmpul surselor fixe externe se combină dînd un cîmp electric nul în interiorul conductorului.

Deoarece o asemenea compensaţie are loc automat, în orice conductor, în cazul cîmpurilor externe, va trebui să luăm în considerare doar suprafaţa conductorului.

Ţinînd cont de cele spuse, să vedem ce putem spune despre un sistem de conductori diferit încărcaţi, aflaţi într-un spaţiu lipsit de alte sarcini. Aceşti conductori sînt reprezentaţi în figura 3.2. Putem să considerăm, de exemplu, că reprezintă nişte piese din metal, iar nişte izolatori invizibili — asemănători cu firele de mătase ale lui Stephen Gray — împiedică mişcarea lor. Sarcina totală a fiecărui obiect, adică cu cît depăşeşte numărul sarcinilor pozitive pe cel al sarcinilor negative, rămîne neschimbată deoarece orice scurgere de sarcină este imposibilă. Notăm sarcina totală a conductorului k cu Q_k. De asemenea, fiecare obiect poate fi caracterizat prin valoarea bine determinată a potenţialului electric φ_k. Spunem că conductorul *2* „se află la potenţialul φ_2". Într-un asemenea sistem, în care la infinit nu se află obiecte fizice, este comod să alegem potenţialul zero, într-un punct aflat la infinit. În acest caz, φ_2 este lucrul mecanic pe unitatea de sarcină efectuat pentru a aduce un corp de probă infinitezimal cu sarcina unitate de la infinit într-un punct oarecare de pe suprafaţa conductorului *2*. (Observaţi că, conform celor discutate în paragraful 1.7, acesta este tipul de sistem în care sarcina trebuie să fie mică.)

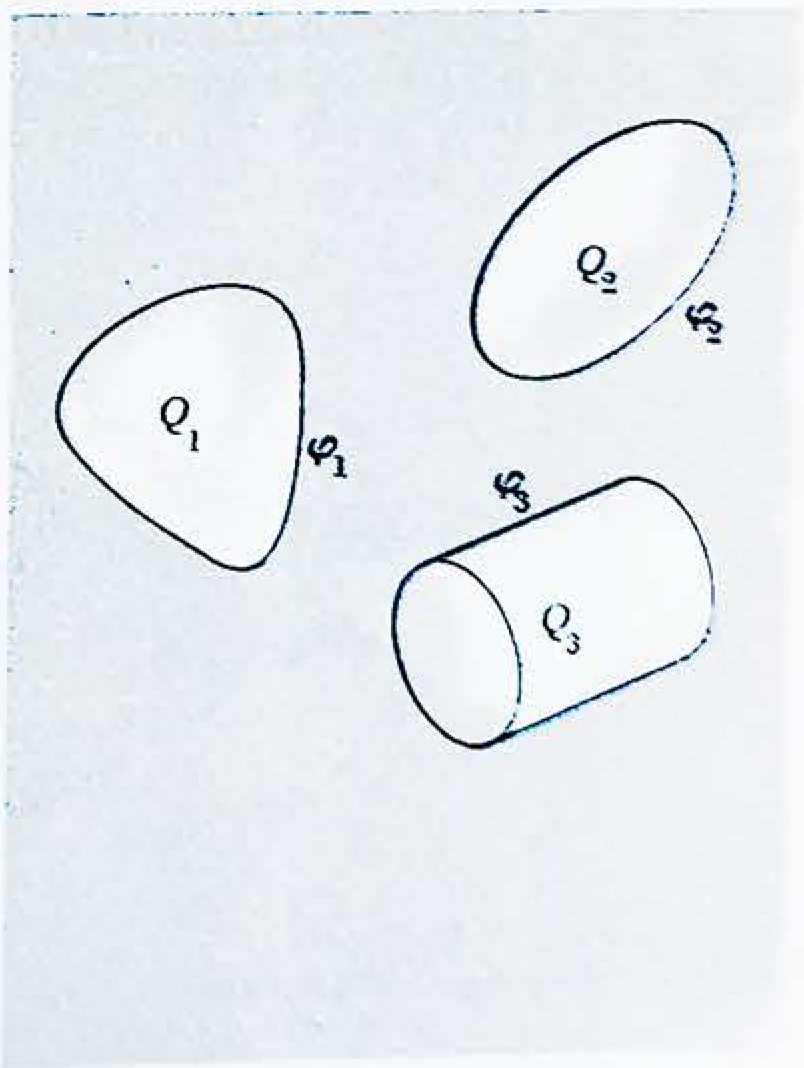


Fig. 3.2. Un sistem de trei conductori. Q_1 este sarcina conductorului 1, φ_1 este potenţialul său ş.a.m.d.

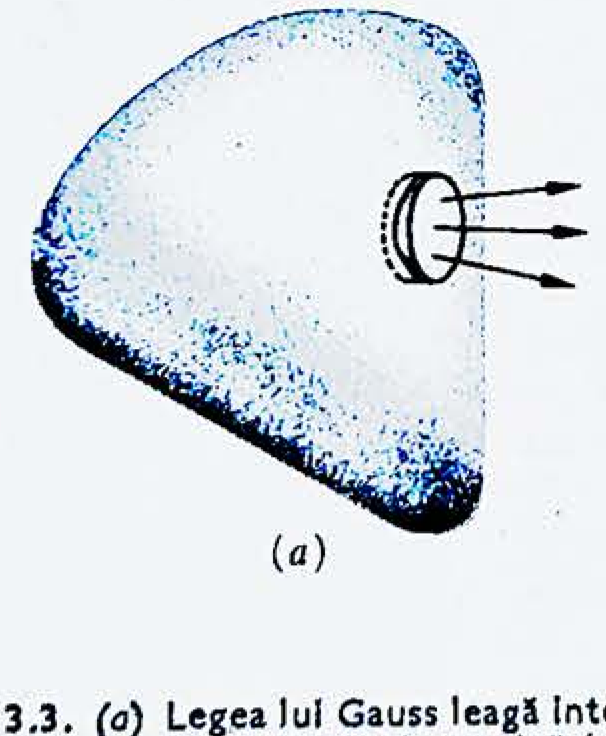
Deoarece suprafaţa conductorului din figura 3.2 este neapărat o suprafaţă cu potenţial constant, cîmpul electric, care este egal cu $-\text{grad}\ \varphi$, trebuie să fie *perpendicular* la suprafaţă în orice punct. La trecerea din interiorul spre exteriorul conductorului, la suprafaţa lui se observă că intensitatea cîmpului electric variază brusc; pe suprafaţa exterioară a conductorului **E** este diferit de zero şi este nul în interior. Discontinuitatea lui **E** se explică datorită prezenţei pe suprafaţă a sarcinii de densitate σ pe care, cu ajutorul teoremei lui Gauss, o putem lega direct de **E**. Să alegem o „cutie" plată care să cuprindă un element de suprafaţă (fig. 3.3), la fel cu cea folosită la analiza discului încărcat din paragraful 2.6. În acest caz, prin faţa cutiei care se află în interiorul conductorului nu există flux şi rezultă că $E_n = \sigma/\varepsilon_0$, unde E_n este componenta normală la suprafaţă a intensităţii cîmpului electric. Întrucît, aşa cum am văzut, în acest caz cîmpul este perpendicular pe suprafaţă, nu există altă componentă. Sarcina superficială va fi sarcina totală Q_k. Înseamnă că integrala de suprafaţă din σ, pe tot conductorul, va fi egală cu Q_k. Se pot trage următoarele concluzii, valabile pentru *orice* asemenea sistem de conductori, indiferent de forma şi aşezarea lor:

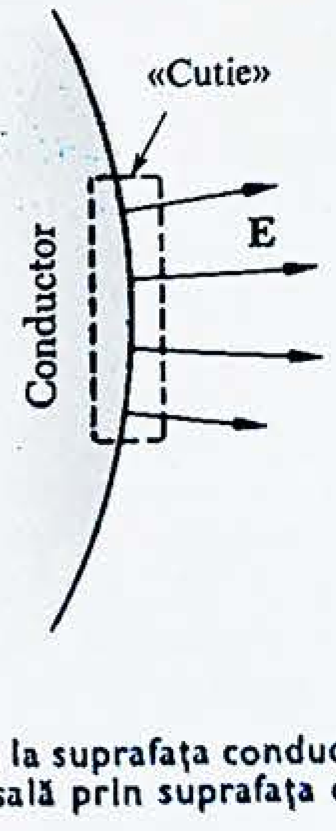
$\varphi = \varphi_k$ în toate punctele de pe suprafaţa conductorului k (1)

În orice punct din exteriorul conductorului, **E** este perpendicular la suprafaţă şi $E = \sigma/\varepsilon_0$, unde σ este densitatea de sarcină superficială (2)

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma\, da = \varepsilon_0 \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \qquad (3)$$

Întrucît (2) leagă în mod univoc pe **E** de σ (densitatea de sarcină superficială locală), am fi tentaţi să credem că σ este sursa lui **E**. Asta ar fi eronat. **E** este intensitatea cîmpului total creat de *toate* sarcinile din sistem, apropiate şi îndepărtate; sarcina superficială reprezintă doar o parte din aceste sarcini. Sarcina superficială este obligată „să se rearanjeze" pînă cînd este satisfăcută relaţia (2). Figura 3.4 pune în evidenţă faptul că, în comparaţie cu alte distribuţii superficiale de sarcină, conductorul este un caz special.





(*a*) (*b*)

Fig. 3.3. (*a*) Legea lui Gauss leagă intensitatea cîmpului electric de la suprafaţa conductorului de densitatea superficială de sarcină (ec. 2). (*b*) Secţiune transversală prin suprafaţa conductorului şi a cutiei.

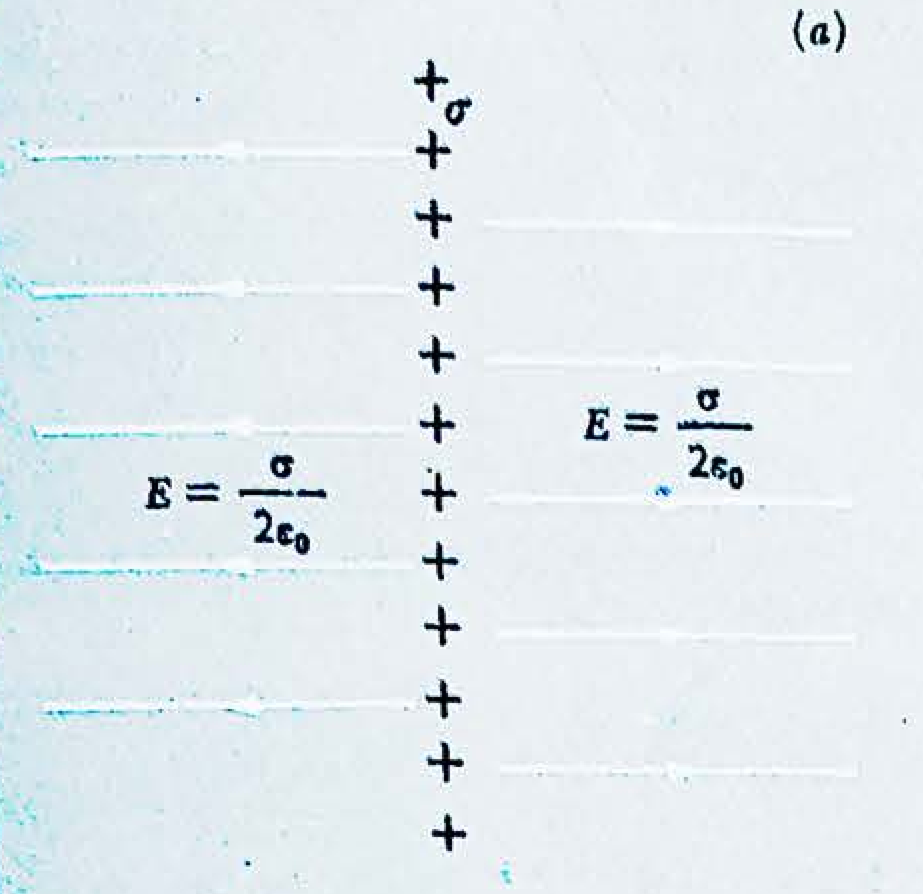
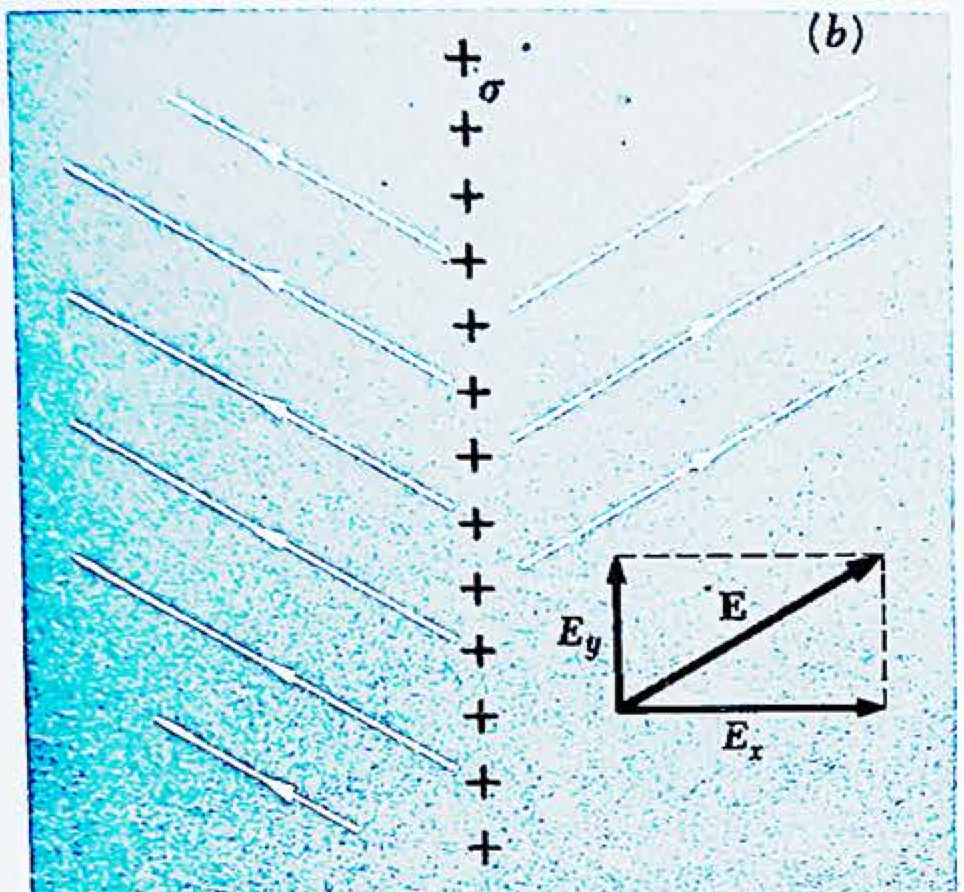
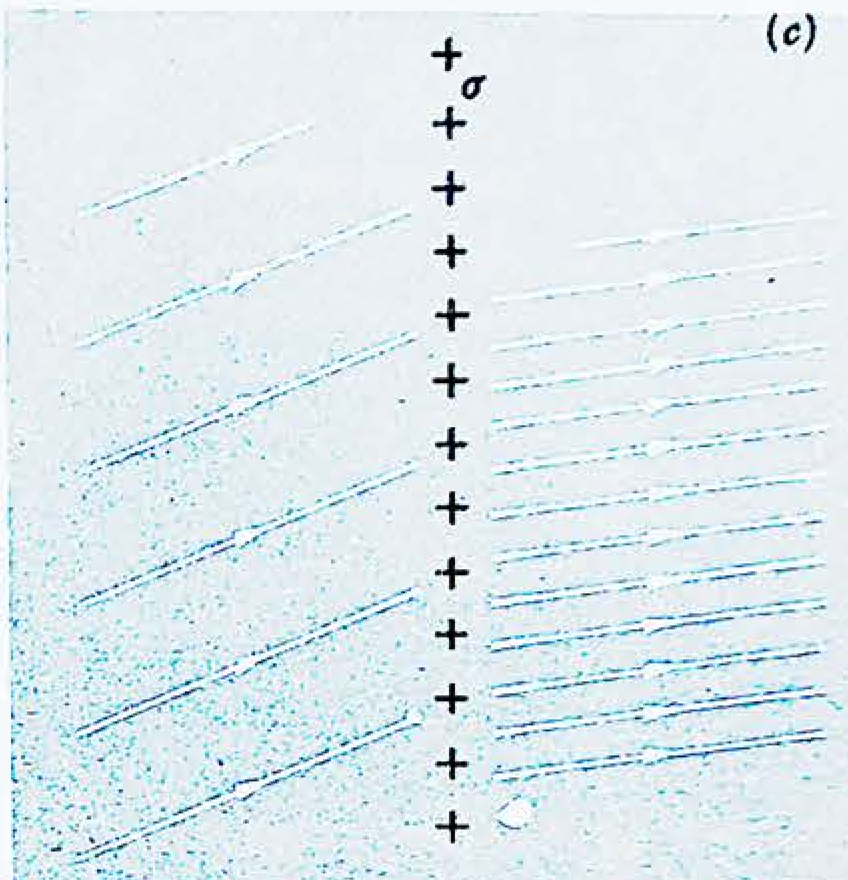


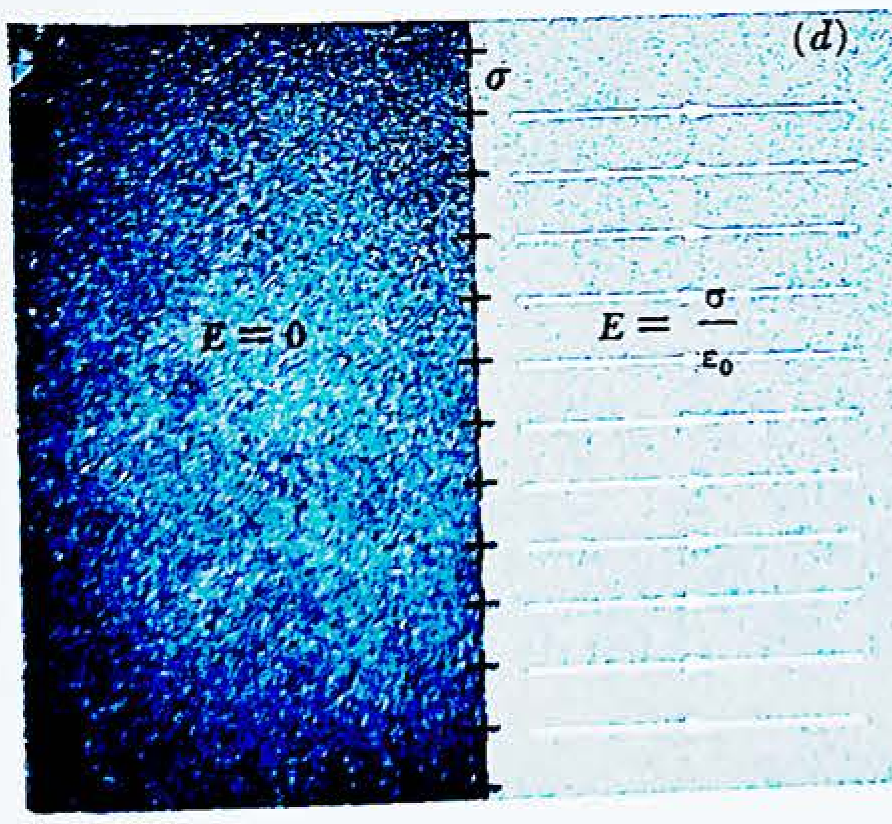
Fig. 3.4. *(a)* Un strat izolat de sarcină superficială. Acest sistem a fost studiat în figura 1.23. Din considerente de simetrie, s-a determinat cîmpul pe fiecare parte a stratului care este $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



(b) Dacă există alte sarcini în sistem, putem doar afirma că variația lui E_y la suprafață va fi $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, iar variația componentei E_y este egală cu zero.



(c) Multe cîmpuri, diferite de cel din *(a)*, pot avea această proprietate. Două din ele sînt reprezentate în *(b)* și *(c)*.



(d) Dacă știm că mediul de pe una din părți este conductor, atunci pe cealaltă parte trebuie ca cîmpul **E** să fie perpendicular pe suprafață și are mărimea $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$;

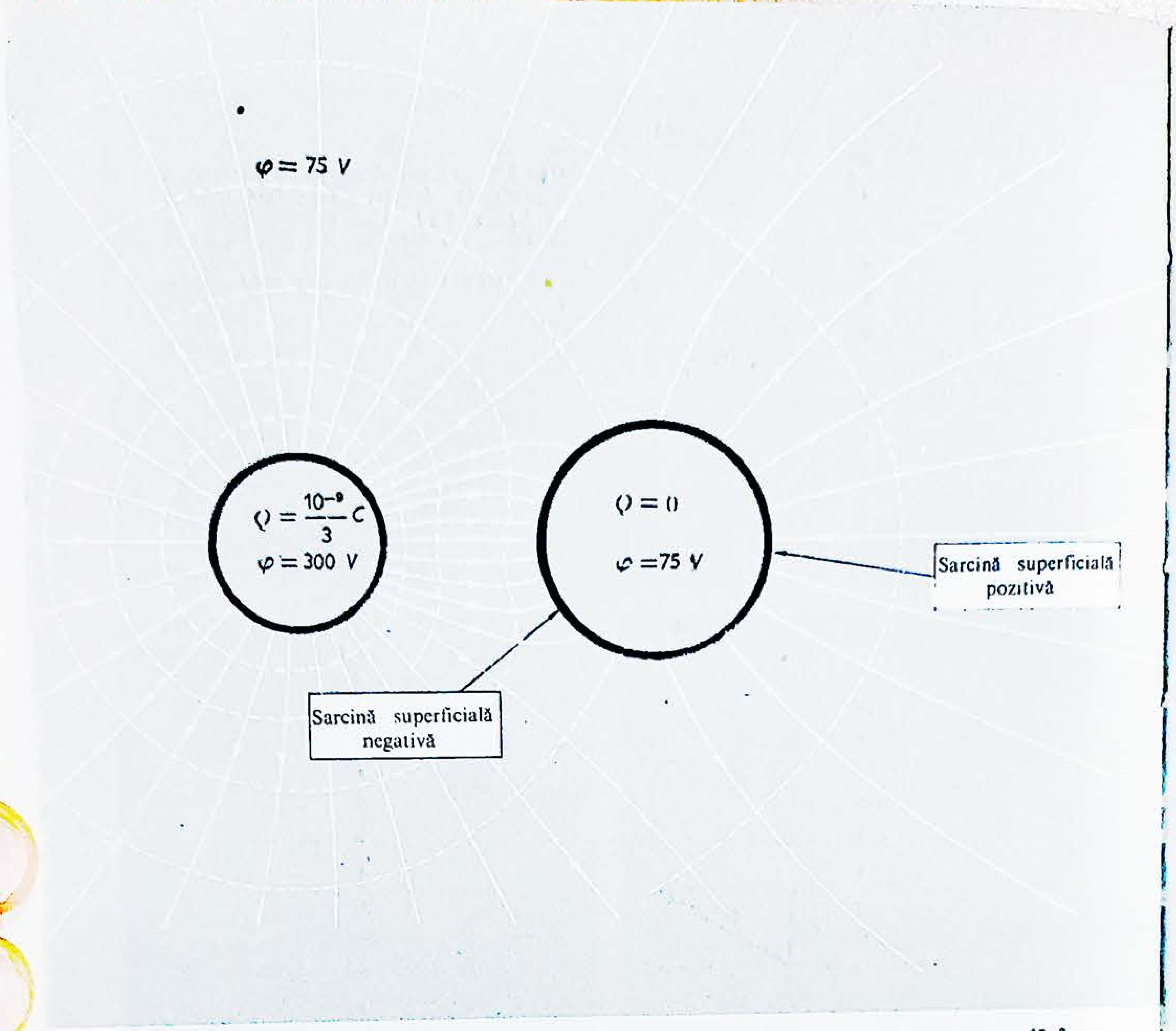


Fig. 3.5. Cîmpul electric în jurul a doi conductori sferici, unul cu sarcina totală egală cu $\frac{10^{-9}}{3}$ C și unul cu sarcina totală egală cu zero. Curbele punctate reprezintă intersecțiile suprafețelor echipotențiale cu planul figurii. Potențialul zero este la infinit.

În figura 3.5 este reprezentat cîmpul și distribuția de sarcină pentru un sistem simplu, asemănător cu cel menționat anterior. Două sfere conductoare, una avînd raza egală cu unitatea și sarcina totală +1 unități de sarcină, iar cealaltă — o rază ceva mai mare, cu sarcina totală zero. Observați că densitatea de sarcină superficială nu este uniformă pe nici unul din conductori. Sfera din dreapta, cu sarcina totală egală cu zero, are densitatea de sarcină superficială negativă concentrată pe fața din dreptul celeilalte sfere și sarcina superficială pozitivă este distribuită pe fața opusă. Curbele punctate, din figura 3.5, reprezintă suprafețele echipotențiale sau, mai precis, intersecțiile lor cu planul figurii. Pe măsură ce ne îndepărtăm de sferele încărcate, suprafețele echipotențiale devin sferice și liniile de cîmp devin radiale, cîmpul semănînd tot mai mult cu cîmpul unei sarcini punctiforme egale cu +1, care reprezintă sarcina totală a întregului sistem.

Figura 3.5 ilustrează calitativ toate posibilitățile pe care le-am fi putut prevedea, dar am dat desenul și din alt motiv. Oricît de simplu ar fi sistemul,

nu se poate obţine pe cale directă o soluţie matematică exactă. De fapt, numărul dispunerilor geometrice tridimensionale ale conductorilor care admit soluţie matematică în formă închisă, sînt descurajant de mici. Rezolvarea a cîtorva asemenea cazuri, nici nu cere un studiu aprofundat al fizicii. Vom încerca să înţelegem esenţa problemei matematice ridicate de sistemul prezentat.

3.3. PROBLEMA FUNDAMENTALĂ A ELECTROSTATICII; TEOREMA UNICITĂŢII

Putem rezolva problema cu ajutorul funcţiei potenţiale φ, deoarece dacă φ este cunoscut, **E** poate fi imediat determinat. Peste tot, în jurul conductorilor, φ satisface ecuaţia diferenţială pe care am întîlnit-o în cap. 2, ecuaţia lui Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$. În coordonate carteziene, ecuaţia lui Laplace se scrie:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

Problema constă în găsirea unei funcţii care să satisfacă ecuaţia (4) şi, de asemenea, condiţiile la limită date pe suprafeţele conductoare. Aceste condiţii pot fi date diferit. Potenţialul φ_k al fiecărui conductor poate fi dat sau cunoscut. (Într-un sistem real, potenţialele pot fi menţinute constante prin conectarea permanentă la baterii sau alte „surse de energie“ cu potenţial constant.) În acest caz, soluţia noastră $\varphi(x, y, z)$, trebuie să ia valoarea dată în fiecare punct de pe suprafaţă. Aceste suprafeţe cuprind în întregime domeniul în care este definit φ, dacă impunem ca pe suprafaţa aflată la „infinit“, potenţialul să fie nul. Uneori, regiunea care ne interesează este în întregime cuprinsă într-o suprafaţă conductoare; în acest caz atribuim conductorului un potenţial oarecare şi neglijăm tot ce se află în afara lui. În ambele cazuri, avem de-a face cu o problemă la limită tipică, în care valoarea funcţiei este determinată pe toată frontiera.

Sau, poate fi specificată sarcina totală pe fiecare conductor, Q_k. (Nu putem specifica arbitrar toate valorile sarcinilor şi potenţialelor, pentru că asta ar însemna o supradeterminare a problemei.) Specificînd sarcinile am fixat, de fapt, valoarea integralei de suprafaţă din grad φ, pe suprafaţa fiecărui conductor. Aceasta schimbă întrucîtva problema din punct de vedere matematic. De asemenea, cele două aspecte ale problemei la limită se pot „combina“.

Problema fundamentală care prezintă interes este următoarea: cu condiţiile la limită date într-un anumit fel, are problema soluţie şi dacă are, cîte are — una sau mai multe? Nu vom încerca să răspundem la toate chestiunile ridicate de această problemă, dar vom studia unul din cazuri care prezintă importanţă şi care ne dă un rezultat util. Să presupunem că potenţialul fiecărui conductor, φ_k, este dat şi îndeplineşte condiţia ca la infinit sau pe conductorul ce include sistemul, φ să tindă către zero. Vom arăta că această problemă la limită nu are decît o soluţie. Din punct de vedere fizic, pare evident că există o soluţie oarecare, întrucît aranjînd efectiv conductorii în modul indicat, legîndu-i prin fire infinit de scurte pentru a ajunge la potenţialul corespunzător, sistemul atinge o stare oarecare. Cu toate acestea, demonstraţia matematică a existenţei unei soluţii este complet diferită şi

nu vom încerca s-o facem. În schimb vom presupune că există o soluţie $\varphi(x, y, z)$ şi vom arăta că ea este unică. Demonstraţia, care este tipică unor asemenea probleme, decurge în modul următor:

Presupunem că există o altă funcţie $\psi(x, y, z)$ care este de asemenea o soluţie ce îndeplineşte aceleaşi condiţii la limită. Ştim că ecuaţia lui Laplace este *liniară*. Prin urmare, dacă şi φ şi ψ satisfac ecuaţia (4), atunci şi $\varphi + \psi$ sau orice combinaţie lineară a lor $c_1\varphi + c_2\psi$, în care c_1 şi c_2 sînt constante, vor satisface ecuaţia. În particular, şi diferenţa dintre cele două soluţii $\varphi - \psi$ trebuie să satisfacă ecuaţia (4). Să notăm această funcţie cu W:

$$W(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z) \tag{5}$$

Bineînţeles, W nu satisface condiţiile la limită. De fapt, pe suprafaţa fiecărui conductor W este zero, întrucît φ şi ψ iau aceeaşi valoare φ_k pe suprafaţa conductorului k. Rezultă că W este soluţia unei alte probleme electrostatice, cu aceiaşi conductori, dar toţi ţinuţi la potenţial nul. Dacă este aşa, putem afirma că funcţia W trebuie să fie egală cu zero în toate punctele spaţiului. Dacă n-ar fi aşa, atunci ea ar trebui să aibă undeva un maxim sau un minim; ne reamintim, însă, că W este zero atît la infinit cît şi pe suprafeţele conductorilor. Dacă W are un extremum într-un punct oarecare P, să considerăm o sferă cu centrul în acest punct. După cum am văzut în cap. 2, valoarea medie a unei funcţii care satisface ecuaţia lui Laplace pe sferă este egală cu valoarea ei în centrul sferei. Dacă, însă, centrul este un maxim sau un minim al funcţiei, acest lucru n-ar fi adevărat. Înseamnă că W nu poate avea un maxim sau un minim şi prin urmare, ea trebuie să fie peste tot egală cu zero. Rezultă că $\psi = \varphi$ peste tot, adică nu există decît *o* soluţie a ec. (4), care satisface condiţiile la limită date.

Acum, putem demonstra uşor un alt fapt remarcabil. *În spaţiul din interiorul unui conductor gol de orice formă, lipsit de sarcini, cîmpul electric este nul.* Această afirmaţie este valabilă indiferent care ar fi cîmpul în exteriorul conductorului. Ştim că cîmpul în spaţiul delimitat de o pătură sferică uniform încărcată, izolată, este nul, la fel ca şi cîmpul gravitaţional într-o sferă goală. Teorema enunţată este, într-un fel, mai surprinzătoare. Să considerăm cutia metalică reprezentată în figura 3.6, în care s-a practicat o tăietură. În apropierea cutiei se află sarcini electrice care creează un cîmp exterior ca în figură. Distribuţia de sarcină pe suprafaţa cutiei este foarte neuniformă. Cîmpul în toată regiunea, inclusiv în *interiorul* cutiei, este egal cu suma cîmpurilor create de distribuţia de sarcini şi de sursele externe. Pare neverosimil ca aranjarea sarcinilor pe cutie să se fi făcut în aşa fel încît cîmpul creat de ele să anuleze cîmpul surselor externe, în fiecare punct din interiorul cutiei. Şi totuşi aşa s-a întîmplat, lucru pe care-l vom demonstra.

Funcţia potenţială din interiorul cutiei, $\varphi(x, y, z)$, trebuie să satisfacă ecuaţia lui Laplace. Întreaga frontieră a acestui domeniu şi anume — cutia, este echipotenţială şi prin urmare, pe toată frontiera, funcţia $\varphi = \varphi_0$ este constantă. Evident, una din soluţii este $\varphi = \varphi_0$ în tot volumul. Dar conform teoremei unicităţii, există doar o singură soluţie, chiar aceasta. „φ = constant" înseamnă $\mathbf{E} = 0$, deoarece $\mathbf{E} = -\text{grad}\ \varphi$.

Absenţa cîmpului electric în spaţiul din interiorul unui conductor prezintă atît interes practic cît şi teoretic. Ea stă la baza ecranării electrice. În majoritatea aplicaţiilor practice, nu este neapărat necesar ca învelişul să fie compact. Dacă în el s-au practicat mici orificii sau dacă este din plasă metalică, peste tot cîmpul va fi foarte slab exceptînd imediata vecinătate a orificiilor. Un tub metalic deschis la capete, cu lungimea egală cu cîteva

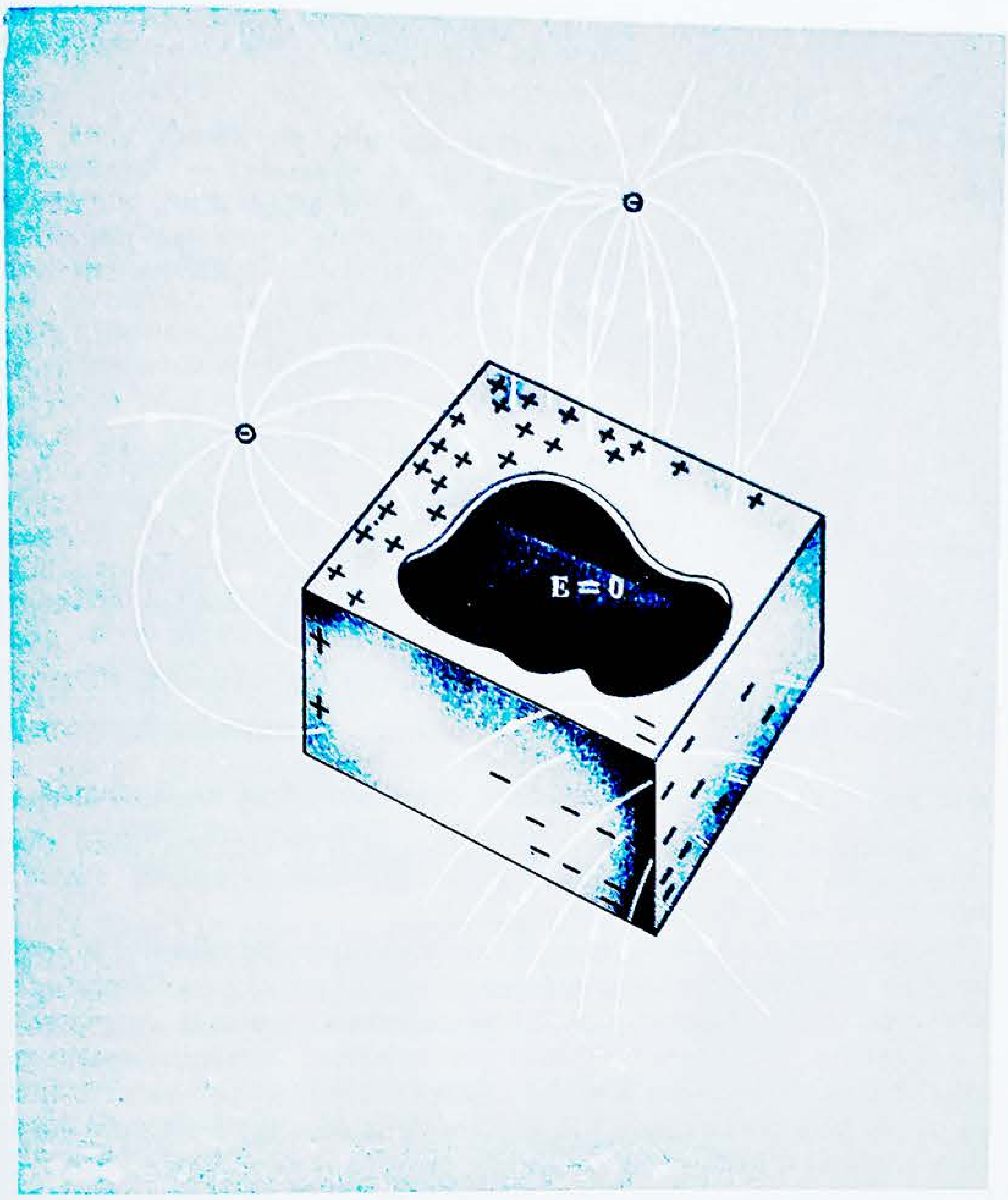


Fig. 3.6. Cîmpul în interiorul unei cutii conductoare închise este peste tot egal cu zero.

diametre, ecranează eficient spațiul din interior cu excepția regiunilor din apropierea capetelor. Noi studiem, bineînțeles, numai cîmpuri statice, dar considerațiile făcute sînt valabile și pentru cîmpurile electrice ce variază lent.

3.4. CÎTEVA SISTEME SIMPLE DE CONDUCTORI

Vom studia în acest paragraf cîteva configurații deosebit de simple de conductori. Începem cu două sfere concentrice de metal, de raze R_1 și R_2, care au sarcinile totale Q_1 și respectiv Q_2 (fig. 3.7). Această configurație nu aduce nimic nou. Din considerente de simetrie, este evident, că sarcina se

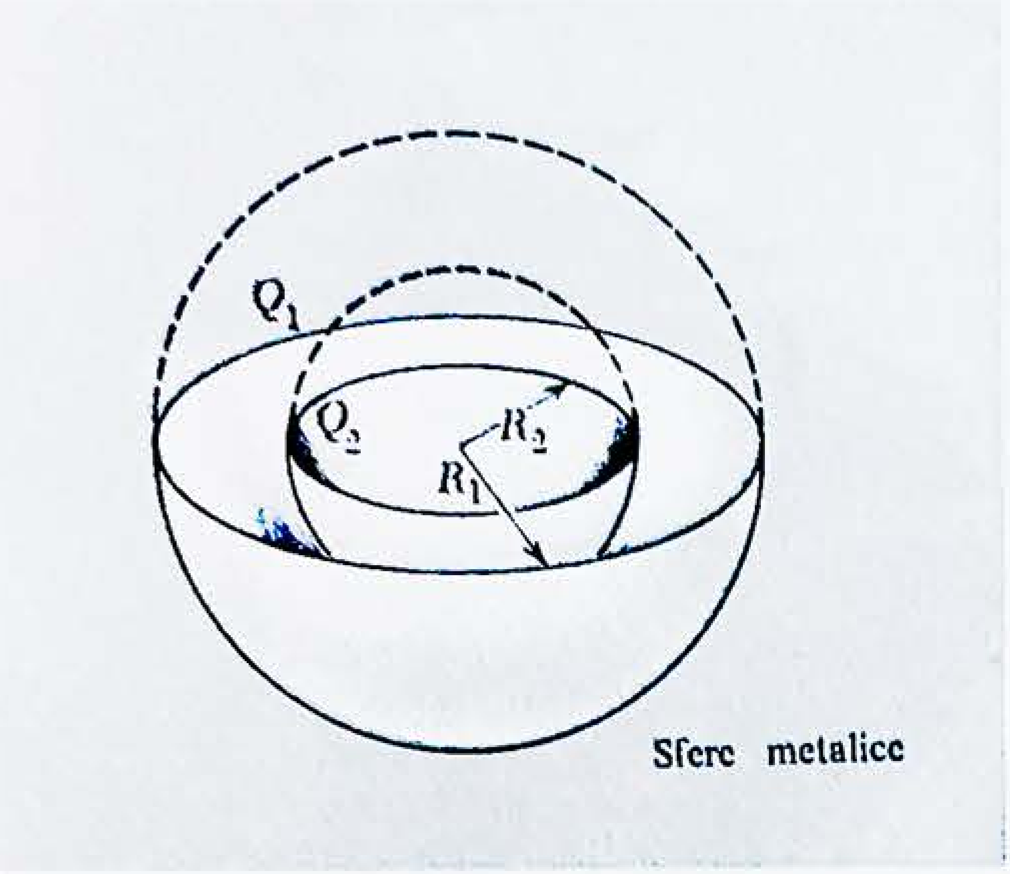


Fig. 3.7. Fiind date sarcinile Q_1 şi Q_2 ale păturilor sferice, potenţialul sferei interioare este dat de ecuaţia 6.

va distribui uniform pe fiecare sferă şi înseamnă că acest exemplu se încadrează în cap. 1! În exteriorul sferei mari, cîmpul este egal cu cel creat de o sarcină punctiformă egală cu $Q_1 + Q_2$, astfel încît potenţialul φ_1 al sferei exterioare este:

$$\frac{(Q_1 + Q_2)}{R_1}.$$

Potenţialul sferei interioare este dat de

$$\varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2}\,dr =$$

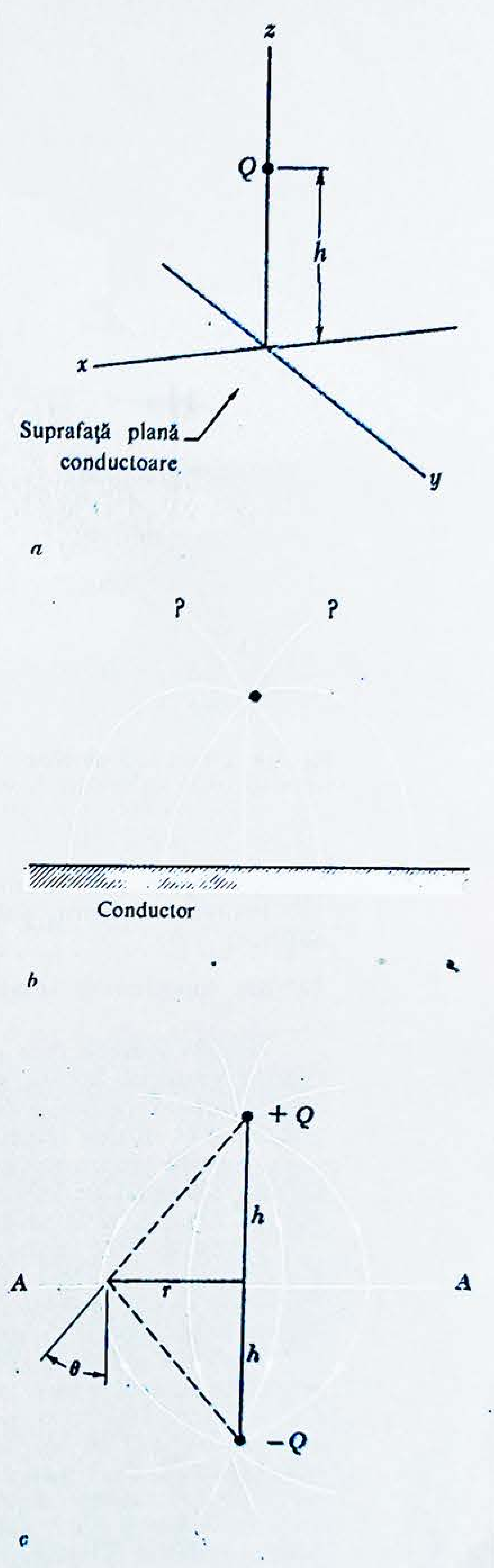
$$= \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_2}{R_1} = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}. \qquad (6)$$

φ_2 este, de asemenea, potenţialul în toate punctele din interiorul sferei mici. L-am fi putut găsi pe $\varphi_2 = \left(\frac{Q_1}{R_1}\right) + \left(\frac{Q_2}{R_2}\right)$ pe baza principiului superpoziţiei: $\frac{Q_1}{R_1}$ este potenţialul din interiorul sferei mai mari, dacă ar fi singură, $\frac{Q_2}{R_2}$ este potenţialul din interiorul sferei mici, dacă ar fi ea singură. Dacă sferele au sarcini egale şi de semn contrar, $Q_1 = -Q_2$, doar în spaţiul dintre ele cîmpul electric ar fi diferit de zero.

Unul din cele mai simple sisteme, în care mobilitatea purtătorilor de sarcină în conductor devine evidentă, este format dintr-o sarcină punctiformă aflată în apropierea unui conductor plan. Să presupunem că planul xy reprezintă suprafaţa conductorului care se întinde pînă la infinit. Atribuim acestui plan potenţialul zero. Să aducem, acum, o sarcină pozitivă Q pe axa z, la înălţimea h cm de plan, ca în figura 3.8, *a*. Care va fi aspectul cîmpului şi distribuţia de sarcină? Ne aşteptăm ca sarcina pozitivă Q să atragă sarcina negativă, dar nu putem presupune de fel că sarcina negativă se va fixa la piciorul perpendicularei coborîte din Q, unde concentraţia este foarte mare. De ce? De asemenea, ne amintim că cîmpul electric în apropierea suprafeţei conductorului este întotdeauna perpendicular pe suprafaţă. Pe de altă parte, prezenţa conductorului plan în imediata apropiere a sarcinii punctiforme Q nu schimbă prea mult situaţia: liniile de cîmp trebuie *să iasă* din Q radial, la fel ca dintr-o sarcină punctiformă. Prin urmare, ne putem aştepta la ceva asemănător calitativ cu situaţia redată în figura 3.8, *b*. Bineînţeles, totul este simetric faţă de axa z.

Dar cum rezolvăm efectiv problema? Răspunsul este — printr-un truc, un truc care este şi instructiv şi deseori, util. Găsim o altă problemă care se rezolvă simplu şi a cărei soluţie poate fi folosită la problema noastră în întregime sau parţial. În acest caz, alegem două sarcini punctiforme egale şi de semn contrar Q şi $-Q$. Cîmpul electric este perpendicular în fiecare punct pe planul aflat la mijlocul distanţei dintre cele două sarcini şi a cărui secţiune

Fig. 3.8. *(a)* O sarcină punctiformă Q se află deasupra unui conductor plan infinit. *(b)* Cam acesta ar trebui să fie aspectul cîmpului. *(c)* Cîmpul unei perechi de sarcini de semne opuse.



transversală este reprezentată în figura 3.8, *c* prin dreapta AA. Dacă distanța de la Q la plan o luăm egală cu h din problema inițial pusă, jumătatea de sus a figurii 3.8, *c* corespunde tuturor condițiilor noastre: cîmpul este perpendicular la suprafața conductorului și în apropierea lui Q se apropie de aspectul cîmpului unei sarcini punctiforme.

Condițiile la limită, în acest caz, diferă întrucîtva de condițiile la limită puse la teorema unicității din paragraful precedent. Potențialul conductorului este bine determinat, dar potențialul sarcinii punctiforme din sisteme tinde către infinit. Putem considera sarcina punctiformă ca un caz limită al unui conductor sferic mic cu sarcina totală Q. Chiar pentru aceste condiții la limită „combinate“ — potențial dat pe unele suprafețe, sarcina totală pe altele — teorema unicității este valabilă. Și dacă soluția „împrumutată“ satisface aceste condiții, rezultă că ea trebuie să fie soluția corectă.

În figura 3.9 este dată soluția finală pentru cîmpul de deasupra planului, cu densitatea superficială de sarcină dată. Putem calcula intensitatea cîmpului și direcția lui în orice punct, revenind la problema cu cele două sarcini (fig. 3.8, *c*) și folosind legea lui Coulomb. Să considerăm un punct de pe suprafață, aflat la distanța r de origină. Pătratul distanței de la acest punct la Q este $r^2 + h^2$ și componenta z a intensității cîmpului lui Q în acest punct este $-Q\cos\theta/4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)$. „Sarcina imagine“ $-Q$, aflată dedesubtul acestui plan, aduce o contribuție egală cu componenta z. Rezultă că intensitatea cîmpului electric este dată de expresia

$$E_z = \frac{-2Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}\cos\theta =$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}\cdot\frac{h}{(r^2+h^2)^{1/2}} = \frac{-Qh}{2\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

De aici putem obține densitatea superficială de sarcină:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_z = \frac{-Qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

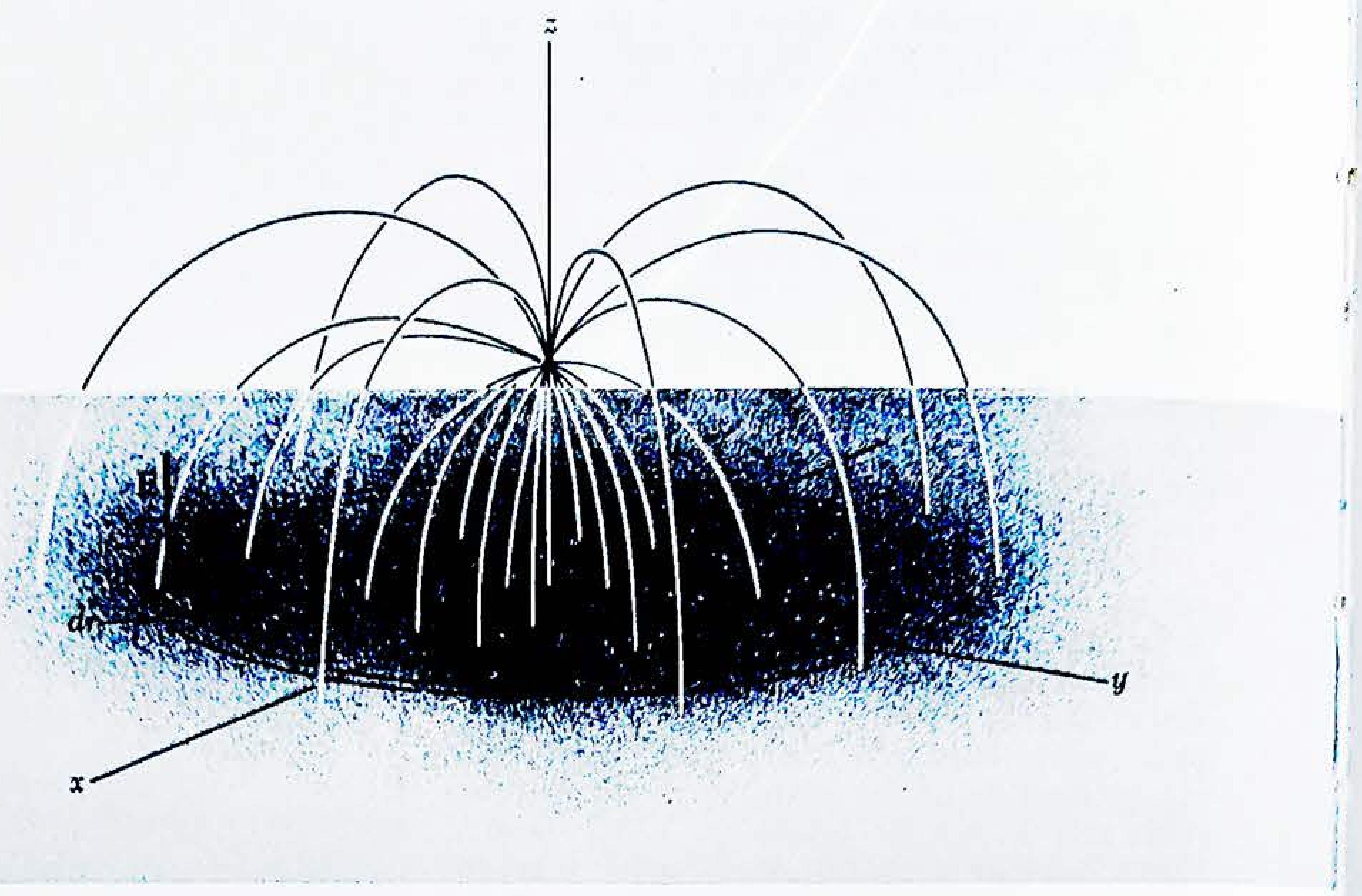


Fig. 3.9. Cîteva linii de cîmp ale sarcinii aflate deasupra planului. Intensitatea cîmpului la suprafață, dată de ecuația 7, determină densitatea superficială de sarcină σ.

Sarcina superficială totală ar trebui să fie $-Q$.

Pentru a verifica, putem integra pe toată suprafața și să vedem dacă obținem $-Q$:

$$\text{Sarcina superficială totală} = \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r \, dr = -Q \int_0^\infty \frac{hr \, dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q. \qquad (9)$$

Metoda folosită este cunoscută sub denumirea de „metoda imaginilor". Sarcina negativă fictivă, dispusă la distanța h sub suprafața conductorului, spre care converg liniile de cîmp, poate fi considerată ca „imaginea" sarcinii punctuale Q, analog imaginii virtuale din dosul unei oglinzi. Forța electrică ce acționează asupra sarcinii Q datorită atracției exercitate de sarcina superficială, este egală cu forța pe care ar exercita-o sarcina imagine $-Q$. Observați că această forță se datorează sarcinii superficiale.

Totuși, această analogie cu imaginea într-o oglindă nu este foarte corectă și nici foarte utilă. Mai corect este să se considere această metodă ca un caz particular al unei metode mult mai generale, care ar putea fi numită „aproximarea condițiilor la limită".

Pentru a lămuri mai bine ce înțelegem prin aceasta, să studiem cîteva suprafețe echipotențiale în cîmpul a două sarcini egale și de semn contrar (fig. 3.10, *a*). Doar una din aceste suprafețe este plană. Celelalte sînt suprafețe închise, nici una nu este chiar sferică, dar poziția oricăreia dintre ele o putem stabili, dacă este nevoie, printr-un calcul elementar. Dacă am putea alege două asemenea suprafețe, oricare dintre ele, și le-am confecționa din foițe metalice cu exact aceleași dimensiuni și le-am amplasa exact la fel cum erau suprafețele echipotențiale una față de alta (fig. 3.10, *a*), am obține exact

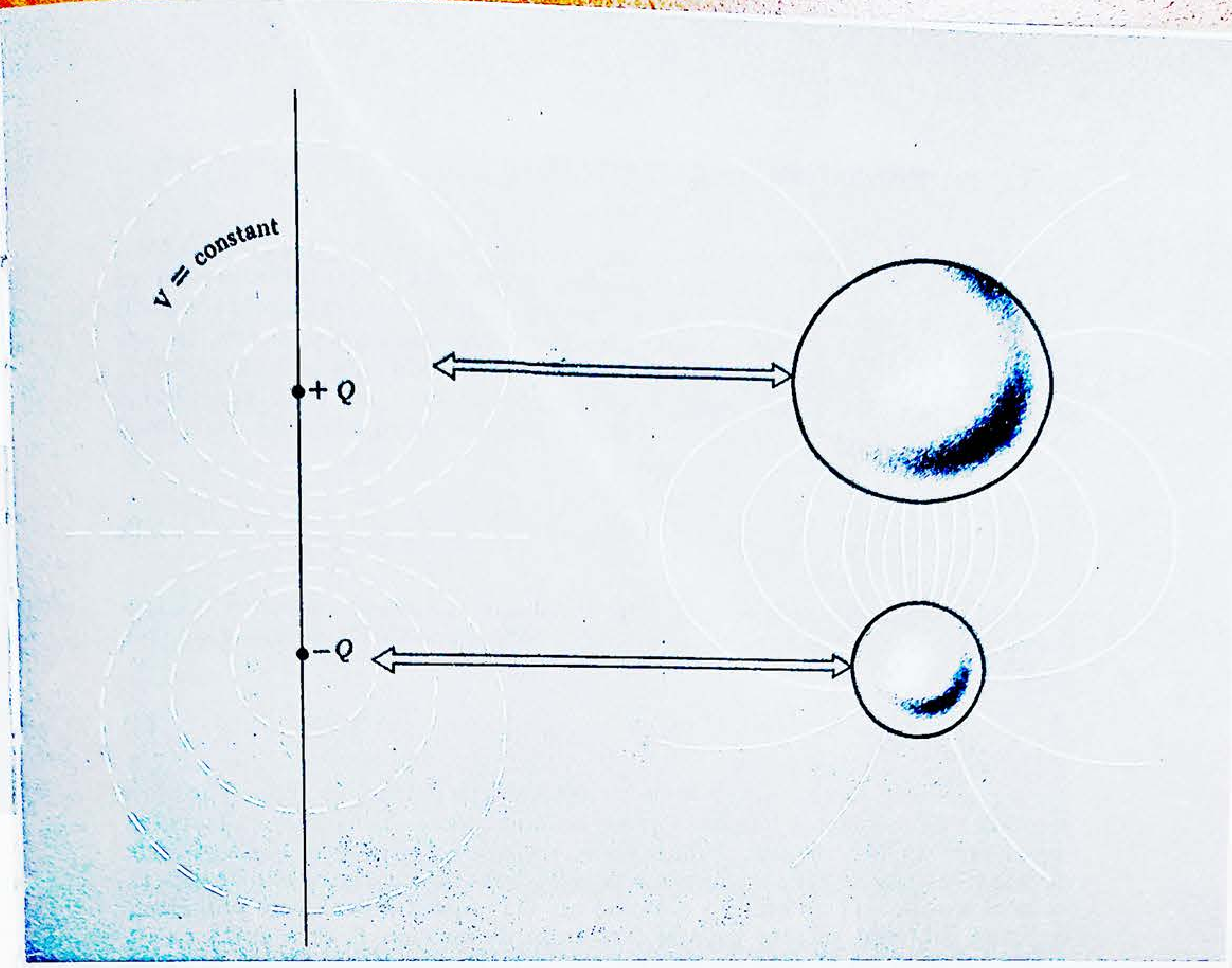


Fig. 3.10. *(a)* Secţiunile prin suprafeţele echipotenţiale a două sarcini punctiforme egale şi de semn opus. *(b)* Două asemenea suprafeţe realizate din metal. Doi conductori, care ar avea exact aceeaşi formă şi s-ar afla la aceeaşi distanţă unul de altul, cu sarcinile date Q şi $-Q$, ar fi creat în punctele exterioare exact acelaşi cîmp.

aceeaşi soluţie ca în cazul cîmpului electrostatic creat de doi asemenea conductori! Ea ar corespunde cîmpului creat de două sarcini. Din păcate, este dificil de confecţionat electrozi de exact aceeaşi formă pentru a găsi soluţia. Totuşi, folosirea electrozilor de formă sferică dă posibilitatea unei rezolvări aproximative care poate fi utilă uneori.

Studiul suprafeţelor echipotenţiale poate fi continuat prin studiul altor sisteme simple, urmărind exemple care ar putea fi mai utile. Am putea numi această metodă „o soluţie în căutarea unei probleme". Un exemplu, în această privinţă, este metoda folosită în problema 3.22. Maxwell a descris bine această situaţie: „Şi astfel, problema găsirii formei conductorilor pentru un potenţial dat, adică problema inversă de fapt, se rezolvă mult mai simplu decît problema directă a determinării potenţialului cînd forma conductorilor este dată".*

---

* James Clerk Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I, cap. VII (ediţia a 3-a, Oxford University Press, 1891, reeditată de ed. Dover, New York, 1954). Fiecare student în fizică trebuie să răsfoiască din cînd în cînd această carte. Problema ridicată de noi este bine tratată în cap. VII. La sfîrşitul vol. I veţi găsi cîteva scheme minunate de cîmp electric, şi imediat după citatul dat, o scurtă explicaţie a motivului pentru care Maxwell dă aceste scheme. S-ar putea crede că pînă şi el a fost încîntat de construcţia şi eleganţa lor.

3.5. CONDENSATORI ŞI CAPACITATE

Două plăci conductoare de acelaşi fel sînt dispuse paralel la distanţa s una de alta (fig. 3.11, *a*). Aria fiecărei plăci este A şi presupunem că sarcina pe una din plăci este Q şi pe cealaltă $-Q$. φ_1 şi φ_2 reprezintă valorile potenţialelor de pe cele două plăci. Liniile de cîmp ale acestui sistem în secţiune transversală sînt arătate în figura 3.11, *b*. Cu excepţia marginilor, cîmpul în regiunea dintre plăci este aproape uniform. Dacă îl considerăm uniform, intensitatea lui este $(\varphi_2 - \varphi_1)/s$. Densitatea superficială de sarcină corespunzătoare, pe faţa interioară a uneia din plăci este

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}. \tag{10}$$

Dacă neglijăm variaţia lui E şi prin urmare şi a lui σ, ce apare în apropierea marginilor plăcii, putem scrie pentru sarcina totală de pe una din plăci, o relaţie simplă:

$$Q = \varepsilon_0 A \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{s} \text{ (neglijînd efectele de margine).} \tag{11}$$

Ecuaţia (11) devine din ce în ce mai exactă, pe măsură ce raportul dintre distanţa s între plăci şi lungimea plăcii se micşorează. Bineînţeles că pentru rezolvarea exactă a acestei probleme electrostatice, ţinînd cont şi de efectele de margine, pentru plăci de formă bine determinată, folosim o relaţie exactă în locul ecuaţiei (11). Pentru a arăta că ec. (11) aproximează bine problema, la figura 3.12 sînt trecute valorile factorului de corecţie f, care arată cu cît diferă valoarea lui Q dată de ecuaţia (11) faţă de rezultatul exact, în cazul a două discuri conductoare aflate la distanţe diferite. Sarcina totală este întotdeauna puţin mai mare decît valoarea sarcinii determinate din ec. (11). Acest lucru pare firesc, dacă ne uităm la figura 3.11, *b*, în care faptul că la margini, şi chiar pe feţele exterioare de la margine, are loc o concentrare suplimentară de sarcină, apare evident.

Pe noi ne interesează acum nu asemenea corecţii, ci proprietăţile generale ale unui sistem format din doi conductori. Perechea de plăci reprezintă un element des întîlnit în circuitele electrice şi anume — *condensatorul*. Un condensator este format din doi conductori apropiaţi, aflaţi la potenţiale diferite şi avînd sarcini de semn contrar. Ne interesează relaţia dintre sarcina Q de pe una din plăci şi diferenţa de potenţial dintre ele. În cazul particular al sistemelor la care se aplică ec. (11), raportul $Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ este egal cu $\varepsilon_0 A/s$. Chiar în cazul în care această relaţie este aproximativă, este clar că relaţia exactă va depinde numai de dimensiunile şi dispunerea geometrică a plăcilor. Rezultă că pentru o pereche de conductori fixaţi, raportul dintre sarcină şi diferenţa de potenţial va fi constant. Această constantă o numim *capacitatea* condensatorului şi o notăm, de obicei, cu C.

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{12}$$

Prin urmare, capacitatea condensatorului plan-paralel, neglijînd efectele de margine, este dată de

$$C = \frac{\varepsilon_0(8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{F/m})A\ (\text{în m}^2)}{s\ (\text{în m})}. \tag{13}$$

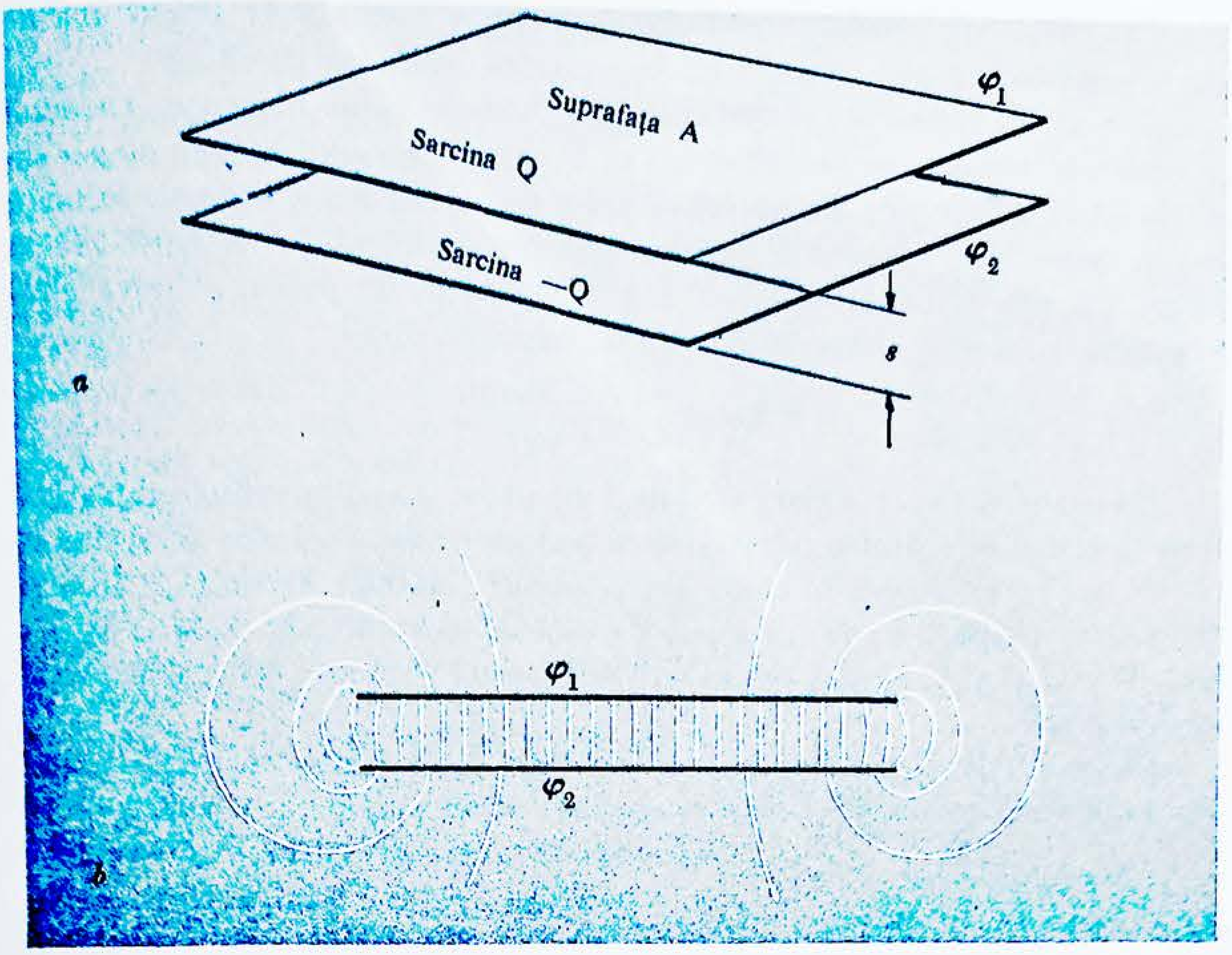


Fig. 3.11. *(a)* Un condensator plan-paralel. *(b)* Secțiune transversală prin *(a)* pe care sînt desenate liniile de cîmp.

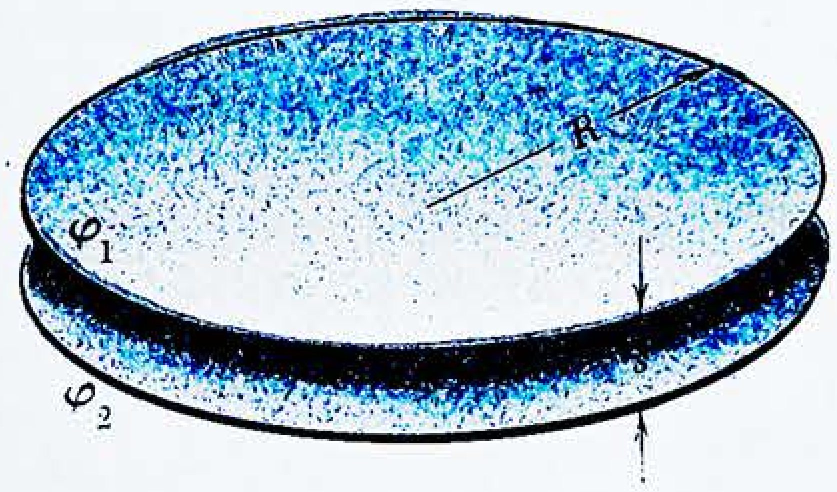


Fig. 3.12. Valoarea reală a capacității condensatorului circular plan paralel este comparată cu valoarea dată de ec. (11), pentru diferite valori ale raportului dintre distanța între plăci și raza plăcii. Corecția, ținînd cont de efectul de margine, poate fi introdusă în expresia lui Q:

$$Q = \frac{A\varepsilon_0(\varphi_1-\varphi_2)}{s} \cdot f$$

Pentru plăcile circulare, factorul f depinde de raportul s/R în modul următor:

s/R	f
0,2	1,286
0,1	1,167
0,05	1,094
0,02	1,042
0,01	1,023

Două plăci cu aria de 100 cm^2 fiecare, aflate la distanța de 1 mm una de alta, formează un condensator cu capacitatea egală cu 88,33 pF.

Într-un alt sistem de unități, cu care trebuie să ne obișnuim, sistemul „practic" de unități, sarcina electrică se exprimă în coulombi, sau amper-secundă (A.s) și unitatea de potențial este voltul. În acest sistem, unitatea pentru capacitate, reprezintă capacitatea unui condensator la care sarcina de pe una din plăci este un coulomb și diferența de potențial între plăci este egală cu 1 volt. Această unitate se numește *farad.*

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}.$$

Un condensator cu capacitatea de 1 farad ar avea dimensiuni gigantice. Pentru ca distanța dintre plăci să fie 1 mm, suprafața plăcilor ar trebui să fie 100 km^2.* Deoarece, în acest caz sistemul „practic" de unități duce la dimensiuni nepractice, se folosește, de obicei, *microfaradul* (μF) și *micromicrofaradul* ($\mu\mu$F). Ultima unitate, egală cu 10^{-12} farazi, se mai numește *picofarad* (pF).

Orice pereche de conductori, indiferent de forma și dispunerea lor, poate fi considerată *condensator*. Am ales condensatorul plan-paralel pentru că se întîlnește frecvent și calculul aproximativ al capacității sale este mult mai simplu. În figura 3.13 sînt arătați doi conductori, dintre care unul se află în interiorul celuilalt. Această dispunere poate fi numită, de asemenea, condensator. Din punct de vedere practic, conductorul din interior trebuie prins cumva, dar această chestiune nu ne privește. Pentru a transporta sarcinile electrice de pe un conductor pe celălalt, sînt necesare fire, care ele însele constituie conductori. Întrucît firul conductor 1, ce pleacă de la corpul din interior, intersectează neapărat spațiul dintre conductori, apare o oarecare perturbare a cîmpului electric în acest spațiu. Pentru a micșora efectul,

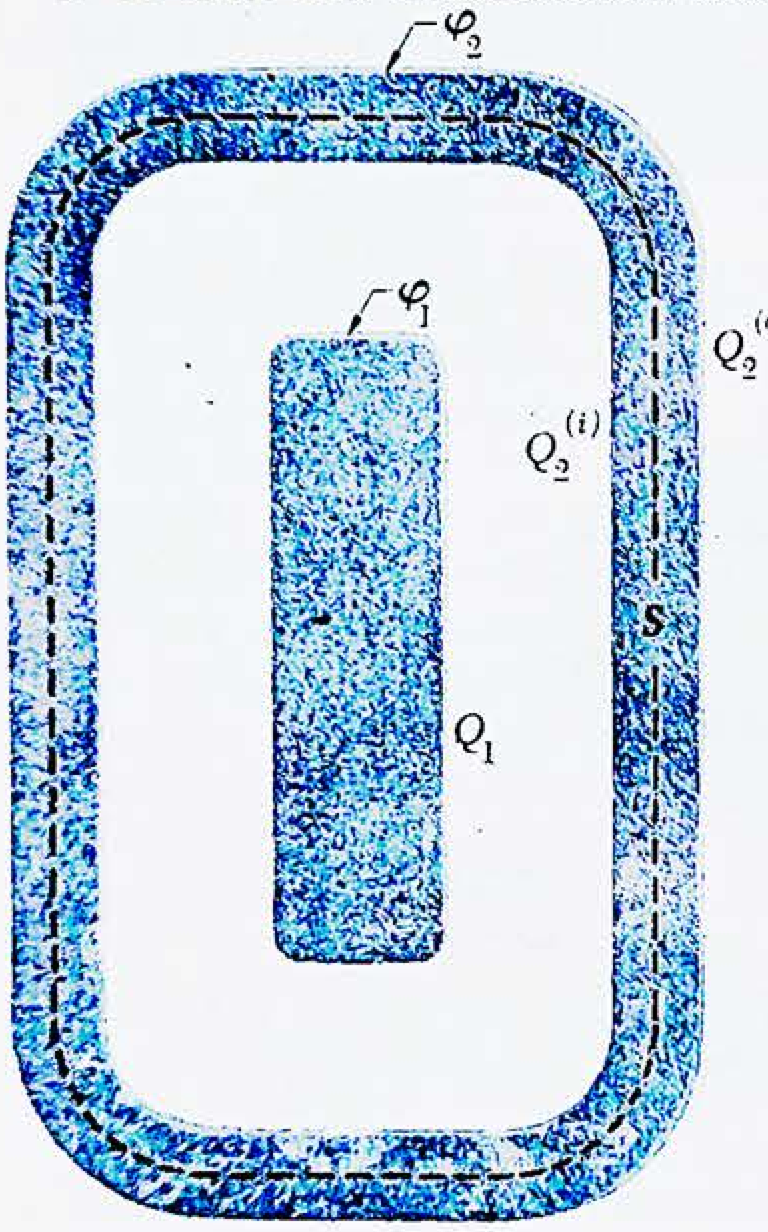


Fig. 3.13. Condensator, în care unul dintre conductori este înconjurat de celălalt.

* Există, desigur, posibilități de a realiza condensatori mai compacți, cu o capacitate mare! Puteți cumpăra oricînd un condensator cu capacitate de 1 microfarad, pe care-l puteți transporta ușor. În substanțele biologice, pereții celulei constituie un strat electric izolator ce separă interiorul celulei de mediul lichid în care se găsește. Această membrană, din punct de vedere electric, se comportă ca un condensator de 1 μF pe cm^2 de membrană. Care trebuie să fie „distanța dintre plăci" în acest caz? (În realitate, capacitatea depinde, de asemenea, de constanta dielectrică, adică de polarizabilitatea electrică a mediului dintre plăci. Această chestiune se va discuta în cap. 9.)

putem presupune firul extrem de subțire sau că am îndepărtat firele înainte de a determina potențialele.

În acest sistem distingem trei sarcini: Q_1 — sarcina totală pe conductorul interior, $Q_2^{(i)}$ — sarcina de pe suprafața interioară a conductorului exterior, $Q_2^{(e)}$ — sarcina de pe suprafața exterioară a conductorului din exterior. În primul rînd observăm că $Q_2^{(i)}$ este egal cu $-Q_1$. Noi știm acest lucru, deoarece suprafața S din figura 3.13 cuprinde numai aceste două sarcini, iar fluxul prin această suprafață este nul. Fluxul este zero, deoarece pe suprafața S, așezată ca în figură — în interiorul conductorului, cîmpul electric este egal cu zero.

Evident, în spațiul dintre cei doi conductori, mărimea lui Q_1 va determina în mod univoc cîmpul electric și diferența de potențial $\varphi_1 - \varphi_2$. Din această cauză, dacă aceste două corpuri le considerăm ca „plăci" ale condensatorului, pentru determinarea capacității ne trebuie doar sarcina Q_1 sau sarcina egală cu ea $Q_2^{(i)}$. Capacitatea este egală cu



Fig. 3.14. Un condensator asimetric.

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{14}$$

În acest caz, sarcina $Q_2^{(e)}$ de care depinde potențialul φ_2, nu joacă nici un rol. De fapt, cînd un conductor este înconjurat (închis) de altul, capacitatea este independentă de sarcinile externe. Dacă am avea două plăci asimetrice de condensator, ca în figura 3.14, întrebarea: care din sarcini joacă rolul lui Q_1 — cu ajutorul căreia determinăm capacitatea? — ne-ar pune în încurcătură. Răspunsul este următorul: este acea sarcină care trebuie transportată de la conductorul 1 pe conductorul 2 (suma sarcinilor de pe cei doi conductori fiind astfel menținută constantă) pentru a egala potențialele lor.

3.6. POTENȚIALE ȘI SARCINI PE DIFERIȚI CONDUCTORI

Am atins doar o parte dintr-o problemă mult mai generală și anume, relațiile dintre sarcinile și potențialele unui număr oarecare de conductori într-o configurație dată. Condensatorul format din doi conductori este doar un caz particular. Vă surprinde, poate, că s-ar putea scoate ceva util din cazul general. De fapt, tot ce putem scoate este *teorema unicității* și *principiul de superpoziție*. Să considerăm trei conductori înconjurați de o pătură conductoare ca în figura 3.15. Potențialul acestei pături îl putem alege nul; pentru o stare oarecare a sistemului, potențialele celor trei conductori sînt φ_1, φ_2 și φ_3. Teorema unicității ne garantează că fiind date φ_1, φ_2 și φ_3, cîmpul electric este determinat în tot sistemul. Rezultă că și sarcinile Q_1, Q_2 și Q_3 pe fiecare din conductori sînt, de asemenea, determinate în mod univoc.

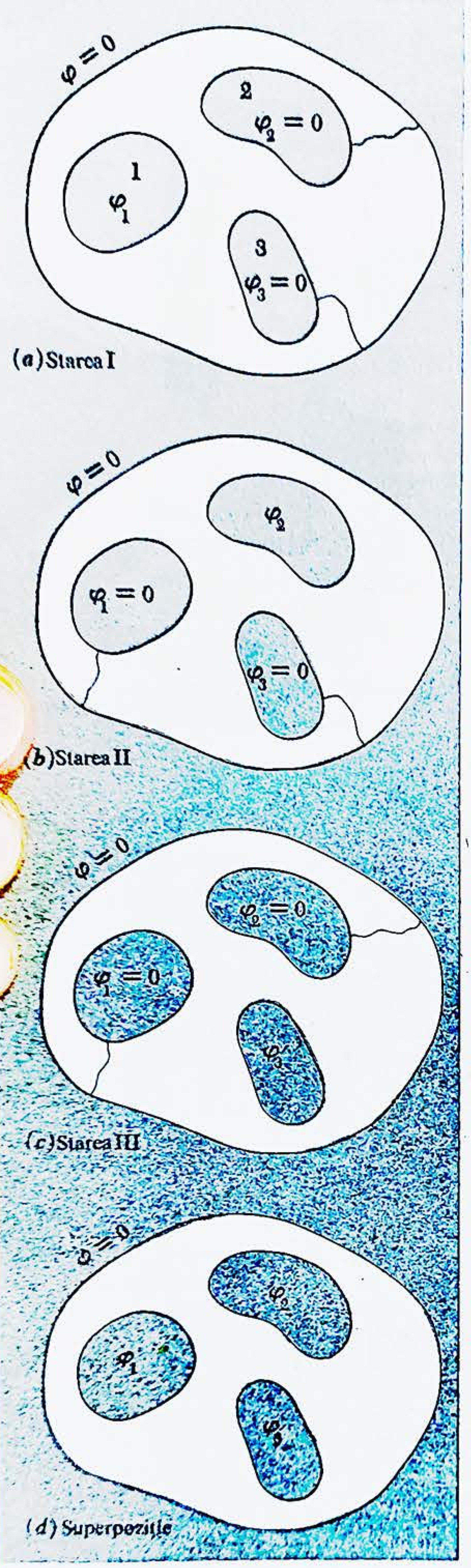


Fig. 3.15. Starea generală a acestui sistem poate fi studiată ca o *suprapunere (d)* de trei stări *(a—c)*, în fiecare din ele toți conductorii, în afară de unul, aflîndu-se la potențialul zero.

Nu trebuie să ținem cont de sarcina de pe fața interioară a stratului înconjurător, întrucît ea este întotdeauna egală cu $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$. Dacă vrem, putem considera în locul stratului — „infinitul“, extinzîndu-l fără limită. L-am reprezentat în figură, pentru a urmări mai ușor procesul transferului de sarcină și pentru cazul în care e nevoie să facem unele conexiuni.

Între stările posibile ale acestui sistem există una, în care φ_2 și φ_3 sînt egale cu zero. Sistemul poate fi adus într-o asemenea stare, legînd conductorii *2* și *3* la stratul înconjurător care are potențialul zero (fig. 3.15, *a*). Ca și mai înainte, putem presupune firele de legătură atît de subțiri încît sarcinile rămase pe ele sînt neglijabile. De fapt, pe noi nu ne interesează cum aducem sistemul în starea respectivă. Într-o asemenea stare, pe care o vom numi starea I, intensitatea cîmpului electric în întreg sistemul și sarcina pe fiecare conductor, sînt determinate în mod univoc de valoarea lui φ_1. Mai mult decît atît, dacă φ_1 se dublează, se dublează și intensitatea cîmpului peste tot și prin urmare și sarcinile Q_1, Q_2 și Q_3 se dublează. Astfel, pentru $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, fiecare din cele trei sarcini trebuie să fie proporțională cu φ_1. Să formulăm aceasta matematic:

$$\left.\begin{matrix}\text{Starea I}\\ \varphi_2 = \varphi_3 = 0\end{matrix}\right\} Q_1 = C_{11}\varphi_1;\; Q_2 = C_{21}\varphi_1;\; Q_3 = C_{31}\varphi_1. \tag{15}$$

Cele trei constante C_{11}, C_{21} și C_{31} depind doar de forma și dispunerea corpurilor conductoare.

Exact în același mod, putem analiza starea în care φ_1 și φ_3 sînt egale cu zero, numind-o starea II (fig. 3.15, *b*). Trebuie, din nou, să găsim o relație liniară între singurul potențial diferit de zero, φ_2 — în acest caz, și diferitele sarcini:

$$\left.\begin{matrix}\text{Starea II}\\ \varphi_1 = \varphi_3 = 0\end{matrix}\right\} Q_1 = C_{12}\varphi_2;\; Q_2 = C_{22}\varphi_2;\; Q_3 = C_{32}\varphi_2. \tag{16}$$

În fine, cînd φ_1 și φ_2 sînt egale cu zero, intensitatea cîmpului și sarcinile sînt proporționale cu φ_3:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Starea III}\\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0\end{array}\right\} Q_1 = C_{13}\varphi_3; \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3; \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3. \tag{17}$$

Și suprapunerea stărilor I, II și III este, de asemenea, o stare posibilă. Intensitatea cîmpului electric în orice punct este suma vectorială a intensității cîmpurilor electrice în acest punct în cele trei cazuri studiate, iar sarcina de pe un conductor este suma sarcinilor pe care le avea conductorul în cele trei cazuri. În această nouă stare, nu este nevoie ca vreunul din potențialele φ_1, φ_2 și φ_3 să fie egal cu zero. Pe scurt, aceasta este cea mai generală stare. Relațiile ce leagă sarcinile și potențialele se obțin, pur și simplu, prin adunarea ecuațiilor (15), (16) și (17).

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3 \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3 \end{aligned} \tag{18}$$

S-ar părea că comportarea electrică a acestui sistem este caracterizată de nouă constante C_{11}, C_{12}, ..., C_{33}. De fapt, sînt necesare doar șase constante, putînd demonstra că în *orice* sistem $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$ și $C_{23} = C_{32}$. Deocamdată nu este evident de ce este așa. În problema 3.27 se sugerează o demonstrație care se bazează pe legea conservării energiei, dar înainte de asta trebuie să parcurgem paragraful 3.7. Constantele C din ecuațiile (18) se numesc *coeficienți de capacitate*. Evident, demonstrația noastră este valabilă pentru un număr oarecare de conductori. Mărimea fizică determinată ca fiind *capacitatea* condensatorului format din două plăci, nu este aceeași cu C_{11} (sau C_{22} sau C_{33}) dar, bineînțeles, este legată de ele.

Sistemul de ecuații (18) poate fi rezolvat în funcție de φ pentru sarcinile date Q. Ne vom folosi de un sistem echivalent de ecuații liniare de forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{aligned} \tag{19}$$

Mărimile P sînt numite *coeficienți de potențial;* ele pot fi calculate cunoscînd coeficienții C și invers.

Asemenea ecuații pot fi folosite în rezolvarea oricărui sistem fizic *liniar*. Ele se întîlnesc în studiul structurilor mecanice (legînd deformările de solicitări), în analiza circuitelor electrice (leagă tensiunile și curenții), și în general vorbind, în orice caz în care poate fi aplicat principiul superpoziției.

3.7. ENERGIA ÎNMAGAZINATĂ ÎNTR-UN CONDENSATOR

Să considerăm un condensator de capacitate C, avînd diferența de potențial între plăci φ_{12}. Sarcina Q este egală cu $C\varphi_{12}$. Sarcina de pe o placă este Q și pe cealaltă $-Q$. Presupunem că *mărim* sarcina de la Q la $Q + dQ$, transportînd o sarcină pozitivă dQ de la placa negativă la cea pozitivă și efectuînd un lucru mecanic împotriva diferenței de potențial φ_{12}. Lucrul

mecanic efectuat este $dW = \varphi_{12}dQ = QdQ/C$. Prin urmare, pentru a încărca un condensator neîncărcat pînă la o sarcină finală oarecare Q_f este necesar un lucru mecanic

$$W = \frac{1}{C}\int_{Q=0}^{Q_f} QdQ = \frac{Q_f^2}{2C}. \tag{20}$$

Aceasta reprezintă energia „înmagazinată" într-un condensator. Ea mai poate fi scrisă sub forma

$$U = \frac{1}{2}C\varphi_{12}^2. \tag{21}$$

Capacitatea condensatorului plan-paralel, cu aria plăcii egală cu A şi distanţa dintre plăci s, este $C = \varepsilon_0 A/s$, iar intensitatea cîmpului electric $E = \varphi_{12}/s$. Ca urmare, ecuaţia (21) se va scrie

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{s}\right)(Es)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}As = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot \text{volum}. \tag{22}$$

Această expresie este în concordanţă cu formula generală (2.36) pentru energia înmagazinată în cîmpul electric.*

3.8. ALTE ASPECTE ALE PROBLEMEI LA LIMITĂ

Ar fi greşit să credem că nu există metode generale pentru problemele la limită ale lui Laplace. În acelaşi timp, nu avem posibilitatea unui studiu amănunţit al acestei probleme în cadrul cursului; vom menţiona trei aproximaţii utile şi interesante, cu care vă veţi întîlni în studiul fizicii sau matematicii aplicate.

Prima metodă este o metodă elegantă a analizei, numită metoda reprezentărilor conforme, care se bazează pe teoria funcţiilor de variabilă complexă. Din păcate, ea poate fi aplicată numai pentru sistemele bidimensionale. Există sisteme în care φ depinde doar de x şi y, de exemplu, cazul conductorilor cilindrici a căror suprafeţe sînt paralele cu axa z. În acest caz, ecuaţia lui Laplace se reduce la

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

cu condiţiile la limită date pe unele drepte sau curbe din planul xy. În practică, se întîlnesc multe asemenea sisteme sau asemănătoare cu ele, metoda prezentînd, din acest punct de vedere, interes practic chiar dacă nu prezintă interes matematic. De exemplu, soluţia exactă pentru potenţialul din apropierea a două plăci lungi paralele se obţine uşor prin metoda reprezentărilor conforme. Liniile de cîmp şi suprafeţele echipotenţiale sînt reprezen-

---

* Toate acestea se aplică unui „condensator cu aer", la care între plăcile conductoare se găseşte aer. După cum ştiţi din practică, majoritatea condensatorilor utilizaţi în circuitele electrice au între plăci un izolator sau un „dielectric". Asemenea condensatori vor fi studiaţi în capitolul 9.

tate în secțiune transversală în figura 3.16. Desenul ne lămurește de ce în cazul oricărui condensator plan-paralel, a cărui lungime este mare în comparație cu distanța dintre plăci, apare cîmpul de margine. Cîmpul reprezentat în figura 3.11, *b*, a fost construit pe baza unei asemenea soluții. Veți putea folosi această metodă după ce veți aprofunda studiul funcțiilor de variabilă complexă.

A doua metodă, este o metodă numerică pentru găsirea soluțiilor aproximative ale potențialului electrostatic cu condiții la limită date. Această metodă, deosebit de simplă și aproape universal valabilă, se bazează pe acea proprietate specială a funcțiilor armonice cu care ne-am familiarizat: valoarea funcției într-un punct este egală cu valoarea medie a funcției în regiunea din jurul acestui punct. În această metodă, funcția potențială φ ia valori numai într-un șir discret de puncte, în care sînt incluse și punctele discrete de pe frontieră. Valorile funcției în punctele ce nu se află pe frontieră, se ajustează pînă cînd ele devin egale cu media valorilor învecinate. În principiu, acest lucru se realizează prin rezolvarea simultană a unui mare număr de ecuații, al căror număr este egal cu numărul punctelor interioare. Dar o soluție aproximativă se poate obține mult mai simplu, schimbînd sistematic fiecare valoare, pentru a o apropia de valoarea medie a funcțiilor învecinate și prin repetarea acestui proces pînă cînd variațiile devin neglijabile. Această metodă se numește *metoda relaxării*. Singurul neajuns al acestei metode este procesul greoi de calcul, care se elimină prin folosirea actuală a calculatoarelor rapide, la care această metodă se pretează ideal. O asemenea aplicație o găsiți în problemele 3.29 și 3.30.

A treia metodă de rezolvare aproximativă a problemei la limită este *metoda variațională*. La baza acestei metode stă o idee care se întîlnește în multe capitole ale fizicii, începînd de la dinamica newtoniană pînă la optică și mecanică cuantică. În elec-

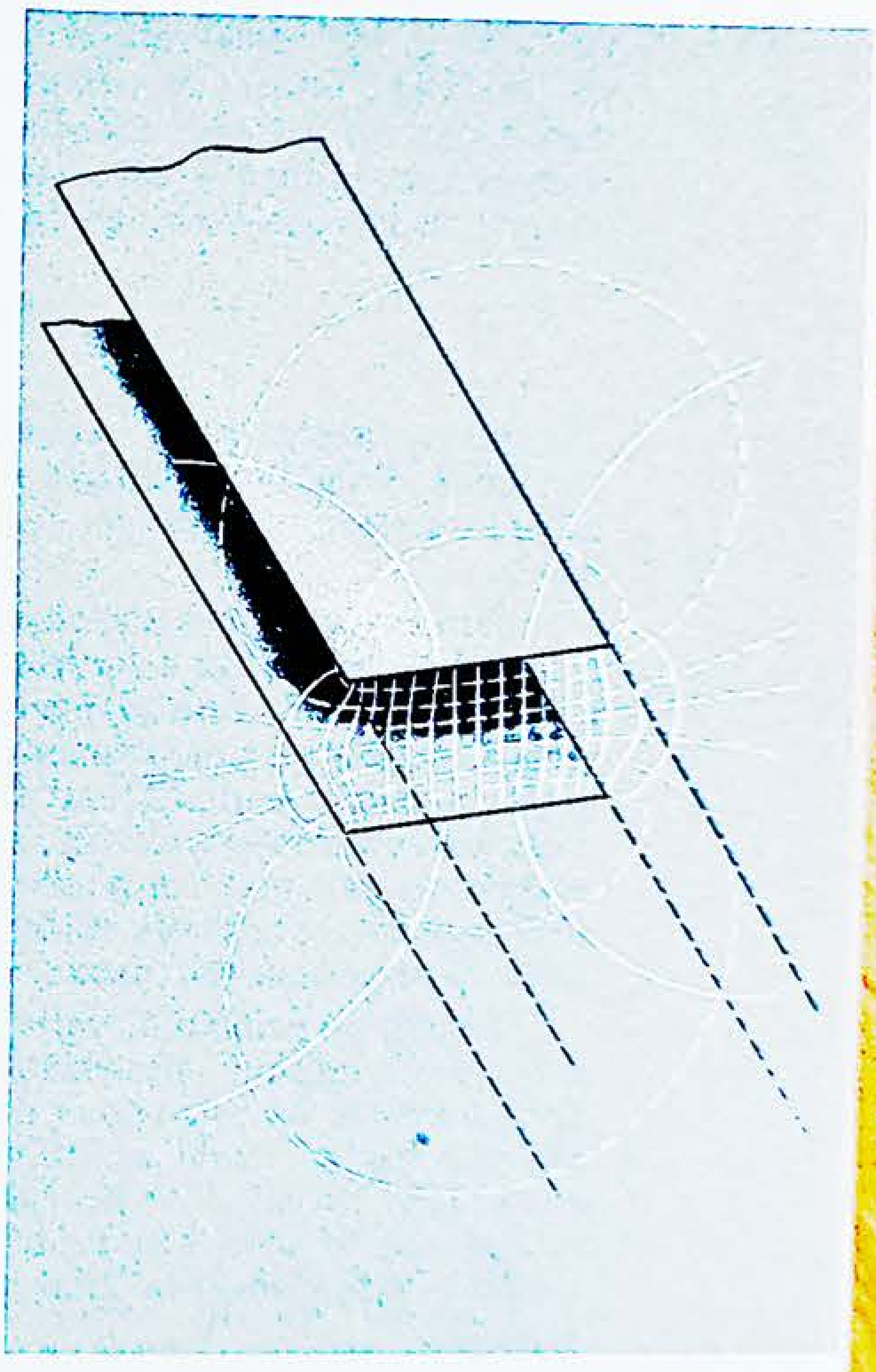


Fig. 3.16. Linii de cîmp și suprafețe echipotențiale pentru două benzi conductoare infinit de lungi.

trostatică acest principiu se exprimă în modul următor: cunoaştem că energia totală a cîmpului electrostatic este

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}v. \tag{24}$$

Dacă aţi rezolvat problema 2.19, ştiţi că în acest caz foarte simplu, sarcina se distribuie pe frontiera conductoare de potenţial constant (formată din două sfere legate printr-un fir) astfel încît valoarea energiei înmagazinată în tot cîmpul să fie *minimă*. Aceasta este o regulă generală. În orice sistem de conductori, pentru valori diferit date ale potenţialelor, sarcina se distribuie pe fiecare din conductori astfel încît valoarea energiei înmagazinate în cîmp să devină minimă. Aceasta devine destul de evident, dacă ţinem seama de faptul că orice micşorare a energiei totale este însoţită de efectuarea unui lucru mecanic de redistribuire a sarcinii.* Suprafaţa plană a apei într-un vas se explică, în principiu, în acelaşi fel.

Să considerăm, acum, funcţia potenţială $\varphi(x, y, z)$ într-o regiune oarecare ce cuprinde cîteva frontiere cu potenţiale date. Valoarea exactă a funcţiei $\varphi(x, y, z)$, adică soluţia ecuaţiei $\nabla^2\varphi = 0$ ce satisface potenţialele date pe frontieră, diferă de toate celelalte funcţii care îndeplinesc condiţiile la limită dar nu satisfac ecuaţia lui Laplace, de exemplu $\psi(x, y, z)$, întrucît energia înmagazinată este *mai mică* pentru φ decît pentru ψ. Exprimăm energia în funcţie de φ, ca în ecuaţia (2.38),

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}v. \tag{25}$$

Acum, putem pune problema la limită în alt fel, fără să ne referim la laplacean. Funcţia potenţială φ este acea funcţie care, *dintre toate funcţiile ce satisfac aceleaşi condiţii la limită, înlocuită în ecuaţia integrală (25) dă un minim.*

Prin urmare, metoda obţinerii unei soluţii aproximative a problemei la limită date, constă în a încerca o mulţime de funcţii cu valorile la limită date şi alegerea acelei funcţii pentru care valoarea lui U este minimă. De asemenea, putem încerca o funcţie cu unul sau doi parametri ajustabili pentru a obţine valoarea minimă a lui U. Metoda este bună mai ales pentru evaluarea energiei, care deseori, este mărimea necunoscută cea mai importantă. Întrucît energia U este minimă pentru o valoare exactă a lui φ, ea nu variază sensibil pentru abaterile de la această valoare. Problema 3.32 ilustrează simplitatea şi rigurozitatea metodei variaţionale.

Faptul că principiul variaţional reprezintă *o altă formulare* a legii fundamentale a cîmpului electrostatic, prezintă mai mare importanţă pentru noi decît folosirea lui ca metodă de calcul. Este verificat faptul că deseori, reformularea legilor fizicii cu ajutorul principiilor variaţionale este foarte utilă şi nu prea dificilă. Profesorul R.P. Feynman, cunoscut pentru strălucitele sale lucrări în acest domeniu, expune într-un stil intuitiv şi elementar ideile metodei variaţionale în unul din capitolele cărţii „Fizica modernă", vol. II, cap. 19.

---

* Raţionînd în acest mod, înseamnă că distribuţia sarcinii este însoţită de o disipare de energie. Ceea ce se şi întîmplă în mod obişnuit. În caz contrar, sistemul, care iniţial nu se găseşte în stare de echilibru, n-ar putea ajunge în această stare, scăpînd de surplusul de energie. Ce credeţi că s-ar întîmpla în acest caz?

PROBLEME

3.1. Un observator, avînd un dispozitiv pentru măsurarea intensității cîmpului electric **E**, se află la o distanță oarecare de o sarcină punctiformă fixă q. Sarcina punctiformă se introduce într-un tub metalic scurt neîncărcat, suspendat de un fir izolator. În ce măsură este afectată intensitatea cîmpului electric măsurată de observator? Dacă v-ați găsi în laborator, într-o cutie mare de cupru, ați putea spune ceva despre purtătorii de sarcină ce se mişcă în exteriorul ei?

(Convingeți-vă că înțelegeți toate aspectele acestei probleme.)

3.2. Un conductor sferic A conține două cavități sferice. Sarcina totală pe conductor este nulă. Totuși, în centrul uneia din cavități se află o sarcină punctiformă q_b, iar în centrul celeilalte — o sarcină q_c. O altă sarcină q_d se află la o distanță foarte mare r de conductor. Ce forță acționează asupra fiecăruia din cele patru obiecte: A, q_b, q_c, q_d? Care din răspunsuri este numai aproximativ și valabil pentru r relativ mare?

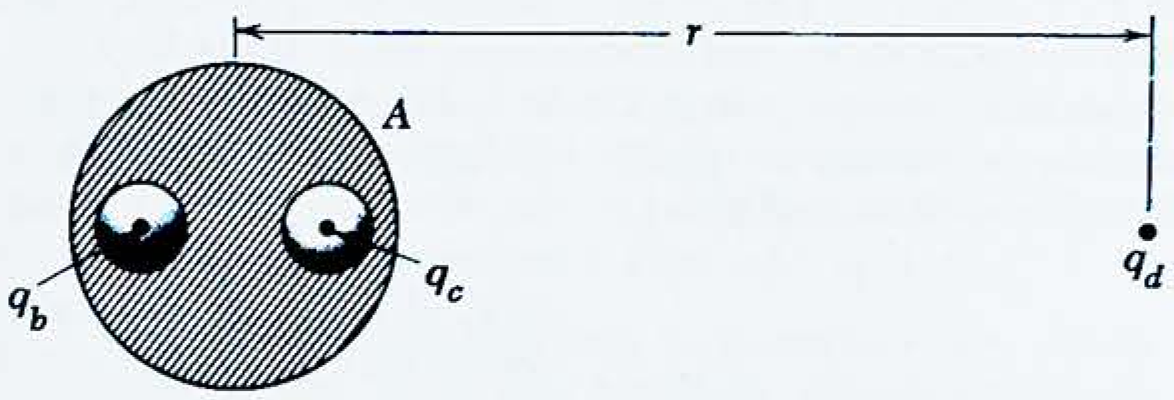


Fig. la problema 3.2.

3.3. Presupunem că după atingerea stării din figura 3.1, *c*, corpul devine din nou neconductor, lăsînd purtătorii de sarcină „înghețați" la locul lor. După aceasta, straturile încărcate pozitiv şi negativ — care au creat cîmpul electric inițial — se îndepărtează. Cum va arăta cîmpul electric din interiorul şi exteriorul corpului?

3.4. Ecranul gravitațional, ce ar „ecrana" cîmpul gravitațional, la fel cum o foiță metalică „ecranează" cîmpul electric, constituie visul multor inventatori ignoranți şi este o ficțiune. Gîndiți-vă la deosebirea dintre sursa gravitațională şi sursele electrice. Observați că pereții cutiei din figura 3.6 nu *ecranează* cîmpul surselor externe, ci permit doar sarcinilor superficiale să creeze un cîmp compensator. De ce nu ne putem imagina ceva asemănător pentru cîmpul gravitațional? De ce am avea nevoie, în acest caz?

PROBLEME

3.1. Un observator, avînd un dispozitiv pentru măsurarea intensității cîmpului electric **E**, se află la o distanță oarecare de o sarcină punctiformă fixă q. Sarcina punctiformă se introduce într-un tub metalic scurt neîncărcat, suspendat de un fir izolator. În ce măsură este afectată intensitatea cîmpului electric măsurată de observator? Dacă v-ați găsi în laborator, într-o cutie mare de cupru, ați putea spune ceva despre purtătorii de sarcină ce se mișcă în exteriorul ei?

(Convingeți-vă că înțelegeți toate aspectele acestei probleme.)

3.2. Un conductor sferic A conține două cavități sferice. Sarcina totală pe conductor este nulă. Totuși, în centrul uneia din cavități se află o sarcină punctiformă q_b, iar în centrul celeilalte — o sarcină q_c. O altă sarcină q_d se află la o distanță foarte mare r de conductor. Ce forță acționează asupra fiecăruia din cele patru obiecte: A, q_b, q_c, q_d? Care din răspunsuri este numai aproximativ și valabil pentru r relativ mare?

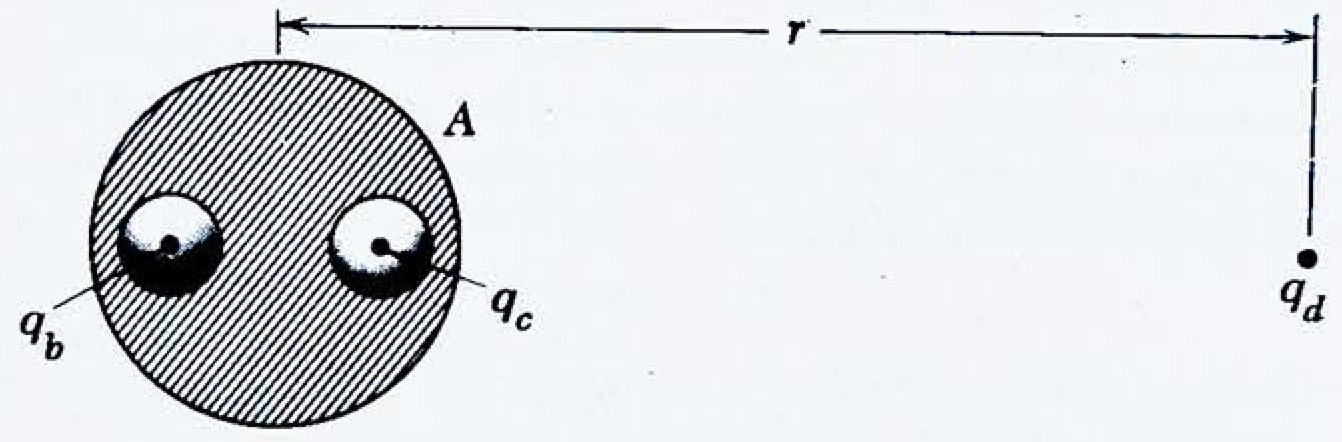


Fig. la problema 3.2.

3.3. Presupunem că după atingerea stării din figura 3.1, *c*, corpul devine din nou neconductor, lăsînd purtătorii de sarcină „înghețați" la locul lor. După aceasta, straturile încărcate pozitiv și negativ — care au creat cîmpul electric inițial — se îndepărtează. Cum va arăta cîmpul electric din interiorul și exteriorul corpului?

3.4. Ecranul gravitațional, ce ar „ecrana" cîmpul gravitațional, la fel cum o foiță metalică „ecranează" cîmpul electric, constituie visul multor inventatori ignoranți și este o ficțiune. Gîndiți-vă la deosebirea dintre sursa gravitațională și sursele electrice. Observați că pereții cutiei din figura 3.6 nu *ecranează* cîmpul surselor externe, ci permit doar sarcinilor superficiale să creeze un cîmp compensator. De ce nu ne putem imagina ceva asemănător pentru cîmpul gravitațional? De ce am avea nevoie, în acest caz?

3.5. În cîmpul sarcinii punctiforme de deasupra planului (fig. 3.9), urmărim o linie de cîmp, ce pleacă din sarcina punctiformă, în direcţie orizontală, paralel cu planul; unde va întîlni suprafaţa conductorului? (Pentru rezolvare, folosiţi legea lui Gauss şi o integrare simplă.)

Un sistem construit, pe baza principiului de superpoziţie, din conductori punctiformi şi plani.

3.6. Rezolvînd problema sarcinii punctiforme şi a conductorului plan am rezolvat, de fapt, orice problemă legată de ele pe baza principiului superpoziţiei. Să presupunem, de exemplu, că avem un conductor rectiliniu uniform încărcat cu $\frac{1}{3}$ μC şi care este întins paralel cu Pămîntul la înălţimea de 5 m. Care este intensitatea cîmpului la suprafaţa Pămîntului, imediat sub conductor? Cu ce este egală forţa electrică ce acţionează pe unitatea de lungime a conductorului? Puteţi imagina alte configuraţii electrostatice simple formate din aceste elemente?

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini de pe un conductor. (Indicaţie: Definiţi potenţialul electric într-un punct, în funcţie de lucrul mecanic pe unitatea de sarcină, necesar pentru a deplasa o sarcină de probă infinitezimală în acel punct.)

3.7. O sarcină Q se află la înălţimea h deasupra unui conductor plan ca în figura 3.8, *a*. Doi studenţi trebuiau să răspundă la întrebarea, care este valoarea lucrului mecanic efectuat la deplasarea acestei sarcini la o distanţă infinită de plan? Unul din studenţi a răspuns că acest lucru mecanic este egal cu cel efectuat pentru a separa la o distanţă infinită două sarcini Q şi $-Q$, aflate la o distanţă egală cu $2h$ cm una de alta şi anume este egal cu $W = 2\pi\varepsilon_0 Q^2/h$. Al doilea student a calculat forţa ce acţionează asupra sarcinii în mişcarea sa şi a integrat $F\mathrm{d}x$, obţinînd un alt rezultat. Ce rezultat a obţinut al doilea student şi care din ei are dreptate?

3.8. Trei plăci conductoare sînt dispuse paralel ca în figură. Plăcile din margine sînt legate printr-un fir. Placa din mijloc este izolată şi poartă o sarcină egală cu 3,3 n C/cm². Să se găsească raportul dintre densitatea superficială de sarcină σ_1 şi σ_2 de pe cele două feţe ale plăcii din mijloc.

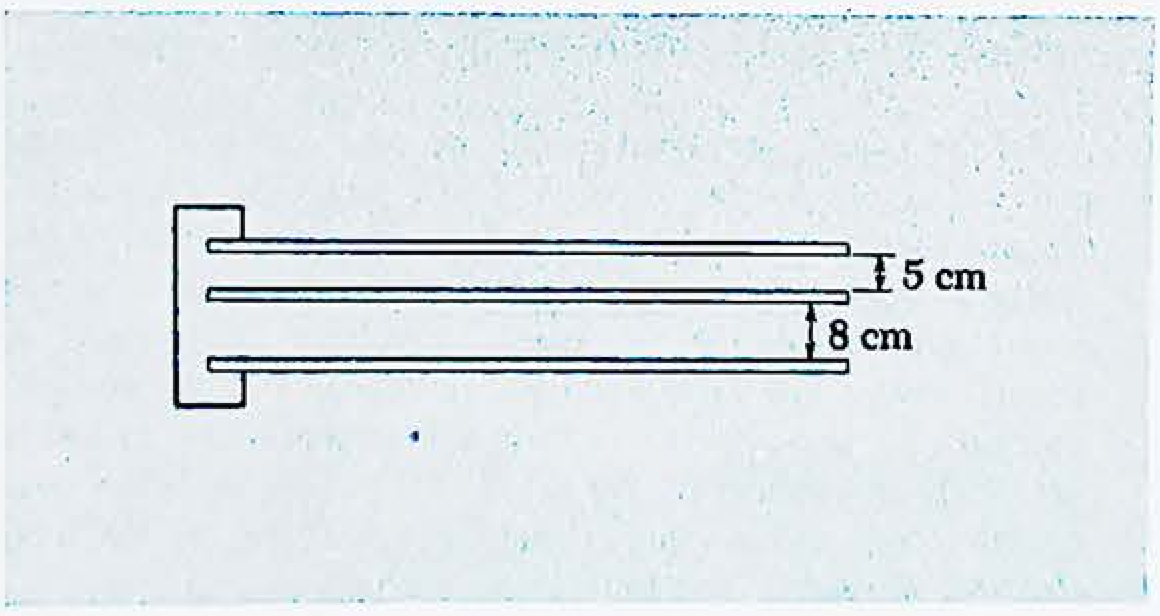


Fig. la problema 3.8

O extindere a „metodei imaginilor".

3.9. Dispuneţi două sarcini egale $+q$ şi două sarcini egale $-q$, fiecare în colţul unui pătrat, astfel încît, sarcinile de acelaşi semn să se afle pe diagonală. Să se arate că există două suprafeţe echipotenţiale care sînt plane. Obţineţi şi reprezentaţi calitativ cîmpul unei singure sarcini punctiforme, aflată pe bisectoarea unghiului interior, format prin îndoirea unei foiţe metalice într-un unghi drept. Ce alte configuraţii de plane şi sarcini punctiforme pot fi rezolvate prin această metodă şi care nu? Ce se poate spune despre o sarcină punctiformă aflată pe bisectoarea unghiului diedru de 120° dintre două plane conductoare?

3.10. O piesă metalică subţire este aşezată între plăcile unui condensator plan-paralel, paralel cu ele. Cum este influenţată capacitatea? Ce se întîmplă dacă piesa este legată printr-un fir de una din plăci?

Doi condensatori legaţi în paralel.

3.11. Un condensator de 100 pF este încărcat pînă la o diferenţă de potenţial de 100 V. După deconectarea bateriei de încărcare, condensatorul se leagă în paralel cu un alt condensator. Dacă diferenţa de potenţial finală este de 30 V, care este capacitatea celui de-al doilea condensator? Cîtă energie s-a pierdut şi ce s-a întîmplat cu ea?

Condensatorul sferic.

3.12. Care este capacitatea C a unui condensator format din două pături sferice concentrice, cu raza interioară r_1 şi cea exterioară r_2? Verificaţi-vă, comparînd rezultatul cu cel obţinut în cazul unui condensator plan-paralel pentru cazul limită cînd $r_2 - r_1 \ll r_1$.

Energia în cîmpul unui condensator sferic.

3.13. Notăm cu φ_{12} diferenţa de potenţial dintre plăcile condensatorului sferic din problema precedentă. Găsiţi o expresie pentru cîmpul electric, în funcţie de rază. Calculaţi energia totală a cîmpului,

$\int (\varepsilon_0 E^2/2)\, dv$, şi arătaţi că ea este egală cu $\frac{1}{2} C\varphi_{12}^2$.

Capacitatea unei sfere izolate.

3.14. Prin capacitatea unui conductor singular izolat înţelegem raportul dintre sarcina conductorului şi potenţialul său, dacă potenţialul, la o distanţă infinită faţă de conductor, este zero. Arătaţi că capacitatea unui conductor sferic este egală cu $4\pi\varepsilon_0 R$ (unde R este raza sferei). Care este capacitatea Pămîntului exprimată în microfarazi?

O problemă de stabilitate mecanică.

3.15. Imaginaţi-vă că un condensator sferic, ca cel descris în problema 3.12, se roteşte ca satelit pe o orbită în jurul Pămîntului. Între pătura sferică interioară şi exterioară nu există nici o legătură mecanică. Vidul este perfect şi frecarea pe sfera exterioară neglijabilă. Cu alte cuvinte, avem situaţia unei „căderi libere" ideale. Presupunem că pe sfera interioară există o sarcină oarecare şi este dispusă concentric în raport cu sfera exterioară.

O extindere a „metodei imaginilor".

3.9. Dispuneţi două sarcini egale $+q$ şi două sarcini egale $-q$, fiecare în colţul unui pătrat, astfel încît, sarcinile de acelaşi semn să se afle pe diagonală. Să se arate că există două suprafeţe echipotenţiale care sînt plane. Obţineţi şi reprezentaţi calitativ cîmpul unei singure sarcini punctiforme, aflată pe bisectoarea unghiului interior, format prin îndoirea unei foiţe metalice într-un unghi drept. Ce alte configuraţii de plane şi sarcini punctiforme pot fi rezolvate prin această metodă şi care nu? Ce se poate spune despre o sarcină punctiformă aflată pe bisectoarea unghiului diedru de 120° dintre două plane conductoare?

3.10. O piesă metalică subţire este aşezată între plăcile unui condensator plan-paralel, paralel cu ele. Cum este influenţată capacitatea? Ce se întîmplă dacă piesa este legată printr-un fir de una din plăci?

Doi condensatori legaţi în paralel.

3.11. Un condensator de 100 pF este încărcat pînă la o diferenţă de potenţial de 100 V. După deconectarea bateriei de încărcare, condensatorul se leagă în paralel cu un alt condensator. Dacă diferenţa de potenţial finală este de 30 V, care este capacitatea celui de-al doilea condensator? Cîtă energie s-a pierdut şi ce s-a întîmplat cu ea?

Condensatorul sferic.

3.12. Care este capacitatea C a unui condensator format din două pături sferice concentrice, cu raza interioară r_1 şi cea exterioară r_2? Verificaţi-vă, comparînd rezultatul cu cel obţinut în cazul unui condensator plan-paralel pentru cazul limită cînd $r_2 - r_1 \ll r_1$.

Energia în cîmpul unui condensator sferic.

3.13. Notăm cu φ_{12} diferenţa de potenţial dintre plăcile condensatorului sferic din problema precedentă. Găsiţi o expresie pentru cîmpul electric, în funcţie de rază. Calculaţi energia totală a cîmpului,

$\int (\varepsilon_0 E^2/2)\, dv$, şi arătaţi că ea este egală cu $\frac{1}{2} C\varphi_{12}^2$.

Capacitatea unei sfere izolate.

3.14. Prin capacitatea unui conductor singular izolat înţelegem raportul dintre sarcina conductorului şi potenţialul său, dacă potenţialul, la o distanţă infinită faţă de conductor, este zero. Arătaţi că capacitatea unui conductor sferic este egală cu $4\pi\varepsilon_0 R$ (unde R este raza sferei). Care este capacitatea Pămîntului exprimată în microfarazi?

O problemă de stabilitate mecanică.

3.15. Imaginaţi-vă că un condensator sferic, ca cel descris în problema 3.12, se roteşte ca satelit pe o orbită în jurul Pămîntului. Între pătura sferică interioară şi exterioară nu există nici o legătură mecanică. Vidul este perfect şi frecarea pe sfera exterioară neglijabilă. Cu alte cuvinte, avem situaţia unei „căderi libere" ideale. Presupunem că pe sfera interioară există o sarcină oarecare şi este dispusă concentric în raport cu sfera exterioară.

Este aceasta o stare stabilă? (Determinați cum se schimbă energia sistemului dacă sfera interioară se deplasează din centru. Pentru a stabili semnul acestei schimbări, puteți studia cum variază capacitatea dacă veți *apropia* foarte mult sfera interioară de cea exterioară.)

Forța ce acționează asupra plăcii unui condensator.

3.16. Calculați forța ce acționează asupra unei plăci a condensatorului plan-paralel. Diferența de potențial dintre plăci este de 3 000 V, iar plăcile reprezintă pătrate cu latura de 20 cm fiind separate de o distanță de 3 cm. Dacă plăcile sînt izolate, astfel încît sarcina nu poate varia, ce lucru mecanic extern este necesar pentru a apropia plăcile? Este acest lucru mecanic egal cu energia înmagazinată inițial în cîmpul electric?

Distribuirea sarcinii induse. (Rezolvați întîi problema 3.8 sau cel puțin gîndiți-vă la ea.)

3.17. Două plăci paralele sînt legate printr-un fir, astfel încît ajung la același potențial. Una din plăci coincide cu planul xz și cealaltă cu planul $y = s$. Distanța s dintre plăci este mult mai mică decît dimensiunile plăcii. O sarcină punctiformă Q se găsește între plăci la distanța $y = b$ (v. figura). Care este mărimea sarcinii superficiale totale pe suprafața interioară a fiecărei plăci? Sarcina superficială totală pe suprafața interioară a ambelor plăci trebuie, evident, să fie $-Q$ (de ce?), și putem presupune că cea mai mare parte din această sarcină se va găsi pe placa mai apropiată de sarcină. Dacă sarcina s-ar fi aflat foarte aproape de placa din stînga, $b \ll s$, prezența plăcii din dreapta n-ar influența prea mult. Totuși, vrem să știm exact, cum se distribuie sarcina. Dacă încercați să aplicați metoda „imaginii", vă veți convinge că e nevoie de un șir infinit de imagini, în ambele părți, asemănător cu șirul de imagini pe care-l vedeți în oglinzile de pe ambii pereți ai unei frizerii. Nu este ușor de calculat cîmpul rezultant într-un punct oarecare de pe una din aceste suprafețe. Nu-i mai puțin adevărat că problema care ne interesează poate fi rezolvată printr-un calcul foarte simplu pe baza principiului de superpoziție. (*Indicații:* Rezolvarea problemei va fi mult simplificată datorită următoarelor observații. Adăugarea unei alte sarcini Q oriunde pe suprafața $y = b$, dublează sarcina superficială pe fiecare placă; de fapt, sarcina superficială totală, indusă de un număr oarecare de sarcini de pe acest plan, este independentă de poziția sarcinilor pe plan. Dacă pe această suprafață s-ar găsi un *strat* uniform încărcat, cîmpurile electrice ar fi simple și am putea rezolva problema folosind legea lui Gauss. Porniți de aici).

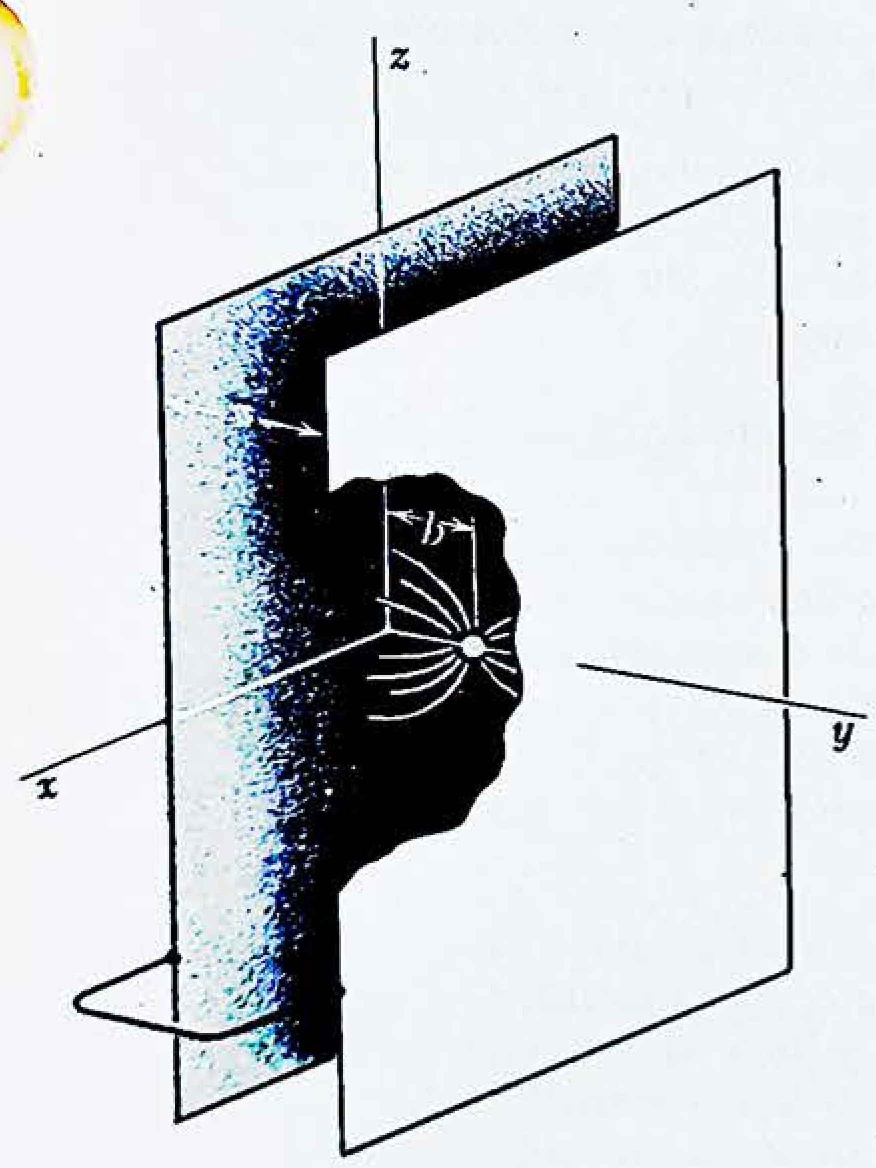


Fig. la problema 3.17

Capitolul 4

Curenţi electrici

4.1. Transport de sarcină şi densitate de curent 128
4.2. Curenţi staţionari 130
4.3. Conductibilitatea electrică şi legea lui Ohm 132
4.4. „Mecanismul" conductibilităţii electrice 134
4.5. Cînd apar abateri de la legea lui Ohm? 139
4.6. Conductibilitatea electrică a metalelor 140
4.7. Rezistenţa conductorilor 143
4.8. Circuite şi elemente de circuit 144
4.9. Disiparea energiei la trecerea curentului 149
4.10. Tensiunea electromotoare şi elementul voltaic 150
4.11. Curenţi variabili în condensatori şi rezistori 154
Probleme 157

4.1. TRANSPORT DE SARCINĂ ŞI DENSITATE DE CURENT

Curentul electric se datorează mişcării purtătorilor de sarcină. Curentul electric dintr-un conductor măsoară* sarcina ce trece printr-o secţiune oarecare a conductorului în unitatea de timp. Unitatea de curent este amperul, care corespunde sarcinii de un coulomb transportată într-o secundă. Un curent de un amper este echivalent cu $6{,}2 \cdot 10^{18}$ electroni pe secundă. Bineînţeles, se ţine cont de sarcina totală transportată, luînd în consideraţie semnul. Se poate spune că mişcarea unui corp neutru implică un transport de sarcină uluitor de mare (aproximativ de 10^5 coulombi pe gram de substanţă!), dar nu există curent deoarece exact acelaşi număr de particule elementare pozitive şi negative se mişcă cu exact aceeaşi viteză medie.

În cazul mai general, curentul sau transportul de sarcină este legat de mişcarea purtătorilor de sarcină într-un spaţiu tridimensional. Pentru a descrie această mişcare, avem nevoie de noţiunea de *densitate de curent*. Întrucît purtătorii de sarcină sînt particule discrete, lucrăm cu valori medii. Ca şi la definirea densităţii de sarcină ρ, trebuie să presupunem că ordinul de mărime a distanţelor este de aşa natură încît, în orice regiune mică în care mediem, numărul de particule de orice fel conţinut în acest domeniu este încă foarte mare.

Să studiem, la început, un caz special în care numărul de particule într-un cm^3 este în medie n, toate mişcîndu-se cu aceeaşi viteză $\mathbf{u}$ şi avînd aceeaşi sarcină q. Să ne imaginăm o suprafaţă dreptunghiulară de arie $\mathbf{a}$, cu o orientare bine determinată în spaţiu (fig. 4.1, *a*). Care este numărul de particule ce trece prin suprafaţă în intervalul de timp Δt? Numărul respectiv de particule este cuprins într-o prismă oblică (fig. 4.1, *b*), cu aria bazei egală cu $\mathbf{a}$ şi lungimea muchiei egală cu $u\,\Delta t$ — distanţa parcursă de fiecare particulă în timpul Δt. Particulele aflate în afara prismei trec pe lîngă suprafaţa respectivă sau nu ajung la ea. Volumul prismei este egal cu produsul dintre suprafaţa bazei şi înălţime, sau $au\Delta t \cos\theta$, care poate fi scris ca: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t$. Numărul de particule cuprins în acest volum este, în medie, $n\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t$. Prin urmare, *viteza medie* de trecere a sarcinii prin elementul de suprafaţă, adică curentul prin elementul de suprafaţă, pe care-l notăm cu $I(a)$, este egal cu

$$I(a) = \frac{q(n\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t)}{\Delta t} = nq\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}. \qquad (1)$$

* De fapt intensitatea curentului (n.t.).

Presupunem că avem particule de diferite tipuri care diferă prin sarcină, prin viteză sau prin amîndouă. Fiecare particulă contribuie în mod diferit la curentul ce trece prin suprafața **a**. Să notăm prin indicele k tipul particulei. Atunci fiecare particulă de tip k are sarcina q_k, se mișcă cu viteza $\mathbf{u}_k$ și densitatea medie a acestor particule este de n_k particule pe centimetru cub. Formal, aceasta se exprimă astfel:

$$I(a) = n_1 q_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1 + n_2 q_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots = \\ = \mathbf{a} \cdot \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k. \qquad (2)$$

Mărimea vectorială, care se înmulțește cu **a** în ecuația (2), o numim *densitate de curent* **J**. Folosind unitățile din sistemul practic de unități, adică coulombul pentru unitatea de sarcină, densitatea de curent va fi exprimată în amperi pe centimetru pătrat:

$$\mathbf{J} = \sum n_k q_k \mathbf{u}_k. \qquad (3)$$

Să luăm în considerare contribuția la densitatea de curent a unui anumit tip de purtători de sarcină, electroni — de exemplu, care se pot mișca cu cele mai diferite viteze. Intr-un conductor, distribuția vitezelor cu care se mișcă electronii este aproape haotică, direcția și mărimea lor variind într-un interval larg de valori. Să notăm cu N_e numărul total de electroni. Electronii pot fi împărțiți în mai multe grupe, fiecare din ele conținînd electroni care au aproximativ aceeași viteză și direcție. Valoarea *vitezei medii* cu care se mișcă toți electronii, ca orice valoare medie, se calculează însumînd pe toate grupele produsul dintre numărul electronilor și viteza lor pentru fiecare grup și împărțind la numărul total de electroni. Se obține astfel,

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e} \sum_k n_k \mathbf{u}_k. \qquad (4)$$

Medierea se face după o distribuție, comparînd ec. (4) cu (3); observăm că contribuția electronilor la densitatea de curent poate fi exprimată simplu cu ajutorul vitezei medii a elec-

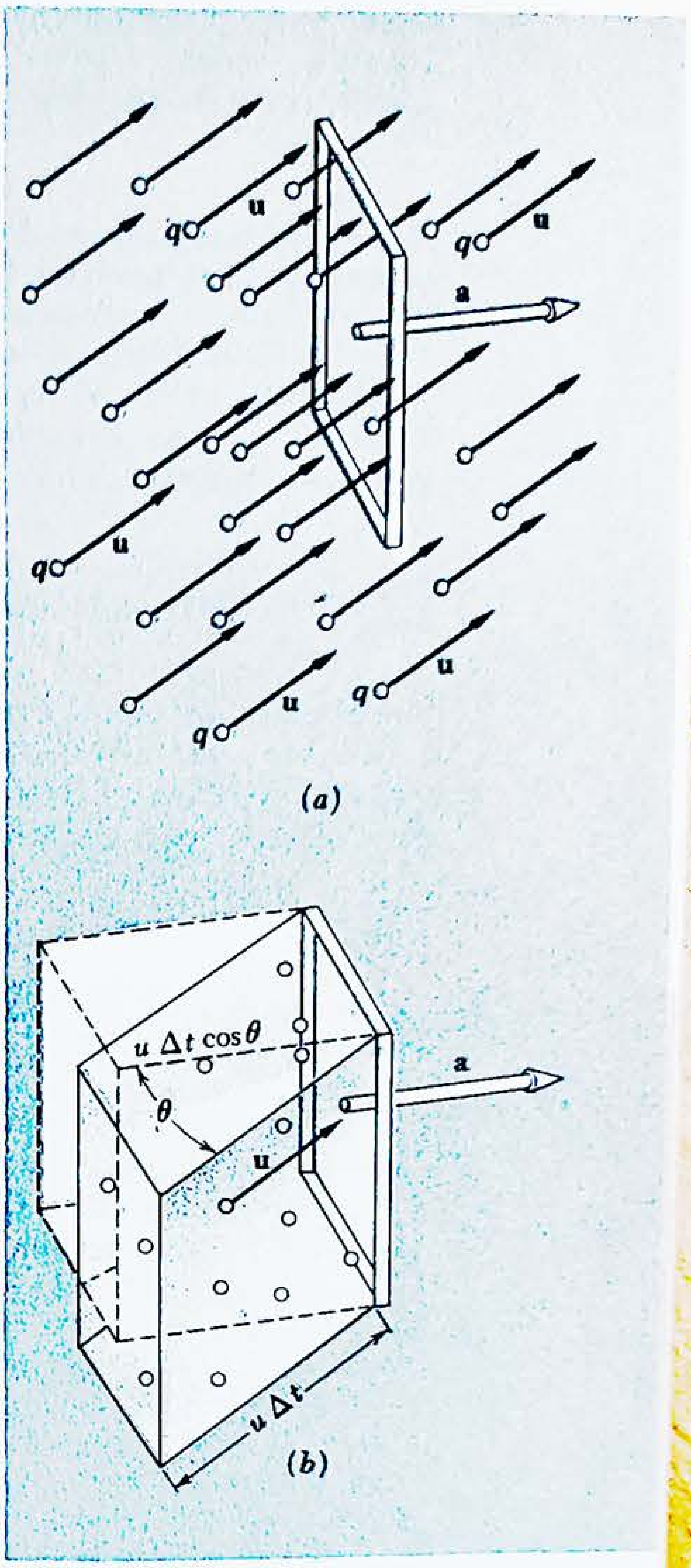


Fig. 4.1. Un fascicul de particule încărcate toate mișcîndu-se cu aceeași viteză **u**. Aria elementului de suprafață este **a**. Particulele ce trec prin elementul de suprafață în Δt secunde sînt cuprinse într-o prismă oblică *(b)*. Suprafața bazei prismei este **a** și înălțimea $u\Delta t \cos\theta$, prin urmare volumul ei este $a\, u\Delta t \cos\theta$ sau $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\, \Delta t$.

tronilor. Amintindu-ne că pentru electroni $q = -e$, şi folosind indicele e pentru a preciza că toate mărimile se referă la purtătorii de sarcină de acelaşi tip, se poate scrie

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\overline{\mathbf{u}}_e. \tag{5}$$

Acest rezultat pare destul de evident, dar am prezentat toate etapele raţionamentului, pentru a fi clar că curentul, printr-un element de suprafaţă, depinde numai de *viteza medie* a purtătorilor, care deseori reprezintă doar o mică fracţiune din mărimea vitezelor lor probabile.

Reţineţi că ec. (4) reprezintă o medie vectorială; pentru o distribuţie a vitezelor, în care toate direcţiile sînt la fel de probabile, ea este zero, indiferent de valorile vitezelor.

4.2. CURENŢI STAŢIONARI

Curentul într-un conductor lung, de exemplu printr-un fir, este bineînţeles egal cu integrala densităţii de curent **J**, pe suprafaţa egală cu secţiunea transversală a firului. Într-adevăr, curentul I ce trece printr-o suprafaţă S oarecare este egal cu integrala de suprafaţă

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \tag{6}$$

I este „fluxul" asociat vectorului **J**; denumirea, în acest caz, este fericit aleasă.

Dacă vectorul densitate de curent **J** rămîne constant în timp, avem de-a face cu un sistem de curenţi staţionari. Curenţii staţionari satisfac legea conservării sarcinii. Să considerăm o regiune oarecare din spaţiu, delimitată de o suprafaţă sferică S. Integrala de suprafaţă din **J**, pe toată suprafaţa S, dă viteza cu care sarcinile părăsesc volumul delimitat de suprafaţa S. Ea va fi pozitivă dacă purtătorii de sarcini pozitive ies din volum, sau dacă purtătorii de sarcini negative intră în volumul respectiv ş.a.m.d. Dacă sarcinile continuă să se scurgă la infinit, mai devreme sau mai tîrziu volumul se va goli de sarcini — dacă nu se creează sarcini noi, lucru care nu se poate întîmpla. Rezultă că pentru o distribuţie a curenţilor independentă de timp, integrala de suprafaţă din **J** pe orice suprafaţă închisă trebuie să fie egală cu zero. Aceasta este echivalentă cu afirmaţia că în orice punct din spaţiu

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \text{ (distribuţie de sarcini independentă de timp).} \tag{7}$$

Pentru a demonstra că ele sînt echivalente, să ne amintim teorema lui Gauss şi definirea divergenţei cu ajutorul integralei de suprafaţă pe o suprafaţă mică ce cuprinde punctul studiat.

Se poate face o afirmaţie mai generală decît ecuaţia (7). Presupunem că curentul nu este staţionar, **J** fiind funcţie şi de x, y, z şi de t. Atunci, întrucît $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ este viteza instantanee cu care sarcina părăseşte volumul

închis, iar $\int_V \rho dv$ — este sarcina totală din interiorul volumului în orice moment,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv. \tag{8}$$

Micşorînd volumul din jurul unui punct oarecare (x, y, z), ec. (8) devine*:

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \begin{pmatrix}\text{distribuţie de sarcină}\\ \text{independentă de timp}\end{pmatrix} \tag{9}$$

Derivata densităţii de sarcină ρ în raport cu timpul se scrie ca o derivată parţială întrucît ρ este, de obicei, funcţie şi de coordonatele de poziţie şi de timp. Ecuaţiile (8) şi (9) exprimă *conservarea sarcinii;* nici o sarcină nu se poate scurge dintr-un loc fără ca sarcina în acest loc să scadă.

Un exemplu instructiv a unei distribuţii staţionare de curent este cea dintr-o diodă plană a unei lămpi cu doi electrozi. Unul din electrozi, catodul, este acoperit cu un material cu emisie electronică mare cînd este încălzit. Celălalt electrod, anodul, este pur şi simplu o plăcuţă metalică. Cu ajutorul unei baterii, anodul este menţinut la un potenţial pozitiv faţă de catod. Electronii ies din acest catod fierbinte cu viteze foarte mici, dar sînt acceleraţi spre anodul pozitiv de către cîmpul electric dintre catod şi anod. În spaţiul dintre catod şi anod curentul electric este format din aceşti electroni în mişcare. Circuitul exterior este închis prin curentul de electroni din conductori, sau prin mişcarea ionilor în baterie ş.a.m.d. — dar asta nu ne interesează. În această diodă, densitatea locală de sarcină ρ, în orice regiune a spaţiului, este pur şi simplu $-ne$, n reprezentînd densitatea locală a electronilor, exprimată în electroni/cm^3. Densitatea locală de curent $\mathbf{J}$ este, bineînţeles, $\rho\mathbf{v}$ unde $\mathbf{v}$ este viteza electronilor din acea regiune. În cazul diodei plan-paralele, se poate presupune că $\mathbf{J}$ nu are componentele y şi z (fig. 4.2).

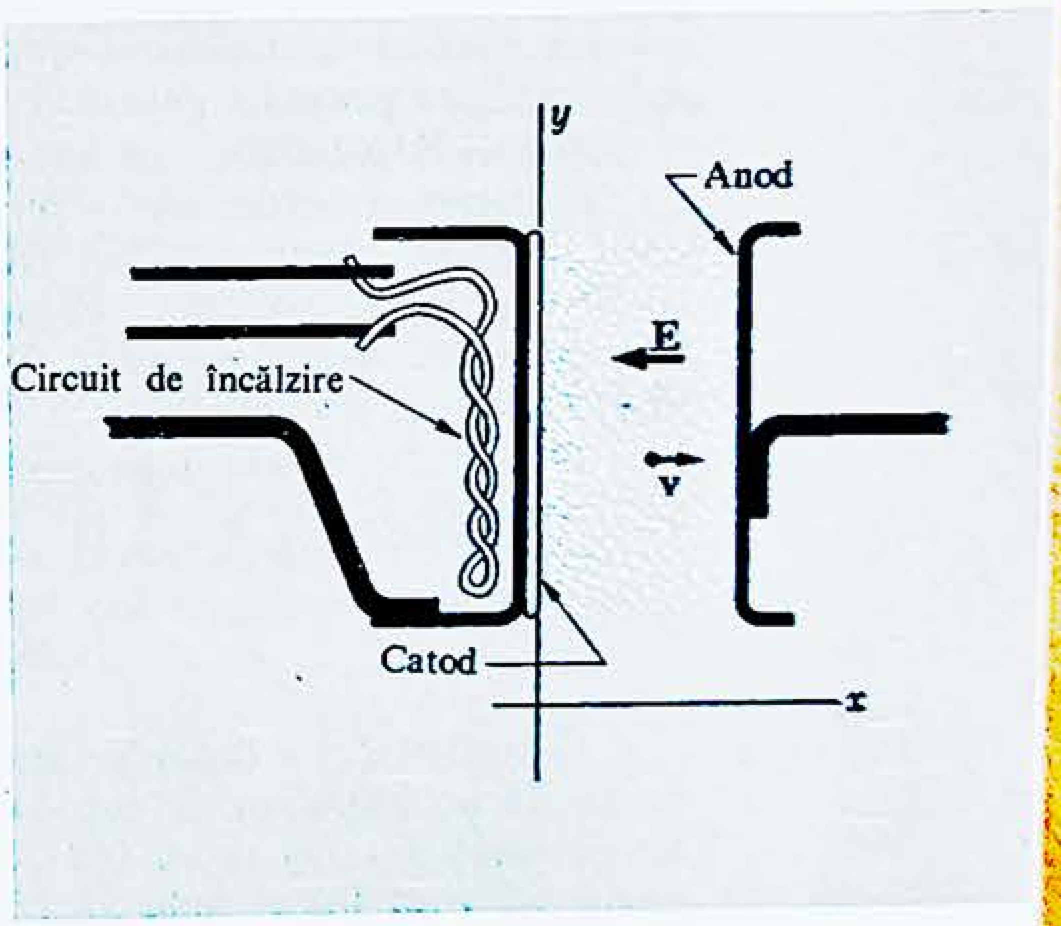


Fig. 4.2. O diodă cu vid cu catodul şi anodul plan-paralele.

Dacă condiţiile sînt staţionare, rezultă că J_x nu depinde de x, deoarece dacă $\text{div } \mathbf{J} = 0$ — după cum rezultă din ec. (7) — şi dacă $J_y = J_z = 0$, înseamnă că şi $(\partial J_x/\partial x)$ trebuie să fie zero. Acest lucru este destul de evident: într-un curent

* Dacă trecerea de la ecuaţia (8) la (9) nu vă pare evidentă, revedeţi definiţia divergenţei din cap. 2. Întrucît volumul din jurul punctului se micşorează putem, eventual, scoate pe ρ înafara integralei de volum din dreapta. Integrala de volum se ia într-un moment bine determinat de timp. Derivata ei în raport cu timpul este determinată de diferenţa integralelor de volum la t şi $t + \Delta t$. Singura diferenţă dintre ele constă în variaţia lui ρ, întrucît contururile volumului rămîn pe loc.

staționar de electroni, care se mișcă numai pe direcția x, orice suprafață aflată între catod și anod este străbătută de același număr de electroni pe secundă. Rezultă că ρv este constant. Observăm, însă, că v *nu* este constantă; ea variază cu x deoarece electronii sînt accelerați de cîmp. Deci nici ρ nu este constant. Într-adevăr, densitatea sarcinilor negative este mare în apropierea catodului și mică în apropierea anodului, la fel cum densitatea mașinilor pe o șosea este mare pe porțiunile unde se circulă cu viteză mică și mică pe porțiunile unde se circulă cu viteză mare.

Curentul într-o diodă poate fi limitat printr-un efect interesant: densitatea sarcinilor negative („sarcina spațială") poate influența cîmpul electric și prin urmare, accelerația și viteza electronilor, revenind astfel din nou la densitatea de sarcină. Problema 4.25 analizează comportarea unei diode „cu limitarea curentului de către sarcina spațială" și se arată cum poate fi dedusă o relație interesantă între tensiuni și curent care guvernează această comportare. Relația prezintă importanță pentru electronică, nu numai în construcția și utilizarea diodelor, dar și construcția tunurilor electronice pentru tuburile cu raze catodice și alte construcții de acest fel.

4.3. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ȘI LEGEA LUI OHM

Există multe posibilități de punere în mișcare a sarcinilor, printre ele numărîndu-se și „transportul" mecanic al purtătorilor de sarcină. În generatorul electrostatic Van de Graaff (v. probl. 4.3), unei benzi izolate i se transmite o sarcină superficială, pe care banda o transportă la un electrod îndepărtat, la fel cum escalatorul ridică oameni. În acest mod, ia naștere un curent perfect sesizabil. Picăturile de apă încărcate din atmosferă, căzînd sub acțiunea propriei greutăți, formează o componentă a sistemului de curenți electrici ai Pămîntului. În acest paragraf vom studia un mod mult mai comun de transport a sarcinilor — forța exercitată asupra unui purtător de sarcină de către un cîmp electric. Cîmpul electric pune în mișcare purtătorii de sarcină și, prin urmare, dă naștere unui curent electric. Dacă se întîmplă sau nu acest lucru, depinde de natura fizică a sistemului în care acționează cîmpul, adică de *mediu*.

Una din primele descoperiri în domeniul curenților electrici în substanță este exprimată în legea lui Ohm:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{10}$$

Curentul I, ce trece printr-un conductor, este proporțional cu U — diferența de potențial de la capetele conductorului. Pînă acum, am notat potențialul electric cu φ și cu $(\varphi_1 - \varphi_2)$ sau φ_{12} — diferența de potențial. În acest paragraf vom folosi notația U care este mult mai des întîlnită în circuitele electrice. (Am evitat pînă acum folosirea lui U, mai mult din cauza faptului că e folosit pentru notația mai multor noțiuni diferite).

Pentru o porțiune de conductor menținută la aceeași temperatură, rezistența R — constanta de proporționalitate din ecuația 10, nu depinde de valoarea curentului ce trece prin el. Rezistența depinde, în mod evident, de lungimea și secțiunea conductorului, fiind proporțională cu lungimea l

şi invers proporţională cu aria secţiunii transversale A. Ea depinde, de asemenea, de materialul din care este confecţionat conductorul, şi toate acestea se exprimă printr-o formulă simplă:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \tag{11}$$

Factorul ρ se numeşte rezistenţa specifică (de volum) sau rezistivitatea substanţei. De obicei, rezistenţa se măsoară în ohmi, intensitatea curentului şi diferenţa de potenţial în legea lui Ohm măsurîndu-se, corespunzător, în amperi şi volţi. Unitatea de măsură corespunzătoare rezistivităţii este ohm · m, dacă lungimile se măsoară în metri; de obicei în tabele, figurează această unitate.

Ecuaţiile (10) şi (11) sînt folosite de ingineri pentru calculul rezistenţelor porţiunilor de circuite electrice şi a relaţiilor dintre tensiune şi curent în aceste circuite. Pentru fizician — cu excepţia cazurilor în care proiectează aparatura electrică — aceste ecuaţii reflectă proprietăţi remarcabile şi generale ale substanţei, pe care el încearcă să le pătrundă. Esenţialul, reflectat de aceste două ecuaţii, constă în următoarele: într-un material solid, omogen, densitatea de curent în orice punct este proporţională cu intensitatea cîmpului electric, iar constanta de proporţionalitate depinde numai de natura substanţei şi nu de forma conductorului şi anume

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{12}$$

unde σ este o constantă caracteristică substanţei date.

În interiorul majorităţii conductorilor, toate cele trei direcţii perpendiculare între ele sînt echivalente din punct de vedere fizic. De exemplu, în cupru, atomii formează o reţea cubică (cub cu feţe centrate). Dar chiar şi atunci cînd aranjarea atomilor nu este cubică, ca în cazul unei bucăţi de metal care este formată din multe cristale mici orientate oricum, cînd se mediază pe un volum mare toate direcţiile devin echivalente.

În toate substanţele, neexistînd direcţii privilegiate, $\mathbf{J}$ are aceeaşi direcţie cu $\mathbf{E}$ şi constanta σ este un scalar.* O numim *conductivitate electrică* a materialului. Conductivitatea σ este o mărime inversă a rezistivităţii ρ**. Figura 4.3 rezumă aceste relaţii simple şi arată cum rezultă ecuaţiile (10) şi (11) din ecuaţia (12).

Cîteva cuvinte despre unităţi şi dimensiuni. Unitatea de măsură obişnuită pentru conductivitate derivă din unitatea practică pentru rezistenţă — ohmul. După cum ştiţi, ohmul este un volt pe un amper. Conductivitatea este egală cu raportul care în unităţi practice va fi

$$\frac{\text{densitate de curent}}{\text{intensitatea cîmpului}},$$

$$\frac{\text{A/m}^2}{\text{V/m}} \quad \text{sau} \quad (\Omega \cdot \text{m})^{-1},$$

---

* În general, o relaţie liniară între doi vectori implică un *tensor*. În cap. 9 vom întîlni un exemplu de tensor. Există o serie de substanţe în care conductivitatea pe diferite direcţii este diferită şi trebuie tratată ca un tensor, dar noi nu ne vom ocupa de aceste cazuri.

** Literele greceşti ρ şi σ sînt folosite, de obicei, pentru rezistivitate şi conductivitate, deşi ele sînt folosite, de asemenea, pentru densitate de sarcină volumică şi densitate superficială de sarcină. Se pare că nu dispunem de prea multe litere!

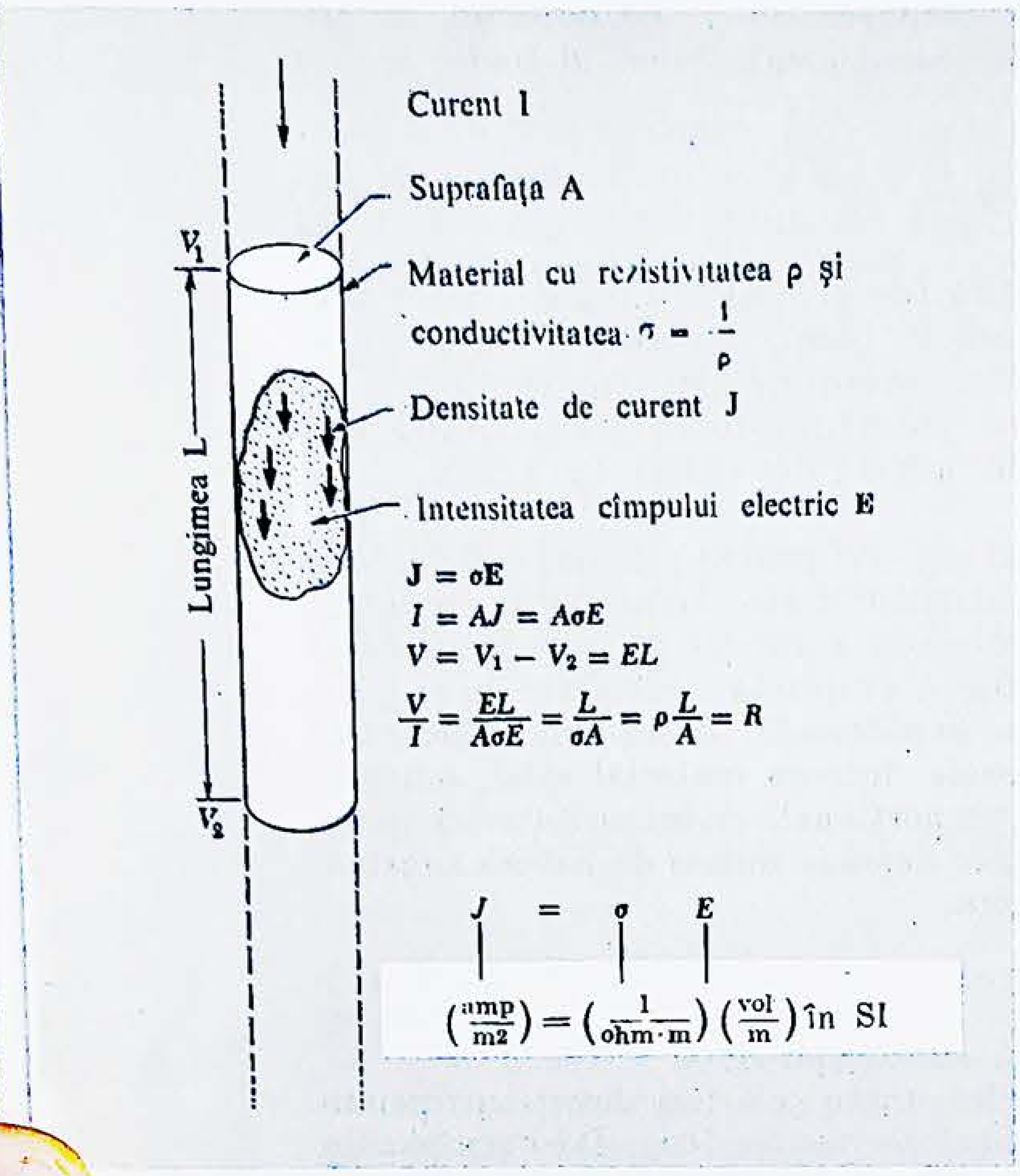


Fig. 4.3. Curgerea curentului printr-un conductor. Relaţia fundamentală dintre densitatea de curent J şi intensitatea cîmpului electric E implică legea lui Ohm, $V = IR$.

citită, deseori, ca „unu pe ohm · metru". Şi mai des, întîlnim inversul conductivităţii, numit *rezistivitate.* Unitatea practică de măsură este ohm-metru şi simbolul ρ. Rezistivitatea unui bun conductor, la temperatura camerei este, de obicei, de aproximativ 10^{-8} ohm · m. Astfel, cuprul pur, la temperatura camerei, are o rezistivitate de $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ ohm · · m, sau o conductivitate de $5{,}8 \cdot 10^{7}$ $(\text{ohm} \cdot \text{m})^{-1}$. Care sînt dimensiunile rezistivităţii, de exemplu?

$$\text{Rezistivitatea} = \frac{\text{intensitatea cîmpului}}{\text{densitatea de curent}} = \left(\frac{\text{tensiune}}{\text{lungime}}\right) / \left(\frac{\text{curent}}{\text{lungime}^2}\right) \qquad (13)$$

care dă $\frac{\text{tensiune}}{\text{curent}} \cdot \text{lungime} = \text{rezistenţa} \cdot \text{lungime}$

4.4. MECANISMUL CONDUCTIBILITĂŢII ELECTRICE

Ecuaţia (12) este mai mult o descriere a observaţiilor făcute asupra comportării celor mai obişnuite substanţe în anumite condiţii. N-o putem deduce din legile fundamentale ale cîmpului electric. Pentru a-i înţelege semnificaţia, trebuie să studiem procesele ce au loc într-o anumită substanţă cînd i se aplică un cîmp electric. Aceste procese pot diferi mult de la substanţă la substanţă. Ceea ce este remarcabil la legea lui Ohm, este valabilitatea ei pentru varietatea de substanţe şi pentru un domeniu larg de variaţie a intensităţii cîmpului. (În unele cazuri ea este încălcată şi chiar trebuie să fie încălcată şi vom vedea de ce.) Vom încerca acum să descriem amănunţit procesul conductibilităţii electrice într-un sistem simplificat, dar destul de tipic pentru o clasă largă de conductori electrici, însă nu pentru toţi.

Avem nevoie de purtători de sarcină, prin urmare, să ne imaginăm un mediu format dintr-un număr egal de purtători de sarcină pozitivă şi negativă, să spunem, N din fiecare tip pe centimetru cub. Purtătorii pozitivi sînt ioni de masă M_+ fiecare, purtînd sarcina e, în timp ce purtătorii negativi sînt ioni negativi de masă M_- fiecare şi cu sarcina $-e$. Densitatea de curent **J** va fi determinată de vitezele medii ale acestor ioni.

Un cîmp electric uniform **E**, constant în timp, se aplică acestui sistem, asupra fiecărui purtător de sarcină exercitîndu-se o forță. Pentru prima oară, întîlnim în acest volum o forță ce acționează asupra unei sarcini aflate în *mișcare* într-un cîmp electric. Problema o vom trata mai atent în cap. 6. De fapt, forța exercitată este aceeași și dacă purtătorul de sarcină ar fi în repaus, acest lucru l-am folosit și în volumul *I*. Înseamnă că fiecare purtător de sarcină q, independent de mișcarea sa, se află sub acțiunea unei forțe constante $q\mathbf{E}$.

Ne oprim aici, pentru a constata cu uimire că legea lui Ohm este totuși valabilă! O forță constantă ce acționează asupra unui purtător de sarcină liber determină o accelerație constantă. Dar densitatea de curent constantă este legată de *viteza* constantă și nu de accelerația constantă. Dacă în sistemul nostru, legea lui Ohm este într-adevăr valabilă, asta se întîmplă din cauză că *viteza* medie a purtătorilor noștri de sarcină este proporțională cu *forța*. Rezultă că purtătorii de sarcină nu se pot mișca liber; există ceva care împiedică mișcarea produsă de cîmpul electric.

Nu trebuie să mergem prea departe, pentru a descoperi forțele de frecare ce împiedică mișcarea; ea apare datorită ciocnirii purtătorilor de sarcină între ei și cu oricare alte particule care s-ar afla în mediu.

Cum introducem această forță de frecare depinde de particularitățile modelului ales. Pentru a concretiza, să ne gîndim la un gaz format din atomi neutri, ioni pozitivi și ioni negativi, cu valoarea concentrației apropiată de cea în condiții normale, adică în jur de 10^{19} atomi/cm^3 (fig. 4.4). Să presupunem că atomii neutri predomină, ionii pozitivi și negativi fiind răspîndiți printre ei. Distanța dintre particule, neutre sau încărcate, este mult mai mare decît raza atomului sau a ionului și ca urmare, în cea mai mare parte din timp, ionii *nu* se ciocnesc.

În absența cîmpului electric, atomii și ionii se mișcă în toate direcțiile, iar vitezele lor sînt determinate de temperatură. Dacă am avea nevoie, teoria cinetică a gazelor ne poate da relația dintre temperatură și energia cinetică medie a unei particule. Dacă am putea observa un anumit ion, la un anumit timp, să spunem $t = 0$, am vedea că el se mișcă cu viteza **u**. Ce se va întîmpla apoi? Ionul se va mișca rectiliniu, cu viteză constantă, pînă cînd se va apropia de un atom, destul de aproape pentru ca forțele de scurtă distanță să intre în acțiune. În această *ciocnire*, energia cinetică totală și impulsul total al celor două corpuri se va conserva, dar viteza și direcția de mișcare a ionului se va schimba — poate doar puțin, poate radical — pînă la o valoare **u**'. Apoi va avea loc o nouă ciocnire, schimbînd valoarea vitezei la **u**", ș.a.m.d. Se poate întîmpla, de asemenea, ca un alt ion, aflat în apropiere, interacționînd cu ionul nostru prin intermediul forțelor coulombiene de rază mare de acțiune, să-l devieze. Forțele cu rază mare de acțiune sînt importante în cazul inter-

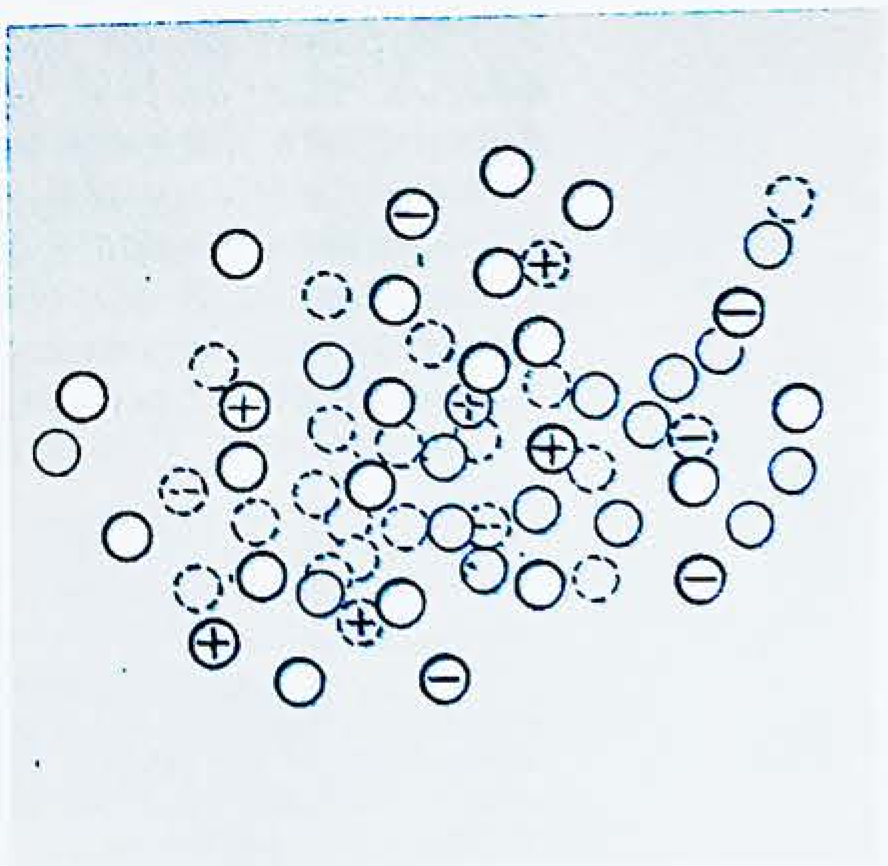


Fig. 4.4. Ioni pozitivi și negativi printre atomi neutri.

acțiunilor dintre ioni; în general, ele determină variații mici ale vitezei, dar efectul final este același.

Efectul final — și aici se află cheia problemei noastre — constă în faptul că orice relație (în mărime sau direcție) între viteza $\mathbf{u}$ a ionului la $t = 0$ și viteza sa după un interval oarecare de timp, dispare. Asta înseamnă că după un timp oarecare $t = \tau$, orice direcție în spațiu a vectorului viteză a ionului, este la fel de probabilă, independent de direcția pe care o avea la momentul $t = 0$. Ionul și-a „uitat" direcția inițială. Cu alte cuvinte, dacă se iau 10 000 de ioni care se mișcă pe direcție orizontală spre sud, și dacă timp de τ secunde îi urmărim pe fiecare în parte, direcțiile vitezelor lor finale vor fi uniform distribuite după o sferă. În funcție de natura interacțiunii — ce implică variații de impuls mai mari sau mai mici — pentru „uitarea" direcției inițiale, sînt necesare mai multe ciocniri sau doar cîteva.

Cazul limită îl constituie ciocnirea sferelor elastice tari, cînd doar în urma unei singure ciocniri se produce o completă „uitare" a direcției. Nu trebuie să ne îngrijoreze aceste nuanțe. Important este faptul că indiferent de mecanismul ciocnirilor, există un interval de timp τ, caracteristic sistemului dat, după care în mare măsură, se pierde orice *corelație* între direcția inițială și finală a vitezei ionului din acest sistem*. Acest timp caracteristic depinde de ion și de natura vecinilor lui; desigur, el va fi cu atît mai scurt cu cît ciocnirile vor fi mai frecvente, întrucît între ciocniri, cu ionul din gazul considerat, nu se va întîmpla nimic.

Acum, putem aplica sistemului un cîmp electric uniform $\mathbf{E}$. Pentru simplificare, putem considera că pierderea memoriei asupra direcției are loc într-o singură ciocnire, ca în cazul sferelor tari. Concluziile noastre generale nu depind de această presupunere. Imediat după ciocnire, ionul se va mișca într-o direcție oarecare. Vom nota cu $\mathbf{u}^c$ viteza imediat după ciocnire. Forța electrică $\mathbf{E}e$ ce acționează asupra ionului va mări continuu impulsul lui. Creșterea de impuls a ionului după timpul t, va fi $\mathbf{E}et$ care, pur și simplu, se însumează vectorial cu impulsul inițial $M\mathbf{u}^c + \mathbf{E}et$. Dacă impulsul a variat puțin, în comparație cu $M\mathbf{u}^c$, înseamnă că viteza n-a variat prea mult și ne putem aștepta să aibă loc o altă ciocnire, după un timp, care va fi cam același cu cel scurs în absența cîmpului. Cu alte cuvinte, timpul mediu dintre ciocniri, pe care-l vom nota cu $\bar{t}$, este independent de intensitatea cîmpului $\mathbf{E}$, dacă aceasta nu este prea mare.

Impulsul primit din partea cîmpului este tot un vector avînd aceeași direcție. Dar, de fapt, el se pierde treptat, întrucît în urma fiecărei ciocniri direcția este oarecare nedepinzînd de cea inițială.

Care este impulsul mediu al tuturor ionilor pozitivi la un moment dat? Răspunsul la această întrebare este neașteptat de simplu dacă se presupune că: la momentul dat oprim cronometrul și întrebăm fiecare ion cît timp a trecut de la ultima sa ciocnire. Presupunem că ionul numărul 1 dă timpul t_1. Atunci, impulsul acestui ion este $e\mathbf{E}t_1$ plus impulsul $M\mathbf{u}^c$ avut imediat după ultima ciocnire. Prin urmare, impulsul mediu al tuturor ionilor pozitivi N este

$$M\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{1}{N} \sum_j (M\mathbf{u}_j^c + e\mathbf{E}t_j) \tag{14}$$

---

* Ar fi posibilă definirea exactă a lui τ pentru orice sistem cu ajutorul corelației cantitative dintre direcțiile inițiale și finale. Aceasta este o problemă de natură statistică, asemănătoare cu studiul corelației dintre greutatea șobolanilor nou-născuți și cea pe care o vor avea cînd vor ajunge la maturitate. Pentru analiza noastră însă asemenea determinări cantitative nu sînt necesare.

$\mathbf{u}_j^c$ reprezintă viteza ionului j imediat după ultima sa ciocnire. Întrucît direcţia acestor viteze este complet arbitrară, medierea asupra lor dă valoarea zero. Al doilea termen este produsul dintre $e\mathbf{E}$ şi timpul mediu t_j, adică timpul mediu scurs de la ultima ciocnire. Acesta este egal cu timpul scurs pînă la următoarea ciocnire şi ambele sînt egale cu timpul mediu scurs între două ciocniri $\bar{t}$*. Ajungem la concluzia că viteza medie a unui ion pozitiv, într-un cîmp constant $\mathbf{E}$ este egală cu:

$$\overline{\mathbf{u}}_{+} = \frac{\mathbf{E}e\bar{t}_{+}}{M_{+}}. \tag{15}$$

Rezultă că viteza medie a unui purtător de sarcină este direct proporţională cu forţa aplicată. Este ca şi cum mediul ar opune o rezistenţă proporţională cu viteza. Această rezistenţă este de aceeaşi natură cu cea pe care o simţim cînd învîrtim linguriţa într-o dulceaţă bine legată — este o rezistenţă „vîscoasă". De fiecare dată cînd purtătorii de sarcină au o asemenea comportare, ne putem aştepta la ceva asemănător cu legea lui Ohm.

În ecuaţia (15) am scris $\bar{t}_{+}$, deoarece timpul mediu dintre ciocnirile ionilor pozitivi şi negativi ar putea diferi foarte mult. Direcţia vitezei ionilor negativi este opusă şi ei fiind purtători de sarcină negativă, contribuţia lor la densitatea de curent $\mathbf{J}$ se adaugă la cea a ionilor pozitivi. Dacă considerăm contribuţia ambelor tipuri de ioni, ecuaţia (3.24) se scrie:

$$\mathbf{J} = Ne\left(\frac{e\mathbf{E}\bar{t}_{+}}{M_{+}}\right) - Ne\left(\frac{-e\mathbf{E}\bar{t}_{-}}{M_{-}}\right) = Ne^2\left(\frac{\bar{t}_{+}}{M_{+}} + \frac{\bar{t}_{-}}{M_{-}}\right)\mathbf{E}. \tag{16}$$

Conform teoriei noastre, sistemul se supune legii lui Ohm. Într-adevăr, ecuaţia (16) este o relaţie liniară între $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{J}$, celelalte mărimi fiind constante caracteristice mediului dat. Comparînd ec. (16) cu ec. (12), constanta $Ne^2\left(\frac{\bar{t}_{+}}{M_{+}} + \frac{\bar{t}_{-}}{M_{-}}\right)$ joacă rolul conductivităţii σ a mediului.

Studiind acest sistem, am făcut o serie de presupuneri cu totul speciale, cu toate acestea, se observă că ele nu sînt esenţiale atîta timp cît relaţia liniară dintre $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{J}$ se menţine. Dacă intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ nu este prea mare, orice sistem cu o densitate constantă de purtători de sarcină liberi, în care poate avea loc frecvent o „rearanjare" a lor în urma ciocnirilor sau a altor interacţiuni, trebuie să se supună legii lui Ohm. Raportul dintre $\mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$, care reprezintă conductivitatea σ a mediului, este proporţional cu numărul purtătorilor de sarcină şi timpul caracteristic τ — timpul de pierdere a corelaţiei direcţionale. Aceasta este singura mărime care reprezintă toate detaliile complicate ale ciocnirilor în problema noastră. Construirea unei teorii detaliate a conductibilităţii unui sistem dat, presupunînd că se cunoaşte numărul purtătorilor de sarcină, se reduce la construirea unei teorii pentru τ.

---

* Aţi putea crede că timpul mediu scurs între două ciocniri ar putea fi suma dintre timpul mediu scurs de la ultima ciocnire şi timpul mediu scurs pînă la următoarea ciocnire. Ar fi aşa, dacă ciocnirile ar avea loc la intervale strict egale de timp, ceea ce nu se întîmplă. Ciocnirile sînt evenimente aleatorii independente şi oricît ar părea de paradoxal, afirmaţia de mai sus este valabilă. Mai reflectaţi asupra acestei chestiuni. Deşi problema nu influenţează raţionamentul nostru, vă îmbogăţeşte cunoştinţele de statistică. (*Indicaţie:* dacă o ciocnire nu afectează probabilitatea de a avea loc o alta — adică ele sînt *independente* — atunci, fie că declanşaţi cronometrul la un moment oarecare, fie în momentul unei ciocniri, rezultatul este acelaşi.)

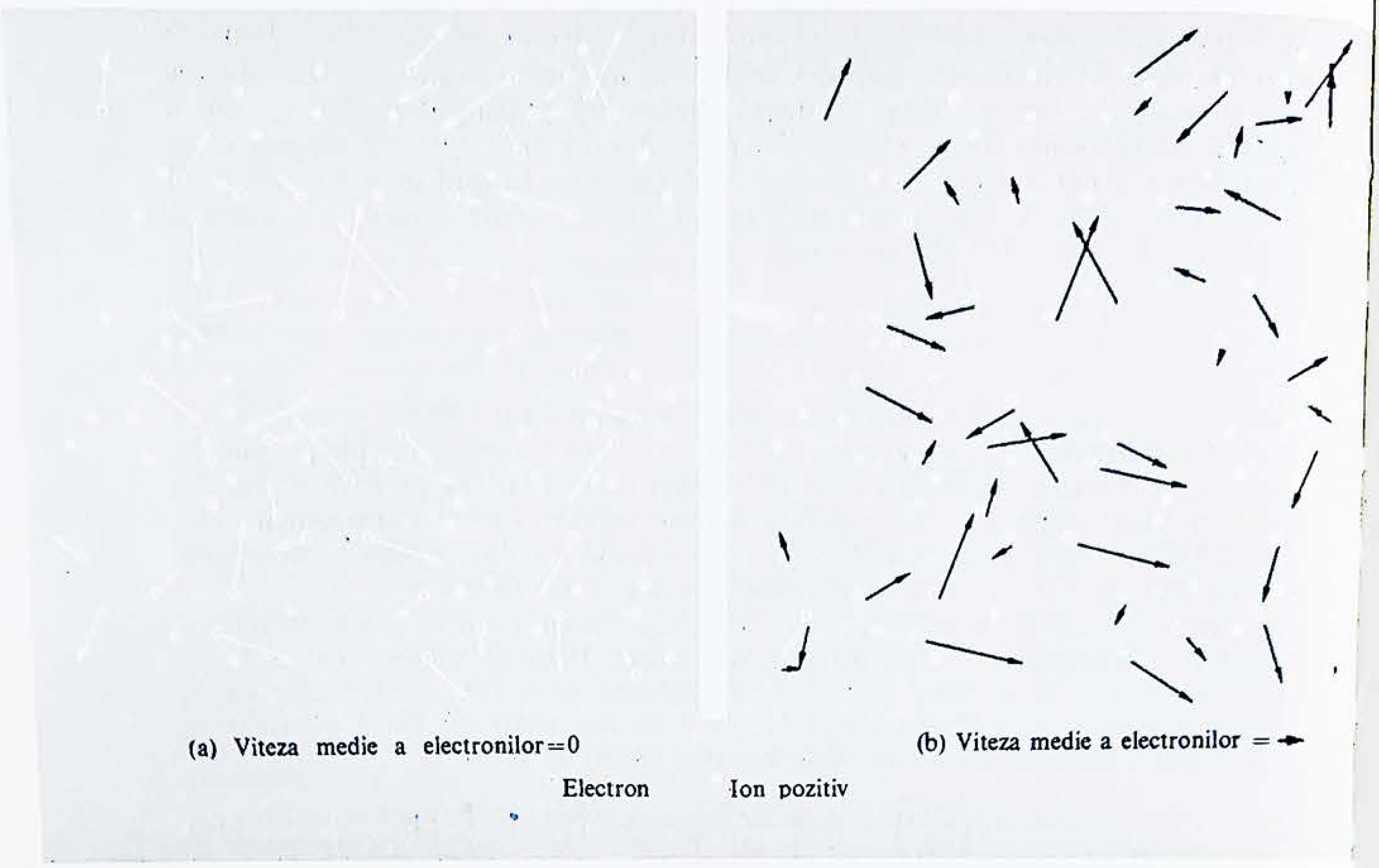


Fig. 4.5. *a)* O distribuţie haotică a electronilor şi ionilor pozitivi, fiind cam în acelaşi număr fiecare. Vitezele electronilor sînt reprezentate prin vectori şi în *(a)* are o distribuţie total haotică. În *(b)* există o mişcare de antrenare spre dreapta, reprezentată prin vectorul viteză. Acest vector s-a adunat la fiecare vector viteză, aşa cum se vede în colţul din stînga, pentru unul din electroni.

În exemplul ales, această mărime a fost înlocuită cu $\bar{t}$, obţinîndu-se un rezultat perfect determinat pentru conductivitatea σ. Introducînd mărimea τ, mult mai generală şi admiţînd, de asemenea, posibilitatea existenţei unui număr diferit de purtători de sarcină pozitivi şi negativi, rezultatul obţinut poate fi exprimat ca:

$$\sigma \approx e^2 \left[\frac{N_+\tau_+}{M_+} + \frac{N_-\tau_-}{M_-}\right]. \tag{17}$$

Semnul $\approx$ arată că nu l-am definit în mod exact pe τ, deşi acest lucru poate fi făcut.

Pentru a sublinia faptul că, de obicei, conductibilitatea electrică reprezintă în mică măsură o mişcare de antrenare sistematică ce se suprapune peste mişcarea haotică a purtătorilor de sarcină, în figura 4.5 am reprezentat o mică porţiune a sistemului microscopic despre care am vorbit. Ionii pozitivi sînt reprezentaţi prin puncte albe, ionii negativi prin cercuri. Presupunem că aceştia din urmă sînt electroni care avînd masă mică sînt mult mai mobili decît ionii pozitivi şi ca urmare, mobilitatea ionilor pozitivi este neglijabilă. În figura 4.5, *a* se vede că particulele, ca şi vitezele electronilor sînt distribuite haotic. Pentru desen, în stabilirea poziţiei şi semnului particulei, s-a folosit tabelul numerelor

aleatoare. Pentru vectorii viteză ai electronilor, s-a folosit distribuţia maxwelliană a vitezelor moleculare într-un gaz. În figura 4.5, *b*, poziţiile sînt aceleaşi, dar vitezelor li s-a adăugat o creştere înspre dreapta. În acest fel, figura 4.5, *b* reprezintă o substanţă ionizată în care există un curent mediu de sarcini negative de la stînga spre dreapta şi corespunzător, un curent al sarcinilor pozitive spre stînga. În figura 4.5, *a*, curentul mediu este nul.

Evident, nu ne putem aştepta ca media vitezelor celor 46 de electroni din figura 4.5, *a* să fie nulă, întrucît ele sînt mărimi independente statistic. Un electron nu influenţează comportarea celuilalt. De fapt, chiar în absenţa unui cîmp exterior oarecare, se pot observa fluctuaţii aleatorii ale curentului electric ca urmare a fluctuaţiilor statistice ale sumei vectoriale a vitezelor electronilor. Acest curent fluctuant spontan poate fi măsurat. El constituie sursa „zgomotului" din toate circuitele electrice şi deseori este cel care, în ultimă instanţă, determină sensibilitatea aparatelor ce înregistrează semnalele electrice slabe. În volumul V al acestui curs se spune mai mult referitor la această problemă.

4.5. CÎND APAR ABATERI DE LA LEGEA LUI OHM

Să vedem acum cînd nu este valabilă legea lui Ohm. Presupunem că cîmpul electric **E** este atît de intens încît creşterea vitezei ionului între două ciocniri este comparabilă cu viteza medie de agitaţie termică. Aceasta influenţează puternic timpul mediu dintre două ciocniri $\bar{t}_+$ sau $\bar{t}_-$ care apare în ec. 16. Aceste timpuri devin funcţii de **E**, şi nu mai sînt constante şi ca urmare, ec. (16) nu mai este liniară. Asta înseamnă că, dacă intensitatea cîmpului electric **E** se dublează, densitatea curentului **J** nu se dublează dacă $\bar{t}$ variază. Să vedem cînd apare o asemenea neliniaritate. Modelul ales ne reaminteşte de un gaz slab ionizat. Într-un gaz de densitate normală, drumul liber mediu al unui ion este de ordinul a 10^{-8} m. Energia cinetică medie a mişcării dezordonate este aproximativ kT, unde k este constanta lui Boltzmann ce apare în teoria cinetică a gazelor. Pentru viteză, criteriul ar putea fi următorul: dacă creşterea energiei cinetice a ionului între ciocniri, datorită cîmpului, este comparabilă cu kT, ne putem aştepta la „neplăceri". Egalînd aceste două energii:

$$eE \cdot 10^{-8}\ \text{m} \approx kT \tag{18}$$

şi înlocuind numeric, obţinem $E \approx 24$ kilovolţi/cm. Pentru cîmpurile obţinute în condiţii de laborator acesta este un cîmp de intensitate moderată. Bineînţeles limitele intensităţii sînt direct dependente de drumul liber. În gazele ionizate aflate la presiuni joase, în care drumul liber mediu este foarte mare, apar abateri de la legea lui Ohm chiar în cîmpuri slabe.

Cîmpurile electrice foarte intense pot duce la schimbări şi mai radicale, ca schimbarea numărului de purtători. Asta se şi întîmplă în scînteia electrică. Purtătorii de sarcină deja prezenţi, primesc de la cîmp atîta energie încît ciocnirile lor cu alţi atomi sînt destul de violente, producînd alte ionizări, dînd astfel naştere altor purtători de sarcină. Avalanşa rezultată este o catastrofală abatere de la legea lui Ohm!

Ne putem aştepta la abateri, dacă nu de la legea lui Ohm, în orice caz de la una din părţile teoriei noastre. Să presupunem că cîmpul **E** este aplicat doar pentru un interval scurt de timp. Dacă acest interval este comparabil

sau mai mic decît timpul critic, este evident că trebuie să ne revizuim punctul de vedere. Pentru mai multă claritate, să aplicăm un cîmp electric alternativ a cărui perioadă este mai mică decît timpul dintre ciocniri. În acest caz, reacția purtătorilor este, în mare măsură, determinată de inerția lor ca corpuri libere. Pentru această problemă, care este interesantă și pe care s-ar putea s-o întîlniți, indiferent de natura ei, teoria dezvoltată de noi nu este adecvată. Observăm, totuși, că în cazul ales ca exemplu, timpul mediu dintre ciocniri este de aproximativ (10^{-8} m/viteza moleculară), adică de ordinul a 10^{-10} s — pentru ionii pozitivi, iar pentru electroni — chiar mai mic. Ca urmare, teoria noastră, chiar dacă a fost prelucrată pentru un cîmp constant, trebuie să fie aplicabilă multor sisteme, chiar pentru cele în care cîmpul variază foarte rapid.

Un exemplu de abatere de la legea lui Ohm îl constituie dioda vidată, descrisă în paragraful 4.2. În anumite condiții, cînd emisia electronilor este limitată de către catod, curentul este practic independent de tensiune dacă anodul se află la potențial pozitiv. Dacă anodul se află la potențial negativ, curentul este zero, întrucît anodul nu emite deloc electroni. Dioda lasă să treacă curent doar într-un singur sens. Ea este de obicei folosită ca redresoare de curent alternativ. În cazul limitării curentului de către sarcina spațială (v. probl. 4.25), curentul în diodă este proporțional cu tensiunea la puterea 3/2 și nu la puterea întîia cum cere legea lui Ohm.

Joncțiunea dintre doi *semiconductori* sau dintre un semiconductor și un metal, poate fi în cel mai înalt grad „neohmică“ și să prezinte chiar conductibilitate într-un singur sens ca în cazul diodei. Dispozitivele neliniare sînt indispensabile atît în electronică cît și în alte domenii. Dacă legea lui Ohm ar fi general valabilă, tehnica electronică n-ar mai exista.

4.6. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ A METALELOR

Dintre toți conductorii cunoscuți metalele sînt cele mai bune. Mecanismul simplu al conductibilității electrice, pe care l-am prezentat, a fost dezvoltat de Drude și alții la sfîrșitul sec. XIX, pentru a explica conductibilitatea metalelor. Lorentz a perfecționat mult teoria în detaliu și în anumite aspecte ea s-a dovedit a fi destul de fructuoasă. Evident că conductibilitatea ridicată a metalelor se datorează electronilor liberi, liberi în sensul că nu sînt legați de un atom anume și au posibilitatea să se miște în întreaga rețea cristalină. În acest sens, o dovadă convingătoare a constituit-o absența oricărui transport de substanță chimică într-un circuit metalic prin care trece curentul electric. Din chimia metalelor și teoria cuantică a structurii atomului, rezultă că atomii metalelor pierd ușor unul sau doi electroni din păturile exterioare. Dacă atomul este izolat, electronii sînt legați de acesta, dar cînd mai mulți asemenea atomi sînt foarte apropiați unul de altul în cristal, acești electroni devin liberi. În această situație, rețeaua este formată din ionii pozitivi rămași, fiind ordonați într-un anumit fel. „Electronii de conducție“ rătăcesc prin această rețea de ioni. Chiar dacă doar un singur electron din atomul metalului ar deveni liber, densitatea purtătorilor de sarcină este imensă în comparație cu substanțele în care ionii sînt produși pe alte căi. Numărul de atomi dintr-un m^3 de sodiu metalic este $2{,}5\times10^{28}$.

După cum am văzut, mobilitatea purtătorului de sarcină este determinată în cea mai mare parte de timpul τ, după care capătă un impuls bine

determinat, datorită cîmpului electric aplicat. Aceasta este valabil pentru orice proces posibil. Dacă presupunem că fiecărui atom de sodiu îi revine un purtător de sarcină şi aceştia sînt electroni cu masa m_e, pentru a calcula pe τ avem nevoie doar de coeficientul de conductibilitate al sodiului determinat experimental. Conductivitatea σ a sodiului la temperatura camerei, în unităţi SI, este de $2,13 \cdot 10^7\ (\Omega \cdot m)^{-1}$. Neglijînd purtătorii de sarcină pozitivă din ec. (17), obţinem:

$$\tau_- = \frac{\sigma m_e}{N_- e^2} = \frac{(2,13 \times 10^7) \times (9 \times 10^{-31})}{(2,5 \times 10^{28}) \times (2,56 \cdot 10^{-38})} \approx 3 \cdot 10^{-14}\ \text{s}. \qquad (19)$$

Timpul pare surprinzător de mare pentru ca un electron să se mişte prin reţeaua cristalină fără să sufere vreo deviere observabilă. Conform teoriei cinetice, viteza termică a unui electron la temperatura camerei este aproximativ de 10^5 m/s astfel încît, în $3 \cdot 10^{-14}$ s electronul parcurge o distanţă de 30 Å — mai mare de 10 ori decît constanta reţelei.

De ce este reţeaua ionică atît de transparentă pentru electroni? Ne reamintim, referitor la dimensiuni, că într-o reţea compactă ionii aproape se ating. De asemenea, creşterile şi scăderile potenţialului electric, de-a lungul drumului străbătut în reţea, depăşesc cu mult energia unui electron (în electron-volţi) la temperatura camerei. Pe de altă parte, ce determină devierea electronului dacă nu ciocnirea cu un ion? La aceste întrebări cruciale nu se poate răspunde fără cunoaşterea proprietăţilor ondulatorii ale electronului.

În general, înainte de punerea bazelor mecanicii cuantice, comportarea electronilor în metale ridica o serie de paradoxuri inexplicabile. Vom reveni la aceste chestiuni după ce veţi acumula cîteva cunoştinţe de mecanică cuantică. Deocamdată, folosim faptul că metalele prezintă o conductibilitate electrică deosebită, aşa cum au făcut multe generaţii de fizicieni.

Putem, totuşi, reţine cîteva aspecte esenţiale ale mecanismului de conducţie. Curentul de conducţie este purtat de electroni; el reprezintă un curent lent, ordonat de purtători (drift) ce se suprapune peste mişcarea mult mai rapidă şi haotică a lor. De asemenea, chiar difracţia sau devierea electronului de către reţea face ca viteza de drift să fie proporţională cu intensitatea cîmpului şi ca urmare, intensitatea curentului verifică legea lui Ohm.

Pentru majoritatea metalelor, legea lui Ohm se verifică întocmai pînă la valori ale densităţilor de curent ce depăşesc cu mult valoarea densităţii ce poate fi menţinută un timp mai îndelungat. Pînă acum, nu s-au obţinut dovezi experimentale nete ale abaterilor de la legea lui Ohm. Conform unei ipoteze teoretice, pot apărea abateri de 1%, pentru o densitate de curent de 10^9 A/cm^2. Această valoare este de un milion de ori mai mare decît densitatea de curent întîlnită în conductorii obişnuiţi din circuitele electrice.

Conductivitatea metalelor pure creşte cu scăderea temperaturii. Pe baza teoriei dezvoltate, o asemenea comportare este destul de dificil de explicat. Iar încercarea de a explica orice aspect al conducţiei în metale pe baza modelului „bilelor de biliard" apare ridicol în cazul fenomenului de supraconductibilitate. Multe metale, la temperaturi joase, prezintă o asemenea conductibilitate, încît rezultă că coeficientul de conductibilitate tinde către infinit! (Şi nici măcar o asemenea presupunere nu reflectă îndeajuns comportarea electrică de-a dreptul fantastică a acestor metale).

Graficul din figura 4.6 arată cum variază cu temperatura conductivitatea diferitelor substanţe pure. Scopul este de a pune în evidenţă cît de diferit se comportă ele în funcţie de valorile diferite ale conductivităţilor. Observaţi că în abscisă este trecută temperatura şi în ordonată conductivitatea, ambele reprezentate în scară logaritmică.

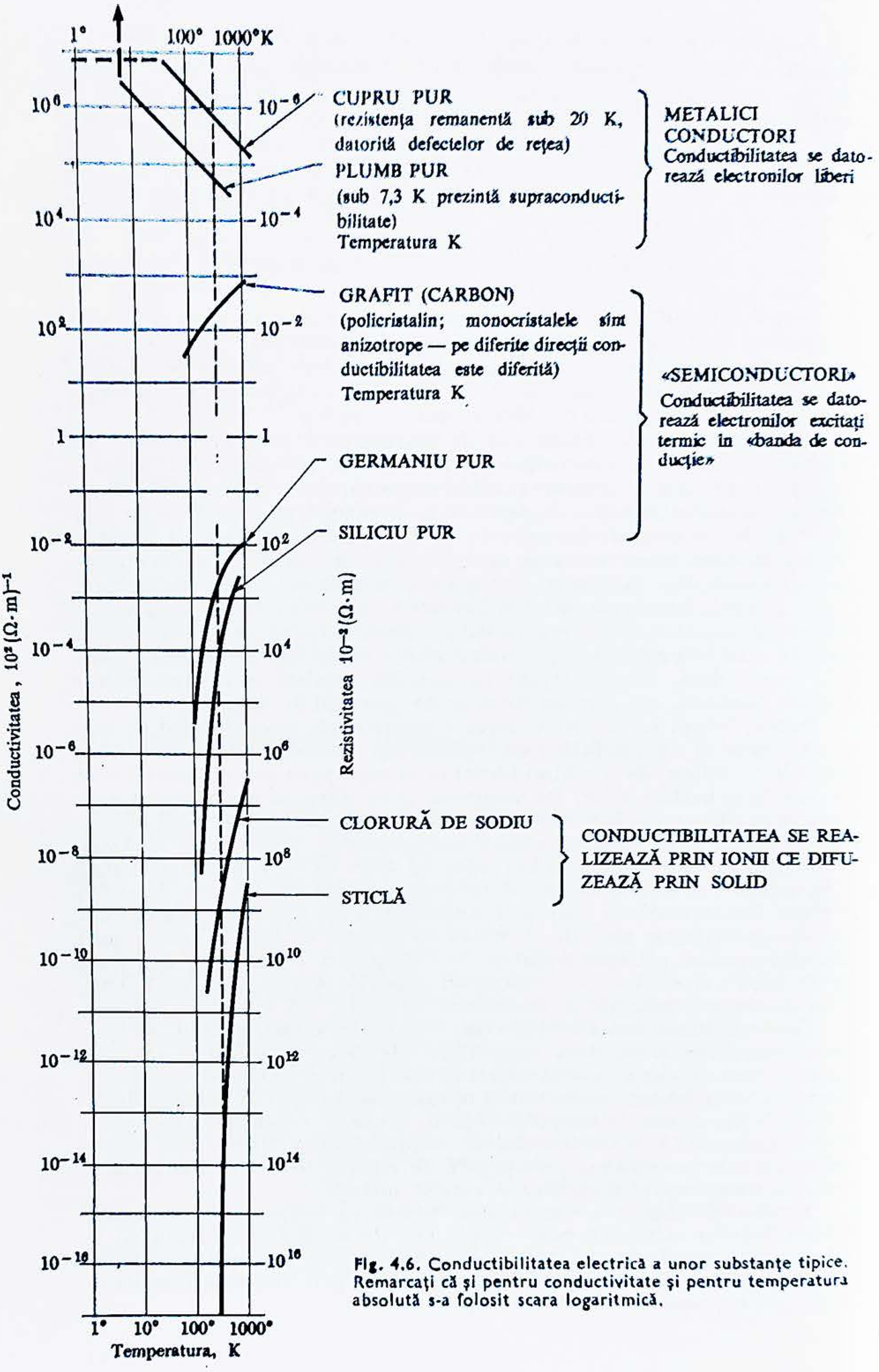


Fig. 4.6. Conductibilitatea electrică a unor substanțe tipice. Remarcați că și pentru conductivitate și pentru temperatura absolută s-a folosit scara logaritmică.

4.7. REZISTENŢA CONDUCTORILOR

Cînd rezistivitatea materialului este dată, calcularea rezistenţei R, a unui conductor uniform, este simplă. Scriem din nou ecuaţia (11):

$$R = \frac{\text{lungimea} \times \text{rezistivitatea}}{\text{aria secţiunii transversale}}. \qquad (20)$$

Rezistenţa R are sens numai pentru un curent bine definit. În cazul unui conductor, prin urmare, rezistenţa are sens. În cazul mai general al distribuţiei în volum a curentului, nu putem vorbi de rezistenţă fără a preciza pe unde intră şi pe unde iese curentul din sistem. Distribuţia în volum a densităţii de curent, poate fi determinată pe baza relaţiei fundamentale $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.

Să luăm ca exemplu trecerea curentului prin corpul reprezentat în figura 4.7, *a* şi *b*, format din doi cilindri de cupru, spaţiul dintre ei fiind umplut cu grafit. Care este rezistenţa între cele două contacte? Dacă rezistenţa cilindrilor de cupru pentru curentul longitudinal este foarte mică în comparaţie cu rezistenţa grafitului pentru curentul radial, nu are importanţă pe unde intră şi pe unde iese curentul în cupru (sau unde sînt aşezate contactele). În acest caz, putem presupune că fiecare tub de cupru este o suprafaţă echipotenţială. Privind graficul din figura 4.6, observăm că la temperatura camerei, conductivitatea cuprului diferă de cea a grafitului de 10^3 ori, prin urmare, ipoteza făcută corespunde realităţii dacă tuburile de cupru nu sînt prea subţiri. Să presupunem că diferenţa de potenţial dintre electrozii de cupru este V_0. Pentru a determina cîmpul electric în grafit, ne reamintim că cîmpul dintre doi cilindri încărcaţi este proporţional cu $1/r$, şi punînd $E = \frac{k}{r}$ determinăm constanta k din condiţia:

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (21)$$

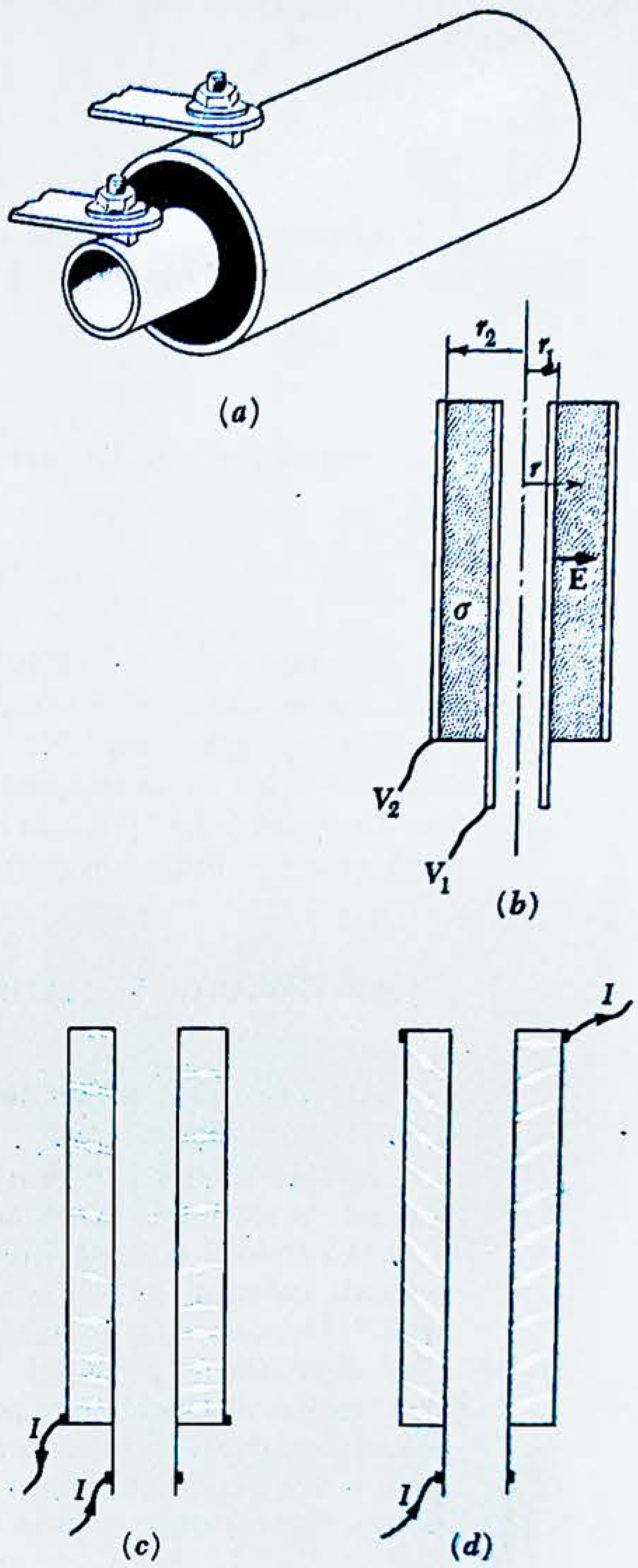


Fig. 4.7. Grafitul umple spaţiul dintre cilindrii de cupru (*a*, *b*). Dacă rezistenţa tuburilor este neglijabilă, curentul trece radial prin grafit. În caz contrar, liniile de curent arată ca în (*c*) şi (*d*) pentru două poziţii diferite ale contactelor.

Rezultă că intensitatea cîmpului în grafit, pentru o valoare oarecare a razei r este

$$E = \frac{V_0}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{22}$$

şi densitatea de curent este σE. Suprafaţa totală, pentru această valoare a razei, prin care trece curentul este $2\pi r L$, astfel încît curentul total este egal cu

$$I = \frac{2\pi L \sigma V_0}{\ln(r_2/r_1)}. \tag{23}$$

Remarcăm că el este independent de r, aşa cum şi trebuie să fie. Rezistenţa este

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L \sigma} \ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{24}$$

Ce s-ar întîmpla, dacă tuburile de cupru ar fi foarte subţiri şi dacă rezistenţa lor la curentul în lungul cilindrului n-ar fi neglijabilă în comparaţie cu rezistenţa grafitului? Nu vom încerca să rezolvăm această problemă, dar este interesant să ne imaginăm cam cum ar arăta liniile de curent în acest caz. În figura 4.7, *c* şi *d* este reprezentată distribuţia liniilor de curent pentru două poziţii diferite ale contactelor.

4.8. CIRCUITE ŞI ELEMENTE DE CIRCUIT

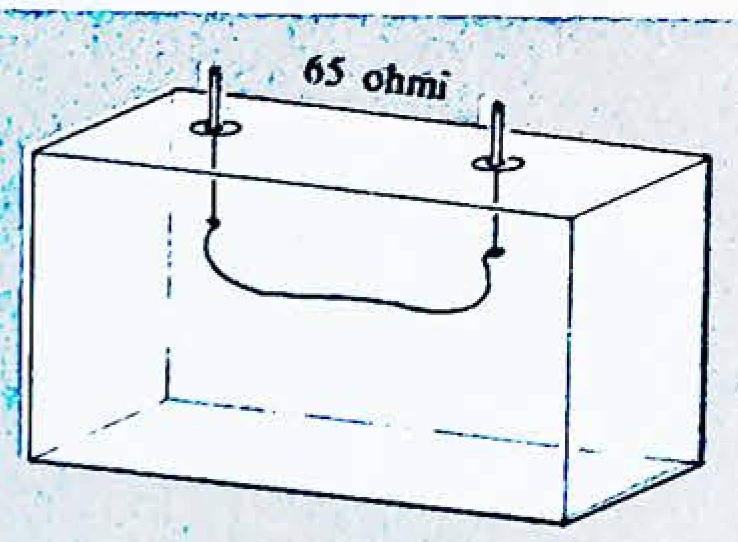
Aparatele electrice au de obicei contactele, la care se pot conecta conductorii, bine stabilite.

Sarcina intră şi iese prin aceste contacte. În particular, dacă există două contacte şi numai două, de care sînt legate firele ce duc la un circuit extern şi dacă curentul este staţionar, potenţialele fiind constante peste tot atunci, evident, curentul la cele două contacte (terminale) este acelaşi şi de sens opus.* În acest caz, putem vorbi despre un curent I ce trece prin circuit şi de diferenţa de potenţial V „dintre capete" sau „la capete", care, de fapt, înseamnă diferenţa de potenţial electric. Raportul V/I pentru o anumită valoare a curentului este un număr ce reprezintă unităţi de rezistenţă (ohmi, dacă V este exprimat în volţi şi I în amperi). Dacă legea lui Ohm este valabilă pentru toate porţiunile prin care trece curentul, acest număr este constant, independent de curent. Acest număr descrie complet comportarea electrică a obiectului, pentru un curent staţionar („constant") între capetele date. Folosim aceste precizări pentru a introduce noţiunea de *element al circuitului*.

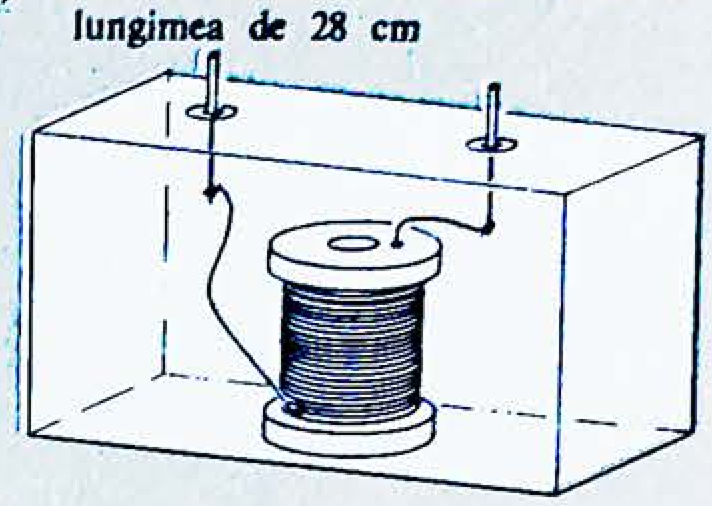
---

* Este perfect posibil ca la unul din capete curentul care intră să aibă 4A şi prin celălalt capăt curentul care iese să aibă 3A. În acest caz, însă, obiectul acumulează sarcină pozitivă cu viteza de 1 coulomb/s. Înseamnă că potenţialul variază foarte rapid şi asta nu poate dura mult. Prin urmare, un asemenea curent nu poate fi *staţionar*, adică independent de timp.

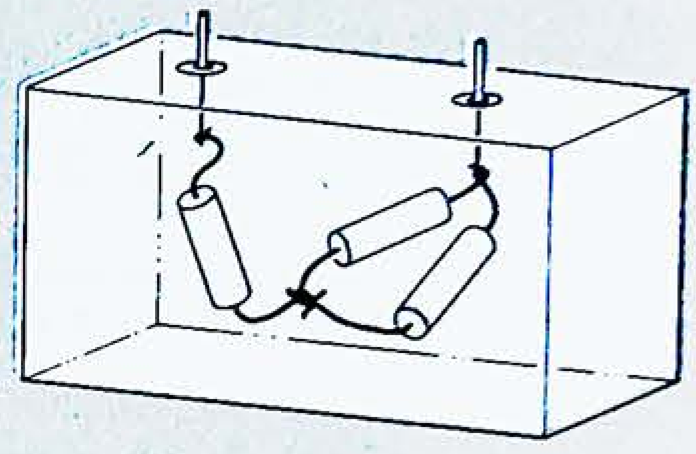
Fig. 4.8. Diferite montaje care sînt echivalente pentru un curent continuu ce trece printr-un rezistor de 65 ohmi. *a)* Un conductor de nichel-crom cu lungimea de 28 cm. *b)* O bobină din cupru emailat cu firul de 301,4 m lungime şi masa de 227 g. *c)* Doi rezistori de 70 ohmi şi unul de 30 ohmi. *d)* Bec cu filament de wolfram de 25 W şi 115 V (la rece); *e)* Soluţie de KCl 0,5 N cu electrozi de anumite dimensiuni aflaţi la o anumită distanţă.



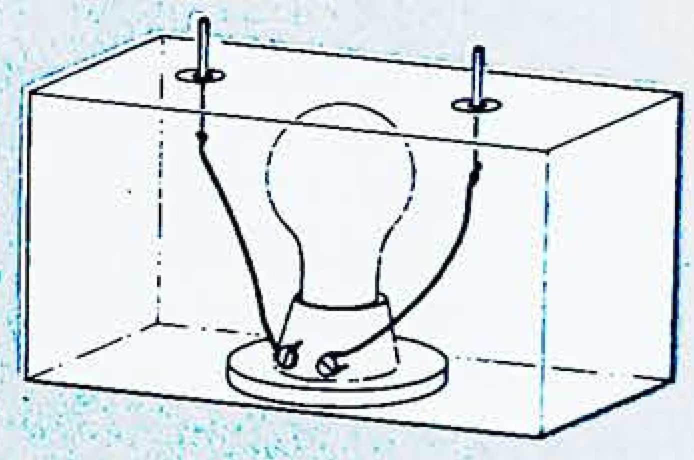
(*a*) (a) conductor de nichel-crom cu lungimea de 28 cm



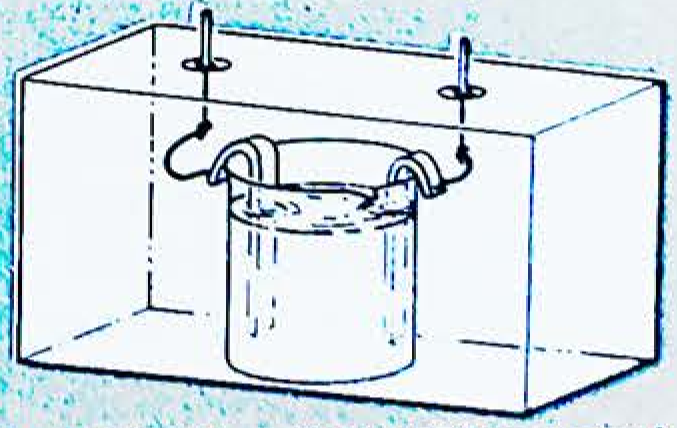
(*b*) (b) bobină din sîrmă de cupru emailat



(*c*) (c) Doi rezistori de 70 ohmi şi unul de 30 ohmi



(*d*) (d) Bec cu filament de wolfram de 25 — şi 115 V (la rece)



(*e*) (e) Soluţie de KCl 0,5 N cu electrozi de anumite dimensiuni aflaţi la o anumită distanţă.

Priviţi cele cinci cutii din figura 4.8. Fiecare are două terminale iar în interior se află diferite obiecte. Dacă din fiecare din aceste cutii facem un element de circuit electric, prin legarea unor fire la terminale, raportul dintre diferenţa de potenţial la cele două capete şi curentul ce trece prin fire este de 65 ohmi. Spunem că rezistenţa fiecărei cutii între terminale este de 65 ohmi. Bineînţeles că această afirmaţie nu poate fi valabilă pentru toate valorile posibile ale curentului sau ale diferenţei de potenţial. Mărind diferenţa de potenţial sau tensiunea între contacte, pot avea loc diferite schimbări în unele cutii mai devreme decît în celelalte, în urma cărora raportul tensiune/intensitate să se schimbe. Veţi ghici, desigur, în care din cutii „neregulile" vor apărea mai devreme. Şi totuşi, există o anumită limită sub care comportarea tuturor este liniară şi în acest domeniu, pentru curenţi staţionari, toate cutiile sînt identice. Sînt identice în sensul că dacă un circuit oarecare conţine una din aceste cutii, indiferent care din cutii ar fi, circuitul se comportă la fel. Cutia este echivalentă cu un rezistor de 65 de ohmi.* Se reprezintă prin simbolurile -WW- şi în circuitul în care unul din elemente este cutia, vom folosi acest simbol. Prin urmare, un circuit electric sau o reţea electrică se formează prin legarea unor asemenea elemente cu ajutorul unor fire de rezistenţă neglijabilă.

---

* Termenul de *rezistor* este folosit pentru obiectul real desemnat special pentru acest scop. De exemplu, „un rezistor bobinat de 200 ohmi, 10 watti" este format dintr-o bobină, aflată pe un suport izolat, înfăşurată cu un fir, ale cărei terminale vor fi astfel folosite încît puterea medie disipată să nu depăşească 10 watti.

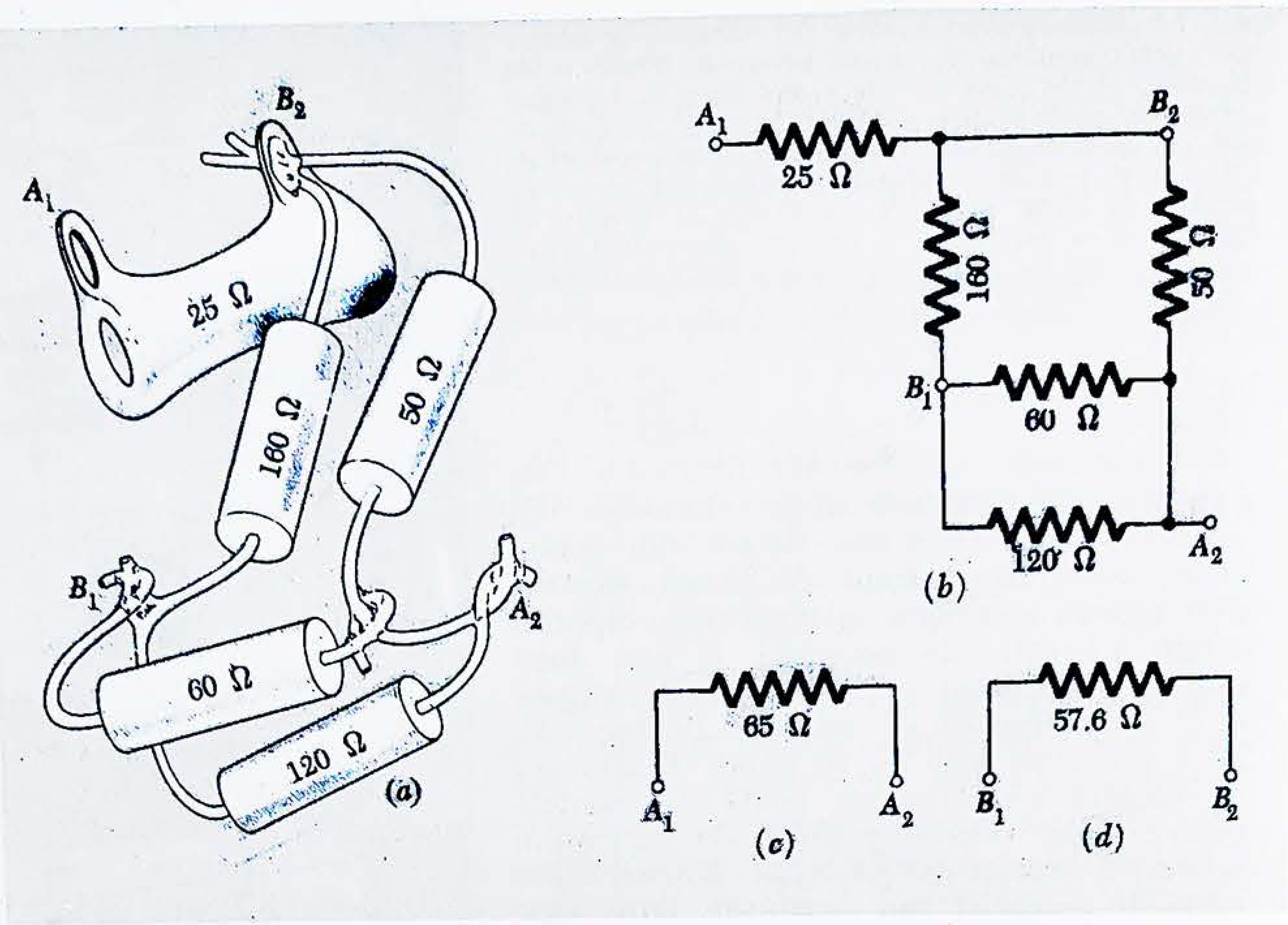


Fig. 4.9. Cîţiva rezistori legaţi între ei *(a)*, schema circuitului *(b)* şi rezistenţa echivalentă dintre două contacte *(c)* şi *(d)*.

Dacă luăm o reţea formată din multe asemenea elemente şi alegem două puncte care să reprezinte capetele circuitului, putem echivala întregul circuit cu un singur rezistor. Circuitul obiectelor fizice din figura 4.9, *a* poate fi reprezentat prin schema 4.9, *b*, iar pentru capetele A_1A_2 circuitul echivalent este 4.9, *c*. Circuitul echivalent pentru capetele B_1B_2 este reprezentat în figura 4.9, *d*. Dacă punem totul într-o cutie lăsînd afară numai capetele, cutia nu se deosebeşte de un rezistor a cărui rezistenţă este de 57,6 ohmi. Trebuie ţinut cont doar de faptul că sînt permise doar măsurătorile de *curent continuu!* Tot ce-am spus este valabil numai pentru curenţi şi cîmpuri invariabile în timp; dacă nu sînt constanţi, comportarea unui element de circuit nu depinde numai de rezistenţa sa. Noţiunea de circuit echivalent poate fi extinsă de la aceste circuite de curent continuu la sistemele în care curentul şi tensiunea variază în timp. În aceste cazuri ea este mult mai utilă. Însă noi nu sîntem deocamdată pregătiţi pentru studiul acestui domeniu.

Ne vom opri puţin asupra metodelor de calcul a rezistenţei echivalente a unui circuit format din mai multe elemente. Cazurile de grupări în serie şi în paralel sînt simple. O combinaţie ca cea din figura 4.10 reprezintă doi rezistori, de rezistenţă R_1 şi R_2, legaţi în serie. Rezistenţa echivalentă este

$$R = R_1 + R_2 \tag{25}$$

Combinația din figura 4.11 reprezintă doi rezistori legați în paralel. Puteți demonstra singuri că, în acest caz, rezistența echivalentă R poate fi găsită din relația

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \text{ sau } R=\frac{R_2R_1}{R_1+R_2}. \quad (26)$$

asta este tot ce trebuie să știm pentru a studia o schemă ca cea din figura 4.12, care oricît ar fi de complicată, poate fi redusă treptat la un circuit format din grupări în serie sau în paralel. Cu toate acestea, schema simplă din figura 4.13 nu poate fi astfel redusă, fiind necesară o metodă mai generală. Orice circuit posibil format din rezistori, prin care trece un curent constant, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) Intensitatea curentului ce trece prin fiecare element trebuie să fie egală cu raportul dintre tensiunea elementului și rezistența sa.

2) Într-un *nod* al rețelei — punctul în care se întîlnesc trei sau mai mulți conductori — suma algebrică a intensităților curenților din nod trebuie să fie nulă. (Aceasta este binecunoscuta lege de conservare a sarcinii — ec. 7 — în limbaj circuitistic.)

3) Suma diferențelor de potențial pe un contur oarecare al circuitului care începe și se termină în același nod este nulă. (În limbaj circuitistic aceasta este proprietatea generală a cîmpului electrostatic: $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0$ pentru orice contur închis.)

Aceste condiții exprimate algebric, pentru orice circuit, dau exact numărul de ecuații liniare independente necesare pentru obținerea unei singure soluții pentru rezistența echivalentă între două noduri alese. Facem această afirmație fără a o demonstra. Este interesant de remarcat că structura problemei pentru un circuit de curent constant depinde doar de *topologia* circuitului, adică de acele proprietăți ale schemei de legături care sînt independente de distorsiunile liniilor circuitului.

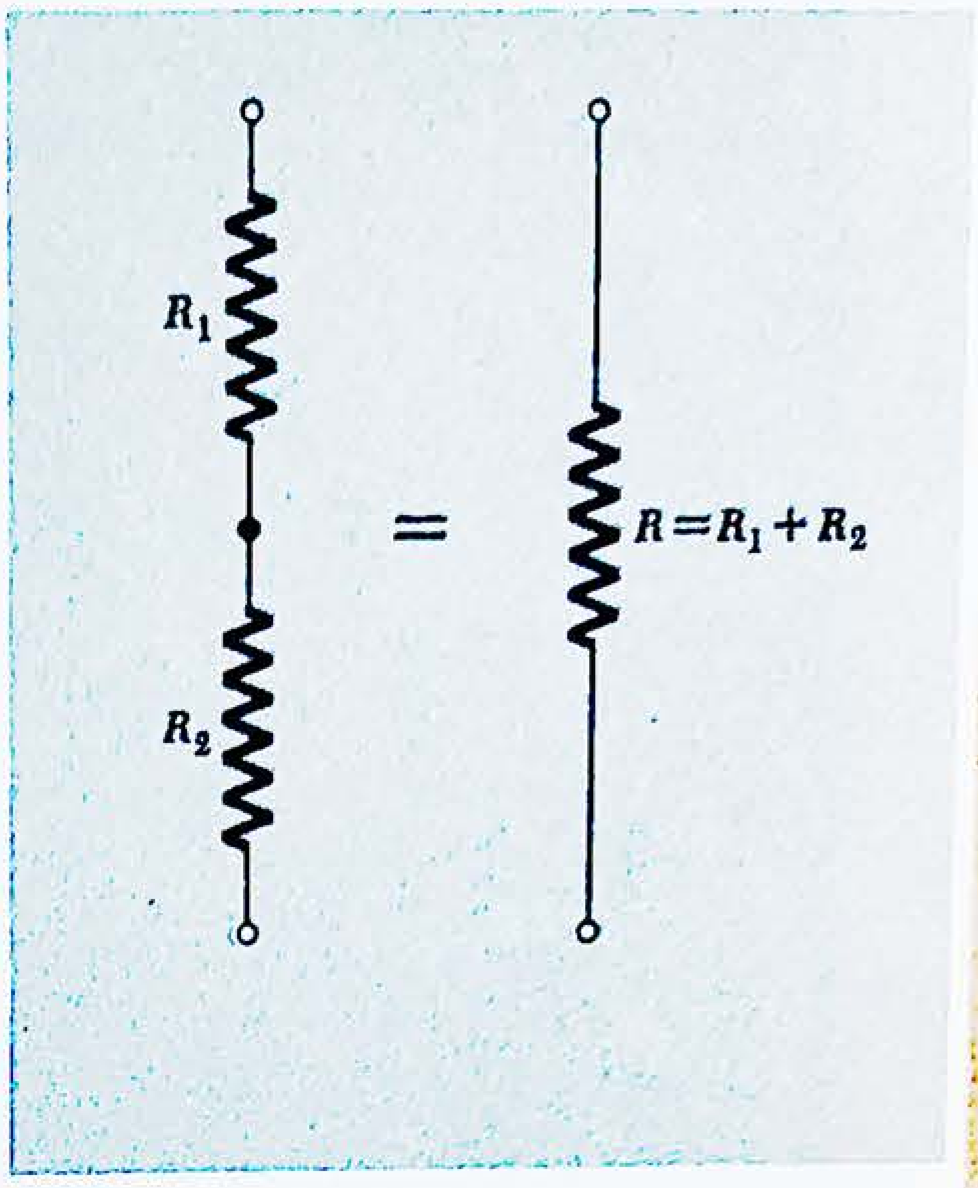


Fig. 4.10. Rezistori legați în serie.

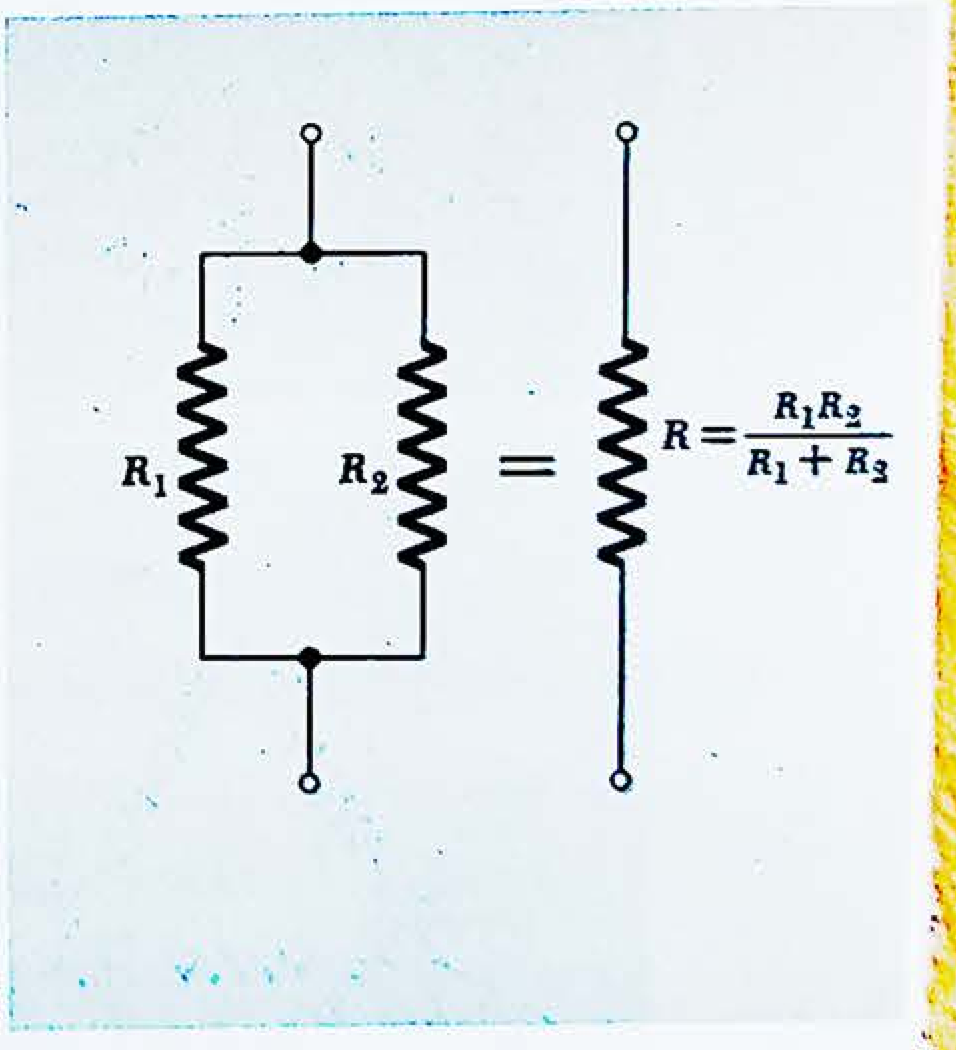


Fig. 4.11. Rezistori legați în paralel.

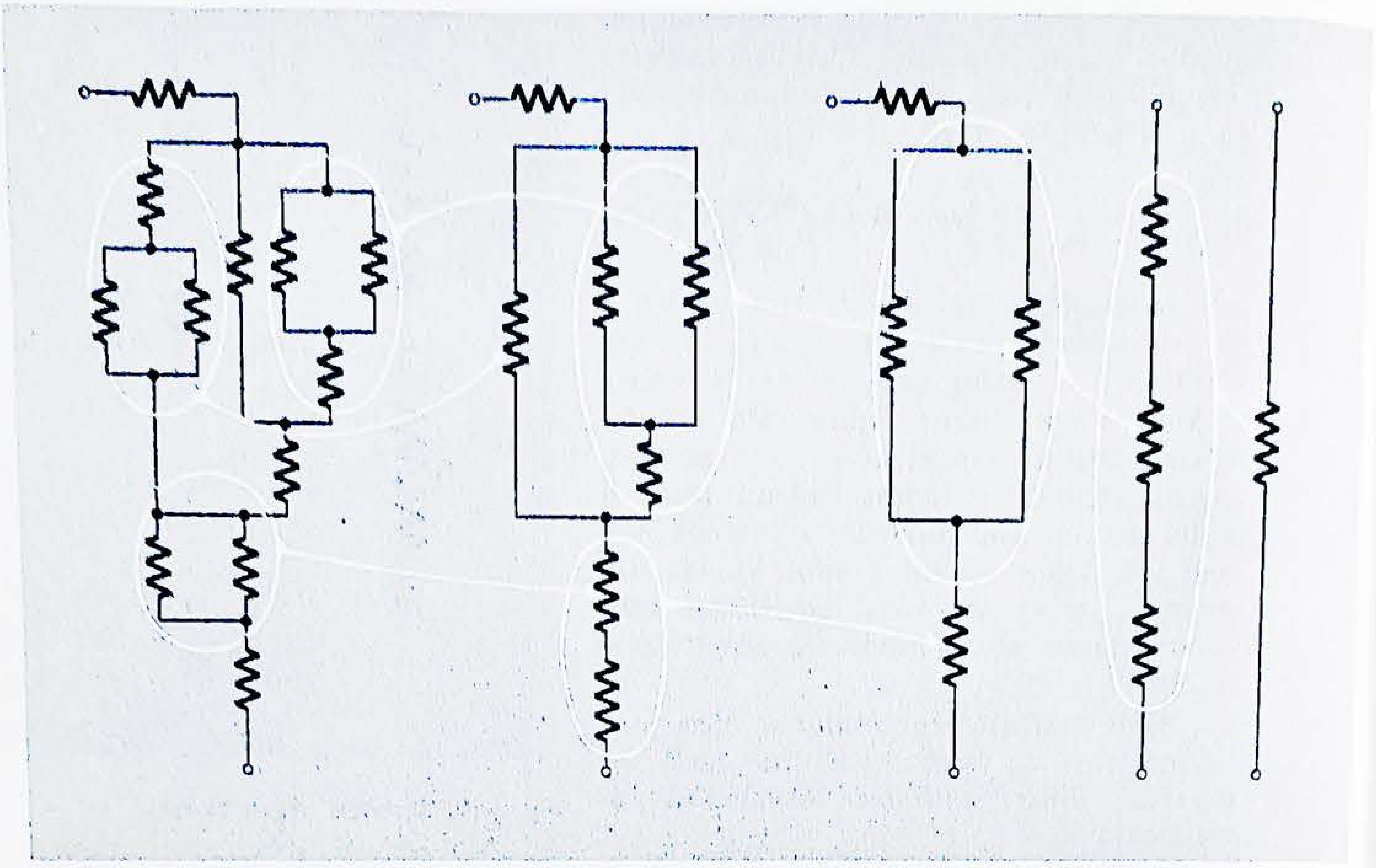


Fig. 4.12. Reducerea unei scheme complicate la un circuit ce conţine grupări de rezistori legaţi numai în serie sau în paralel.

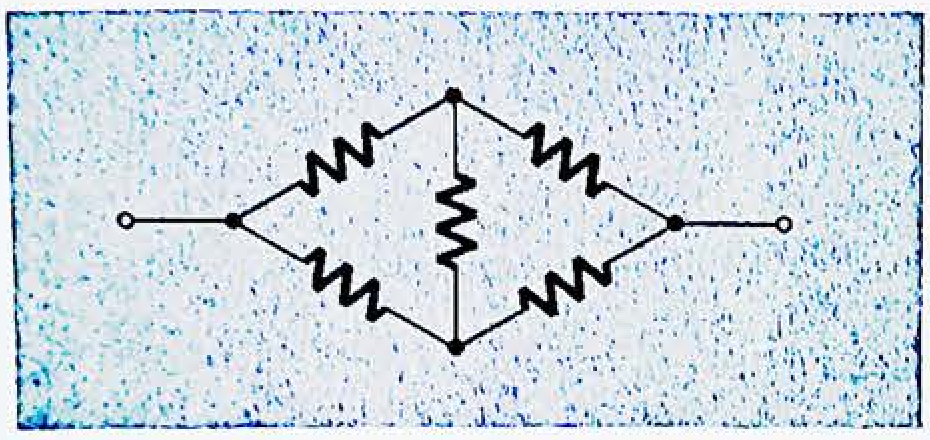


Fig. 4.13. O schemă simplă în punte. Ea nu poate fi redusă ca în fig. 4.12.

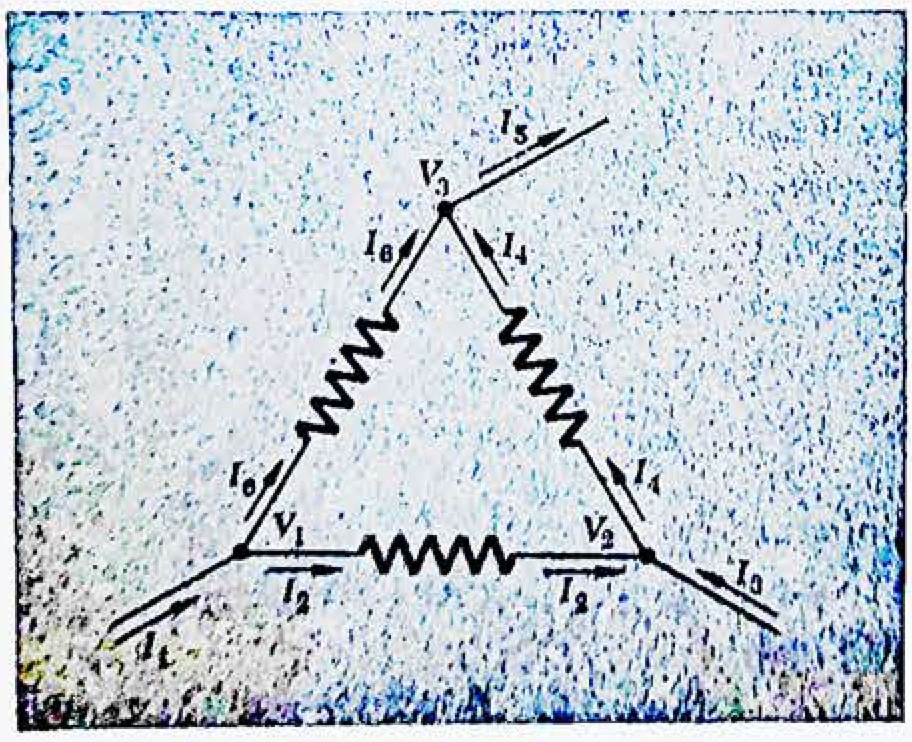


Fig. 4.14. Curenţii şi potenţialele în nodurile circuitului.

Circuitul de curent continuu format din rezistori este un sistem liniar, tensiunile şi curenţii satisfac un sistem de ecuaţii liniare, care exprimă condiţiile 1, 2 şi 3. Prin urmare, şi superpoziţia diferitelor stări posibile ale reţelei este, de asemenea, o stare posibilă. În figura 4.14 este reprezentată o porţiune de circuit, prin conductorii căreia trec anumiţi curenţi I_1, I_2, ..., iar nodurile au potenţialele V_1, V_2, ... Dacă o altă stare posibilă a acestei porţiuni este descrisă de alţi curenţi şi alte potenţiale, să spunem I'_1, ..., V'_1 ..., atunci şi $(I_1 + I'_1)$, ..., $(V_1 + V'_1)$, ... reprezintă, de asemenea, o stare posibilă a acestei porţiuni de circuit. Aceşti curenţi şi aceste tensiuni, care reprezintă o superpoziţie satisfac, de asemenea, condiţiile 1, 2 şi 3. Unele teoreme generale ale circuitelor electrice se bazează pe această proprietate, fiind interesante şi utile electrotehniştilor.

4.9. DISIPAREA DE ENERGIE LA TRECEREA CURENTULUI

La trecerea curentului prin rezistor are loc o disipare de energie. Dacă forţa necesară pentru deplasarea purtătorului de sarcină cu viteza medie **v** este **F**, atunci toţi agenţii care realizează această deplasare dau o putere $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Dacă ionul de sarcină q se află sub acţiunea cîmpului electric **E**, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ şi lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp este $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Energia cheltuită poate apărea sub formă de căldură. Pe baza modelului nostru de conducţie ionică, modul cum se petrece acest lucru este destul de clar. Între ciocniri, ionul capătă o energie cinetică şi un impuls suplimentar. După una sau mai multe ciocniri, impulsul se reorientează dar energia cinetică nu revine neapărat la valoarea normală. Pentru ca acest lucru să se întîmple, trebuie ca ionul să transfere energie cinetică obstacolului care-l deviază. Să presupunem că masa purtătorului de sarcină este mult mai mică decît cea a atomului neutru pe care-l ciocneşte. La ciocnirea dintre o bilă de biliard şi o bilă de popice, transferul mediu de energie cinetică este mic. Prin urmare, ionul (bila de biliard) va acumula energie suplimentară pînă cînd energia sa cinetică medie este atît de mare încît pierderea medie de energie într-o ciocnire este egală cu energia acumulată între ciocniri. În acest fel, după „încălzirea" iniţială a purtătorilor de sarcină, lucrul mecanic efectuat de forţa electrică la deplasarea purtătorilor este, în final, cedată mediului sub formă de energie cinetică a mişcării dezordonate sau de căldură.

Să presupunem că un curent staţionar I, exprimat în amperi, trece printr-un rezistor de rezistenţă R ohmi. În fiecare secundă I coulombi de sarcină trec prin diferenţa de potenţial V, exprimată în volţi, $V = IR$. Prin urmare, lucrul mecanic efectuat într-o secundă este I^2R jouli. (1 coulomb × × 1 volt = 1 joule = 10^7 ergi). Unitatea de măsură pentru puterea P (viteza de efectuare a lucrului mecanic) este *watt*-ul (1 watt = 1 joule/s)

$$P = I^2R. \tag{27}$$

Evident, curentul staţionar din circuit trebuie să aibă o sursă de energie, capabilă să menţină cîmpul electric ce mişcă purtătorii de sarcină. Pînă acum, am ocolit problema forţei electromotoare, studiind doar porţiuni dintr-un circuit; „bateria" n-am inclus-o în figură. În paragraful 4.10, vom studia cîteva surse de forţă electromotoare.

4.10. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE ŞI ELEMENTUL VOLTAIC

Într-un circuit de curent continuu, originea forţei electromotoare este un mecanism de transport de purtători de sarcină în direcţie *opusă* celei în care cîmpul electric încearcă să le transporte. Generatorul electrostatic Van de Graaff este un asemenea mecanism la scară mare (fig. 4.15). Dacă totul decurge staţionar, curentul în circuitul exterior curge în direcţia cîmpului electric **E**, şi energia disipată în el (sub formă de căldură), în unitatea de timp, este IV_0 sau I^2R. Pe coloana interioară a maşinii există, de asemenea, un cîmp electric îndreptat în jos. Aici, purtătorii de sarcină se pot mişca împotriva cîmpului numai dacă se află pe o bandă izolatoare. Ei sînt aşa de fixaţi de bandă încît nu pot aluneca pe bandă în jos, în direcţia cîmpului electric. (Ei pot fi luaţi de pe bandă de un cîmp mult mai puternic, localizat pe peria de contact de la borne. Nu este neapărat necesar să ne ocupăm aici de modurile de aşezare şi de desprindere a purtătorilor de sarcină pe bandă.) Energia necesară mişcării benzii este luată, de obicei, de la un motor electric cuplat la o linie de putere, dar se poate folosi şi un motor cu motorină sau poate fi pusă în mişcare de un om care roteşte o manivelă. Generatorul Van de Graaff este de fapt o baterie cu o forţă electromotoare care, în acest caz, este de V_0 volţi.

În bateriile obişnuite, purtătorii de sarcină se deplasează prin regiunea în care cîmpul electric este opus curentului datorită energiei chimice. Adică, un purtător de sarcină pozitivă se poate deplasa spre un potenţial electric mai ridicat, dacă participă la o reacţie chimică şi primeşte mai multă energie decît îi este necesar pentru a se „căţăra pe muntele de potenţial".

Pentru a înţelege mai bine acest mecanism, să examinăm un element voltaic. Sursa chimică de forţă electromotoare a fost denumită iniţial elementul lui Volta. Contracţia picioarelor de broască, în faimoasele experienţe ale lui Galvani din jurul anului 1790, a pus în evidenţă producerea chimică a curentului electric. Volta a fost primul care a dovedit că sursa curentului nu era „electricitatea animală" — aşa cum credea Galvani, ci contactul a două metale diferite în circuit. Volta a mers mai departe construind prima baterie formată din mai multe elemente, fiecare constînd dintr-un disc de zinc şi un disc de cupru separate printr-un strat de carton umed. „Pila" lui

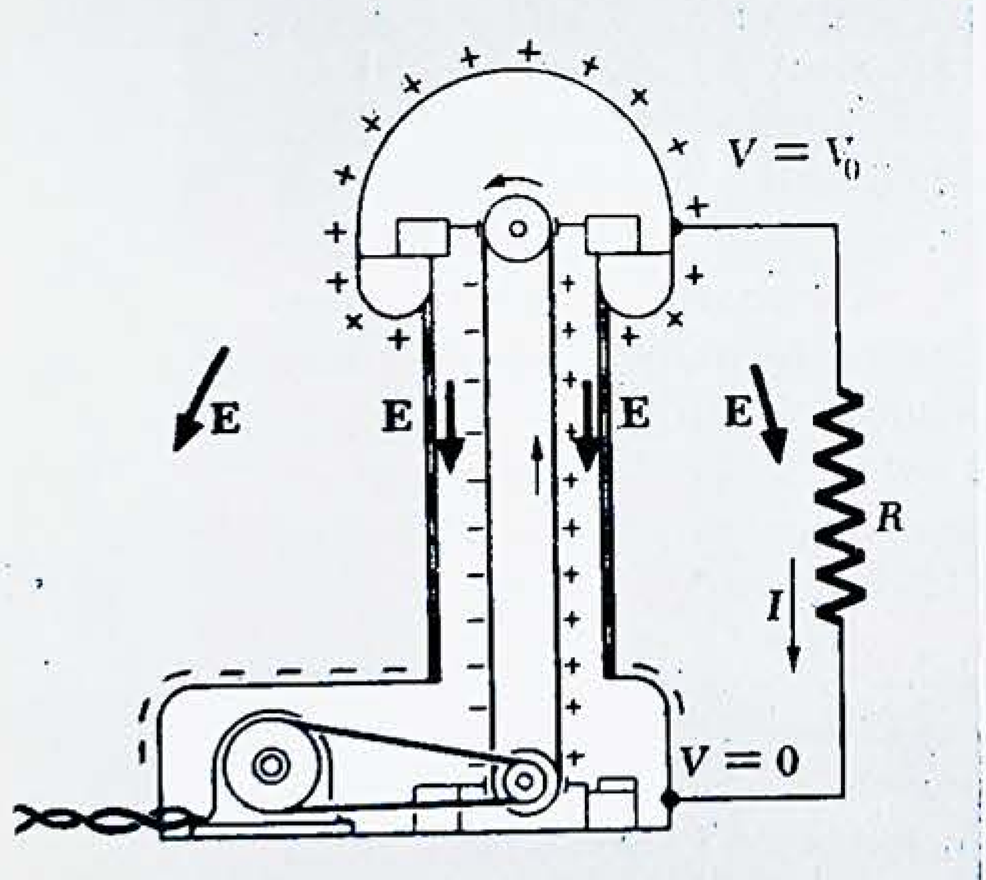
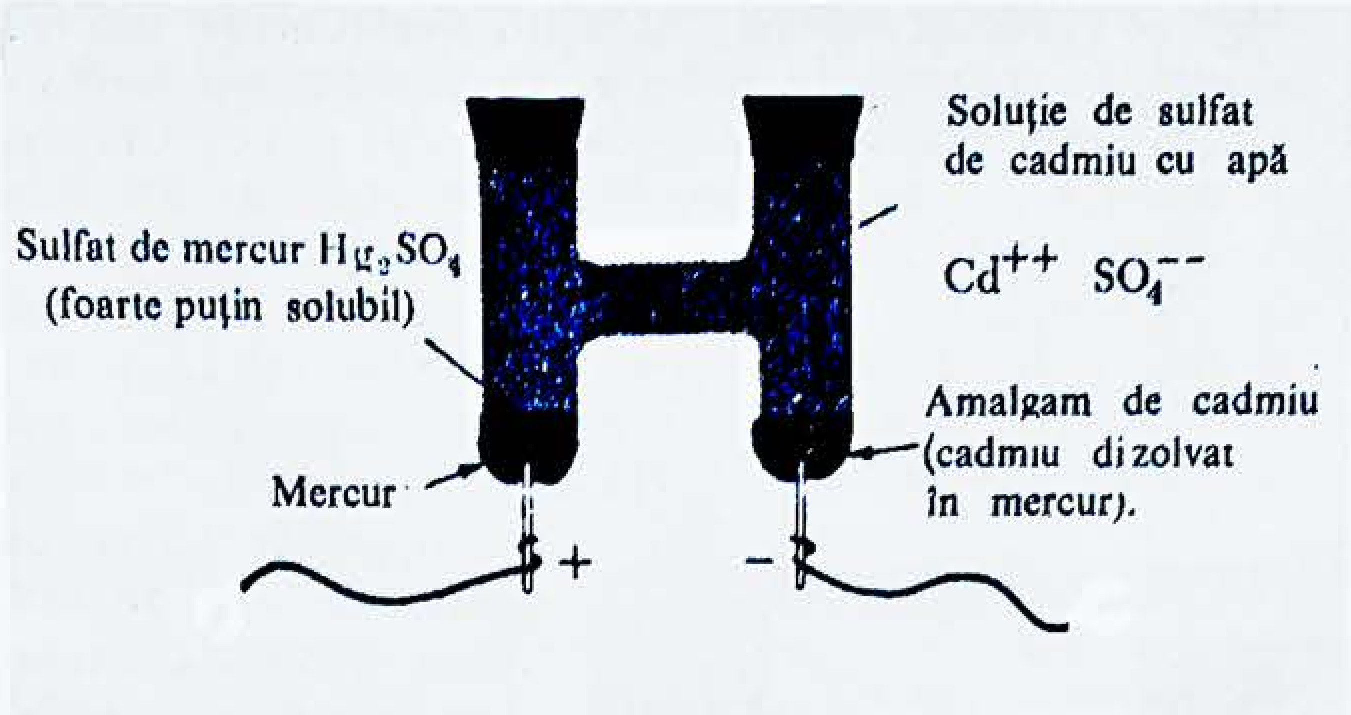


Fig. 4.15. În generatorul Van de Graaff, purtătorii de sarcină sînt transportaţi mecanic în sens opus celei în care i-ar mişca cîmpul electric.

Fig. 4.16. Elementul Weston, utilizat ca etalon în măsurătorile de precizie ale tensiunilor. Acesta este un element „nesaturat". În varianta „saturată" la fiecare electrod există un surplus de $CdSO_4$ nedizolvat, în afară de ceilalți componenți.



Volta, cum a fost denumită, a fost prima sursă de curent continuu realizată în practică. Există mai multe tipuri de elemente galvanice, una din ele fiind și „elementul uscat". Bateria de automobil de 12 volți constă din șase elemente plumb-acid sulfuric legate în serie. Vom descrie un alt element — elementul normal Weston — a cărei compoziție chimică este destul de simplă. Pe lîngă aceasta, elementul Weston fiind etalon în măsurătorile precise de tensiune, este foarte utilizat în laborator.

Un tip de element Weston este reprezentat în figura 4.16. O incintă de sticlă în formă de *H* este umplută cu o soluție de sulfat de cadmiu ($CdSO_4$) și apă. Prin fundul fiecărei ramuri se sudează un conductor extern care realizează contactul cu electrozii din interior. Electrodul din stînga constă din mercur pur și cel din dreapta din mercur în care s-a dizolvat cadmiu metalic. (Mai multe metale pot fi dizolvate în mercur; o asemenea soluție se numește *amalgam*). Deasupra mercurului din stînga se găsesc cîteva cristale de sulfat de mercur (Hg_2SO_4) — un compus foarte slab solubil în apă. Între capetele conductorilor externi există o diferență de potențial, conductorul din stînga fiind încărcat pozitiv iar cel din dreapta negativ. (Aici, importantă este doar diferența, nu valoarea absolută a potențialului.) Cum se explică apariția acestei diferențe? O parte din ionii de cadmiu trec din amalgam în soluție, lăsînd în urmă fiecare doi electroni și astfel la electrodul din amalgam apare un surplus de sarcină negativă. Această trecere încetează atunci cînd surplusul de electroni de la electrod este atît de mare încît forțele de atracție exercitate împiedică ieșirea ionilor de cadmiu.

Dacă în acest moment se unesc capetele conductorilor printr-un rezistor, electronii se vor scurge, pe această cale externă, de la electrodul negativ spre cel pozitiv. În acest fel, ionii de Cd^{++} vor trece din nou în soluție, electronii rămași completînd sarcina negativă a acestui electrod. Un curent continuu va trece prin circuitul exterior în timp ce migrația ionilor închide circuitul prin soluție. Să vedem ce se întîmplă în acest timp la celălalt electrod. În figura 4.17 se arată ce se întîmplă prin trecerea la fiecare din cele două suprafețe de separare electrod-soluție (electrolit). În figura 4.17, *a*, ionii de mercur,

Hg^+ ce părăsesc soluția, întîlnind electronii ce vin din exterior, devin atomi neutri de mercur. În soluție iau naștere noi ioni de Hg^+, prin dizolvarea Hg_2SO_4 adăugîndu-se, în același timp, și noi ioni de sulfat în electrolit. În figura 4.17, *b* are loc transformarea atomilor de cadmiu în ioni de Cd^{++} ce trec în electrolit.

De fapt, în final, are loc desprinderea electronilor din atomii de cadmiu și alipirea lor de ionii de mercur. Un chimist ar spune că cadmiul se oxidează și mercurul este redus. Elementul funcționează pentru că acest schimb energetic este preferat. Forța de legătură a electronilor în atomul de cadmiu, comparativ cu cea din atomul de mercur, este de așa natură — figurativ vorbind, încît tendința atomilor de mercur de a lega electronii depășește posibilitatea atomilor de cadmiu de a-i reține.

Remarcăm că la fiecare suprafață de separație, cîmpul electric se opune mișcării ionilor. Aceste straturi de separare, doar de cîțiva angströmi grosime, corespund benzii din generatorul Van de Graaff.

Să studiem, acum, variația potențialului electric în întreg sistemul atît în prezența curentului electric cît și în absența lui. În figura 4.18, variația potențialului electric de-a lungul circuitului, care este deschis într-un punct, este reprezentată pe verticală. Diferența de potențial la bornele circuitului deschis, reprezintă forța electromotoare a elementului, notată cu $\mathcal{E}$. Intensitatea cîmpului electric este egală cu minus gradientul potențialului. Ca în cazul oricărui cîmp electrostatic, integrala de linie din **E** de-a lungul drumului este nulă. (Printre altele, nivelul ce reprezintă potențialul electrolitului este arbitrar — el neputînd fi măsurat direct).

În figura 4.19 este arătată distribuția potențialului la trecerea curentului printr-un rezistor extern. În interiorul electrolitului există un cîmp electric pe aceeași direcție cu direcția de curgere a curentului. Soluția de sulfat de cadmiu se comportă ca o rezistență ohmică obișnuită. Diferența de potențial

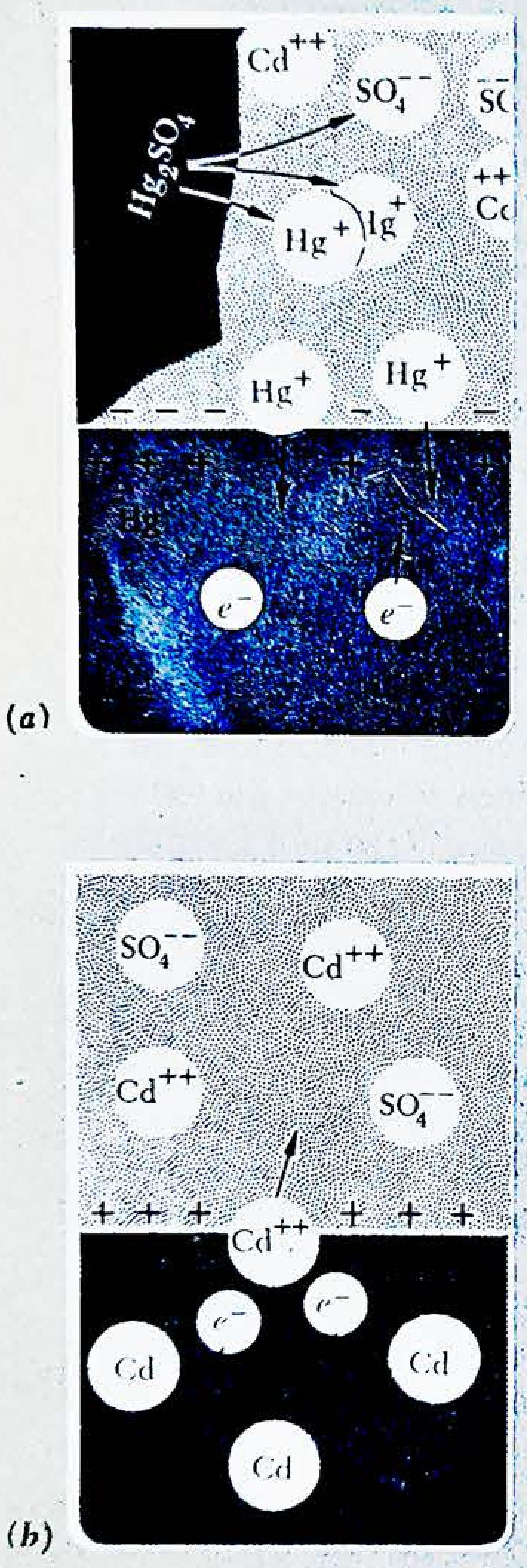


Fig. 4.17. Reprezentarea schematică a fenomenelor ce au loc la suprafața electrodului pozitiv *(a)* și la suprafața electrodului negativ *(b)*, cînd elementul Weston este conectat la o sarcină exterioară.

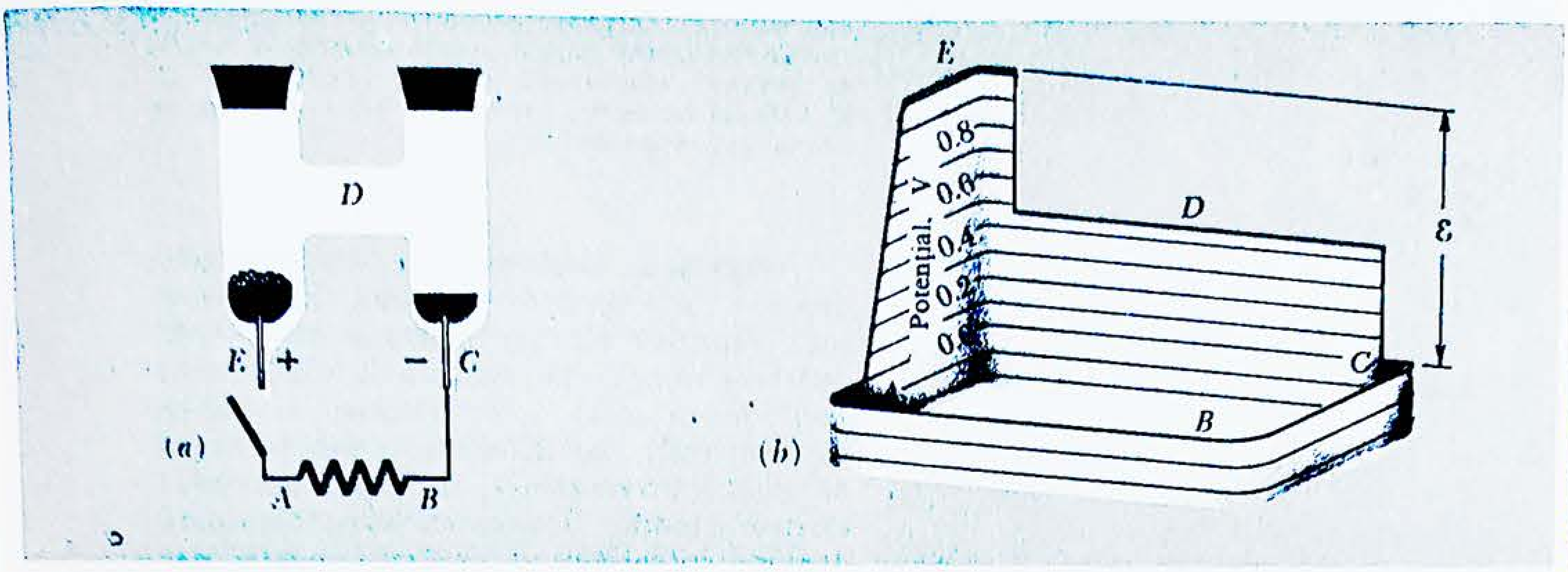


Fig. 4.18. Distribuția potențialului în circuitul deschis. Pe scala potențialului, s-a ales, în mod arbitrar, ca potențial 0, potențialul capătului din dreapta a circuitului.

la capete este acum mai mică decît $\mathcal{E}$, datorită căderii de potențial din interiorul electrolitului și posibil, de asemenea, și din cauza rezistenței suplimentare a straturilor de separație. Integrala de linie din intensitatea cîmpului electric de-a lungul întregului circuit este, ca și mai înainte, nulă. Dacă prin fiecare punct al circuitului a trecut un curent de Q coulombi, $\mathcal{E}Q$ ($\mathcal{E}$ fiind exprimat în volți) reprezintă energia exprimată în jouli, care a fost disipată în circuitul extern și în interiorul elementului, pe seama energiei chimice a elementelor constituente. Lanțul reacțiilor din element este reversibil. Asta înseamnă că dacă o altă sursă, cu o tensiune electromotoare mai mare, este introdusă în circuit, opunîndu-se elementului, atunci curentul va curge în sens opus iar procesele descrise decurg invers. Exact acest lucru se întîmplă la încărcarea bateriilor de acumulatori. În „elementul uscat" obișnuit, la descărcare apar cîteva transformări ireversibile care fac imposibilă reversibilitatea procesului.

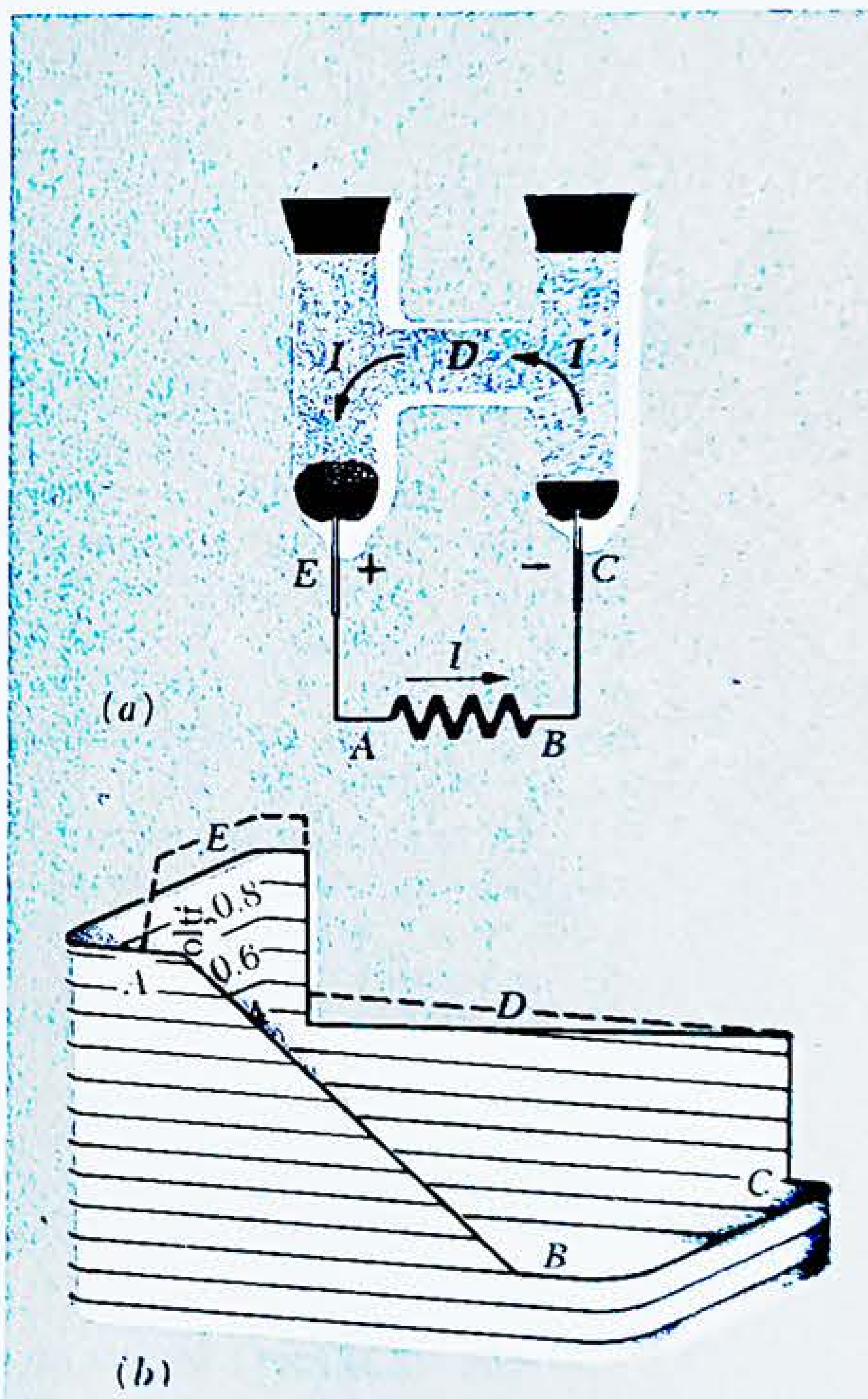


Fig. 4.19. Distribuția potențialului cînd prin rezistorul extern trece curentul. Observați căderea potențialului în interiorul electrolitului. Acest mod de tratare este inadecvat elementului Weston ca etalon. Un element etalon este folosit în cazurile cînd trece un curent foarte slab.

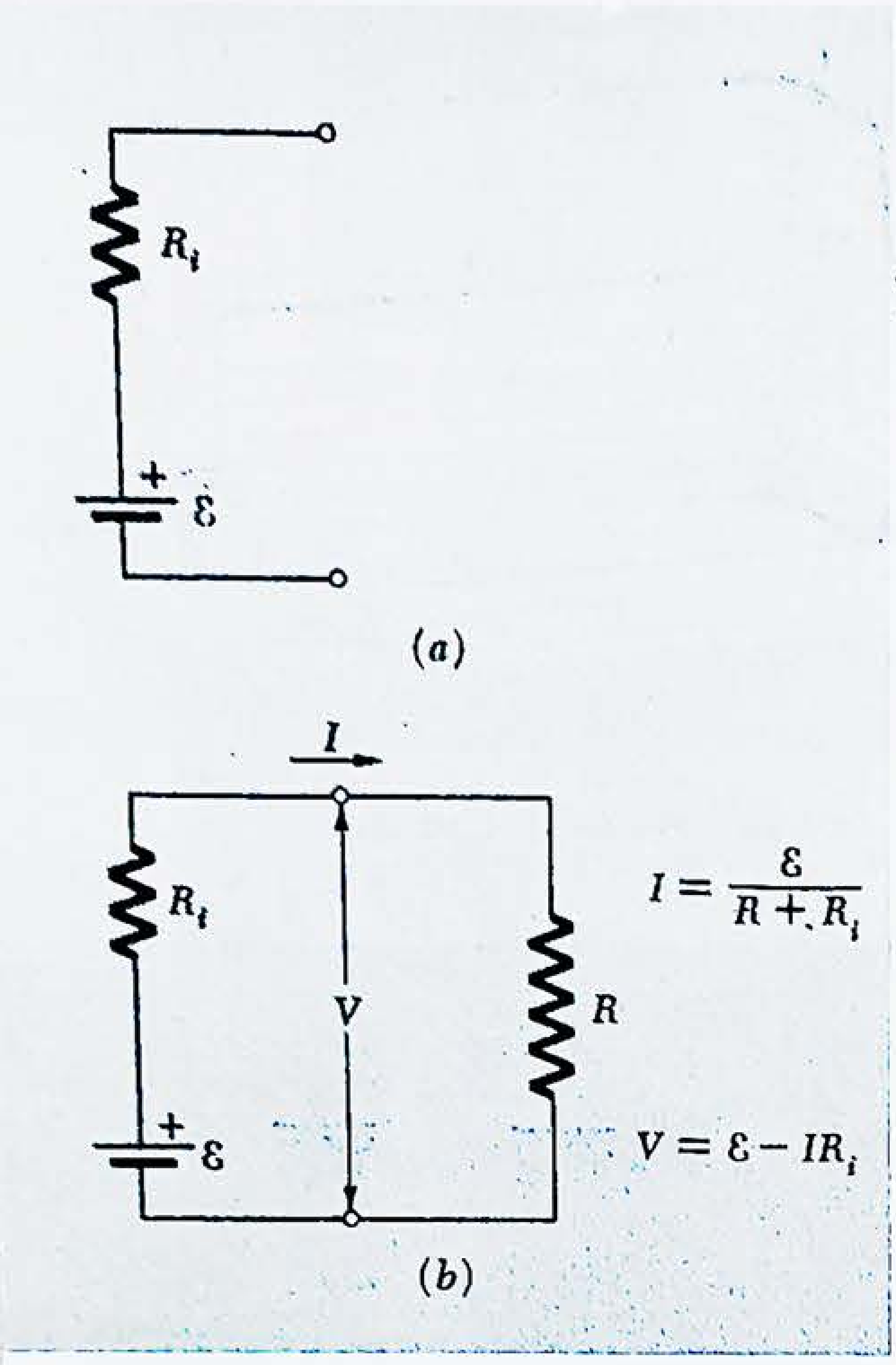


Fig. 4.20. *a)* Circuitul echivalent al unui element voltaic este o rezistență R_i legată în serie cu o sursă de tensiune electromotoare, de valoare fixă $\mathcal{E}$. *b)* Calculul intensității curentului într-un circuit ce conține un element voltaic.

Tensiunea electromotoare a elementului depinde de proprietăți atomice. Valoarea ei este cuprinsă într-un interval de 1 volt, deoarece energia de legătură a electronilor periferici în atom, are valoarea de cîțiva electron-volți, iar diferența acestor energii de legătură reprezintă, de fapt, tensiunea electromotoare. Tensiunea electromotoare depinde întrucîtva și de temperatură, dar studiul riguros al proceselor electrochimice cade în sarcina termodinamicii. În chimia fizică acesta constituie un capitol central. Riguros vorbind, nu este vorba de energie, ci de așa-numita *energie liberă*, dar aici nu ne vom ocupa de diferența dintre aceste două noțiuni termodinamice.

Elementul Weston este folosit nu ca sursă de energie electrică, ci mai curînd ca etalon de diferență de potențial. Cazul reprezentat în figura 4.19, în care prin circuit trece un curent atît de mare încît căderea de potențial de la capetele lui scade cu aproximativ 10%, ar constitui o proastă folosire a elementului. Tensiunea electromotoare în elementul Weston prezintă un înalt grad de reproductibilitate. Într-o altă variantă, în care soluția apoasă este saturată cu sulfat de cadmiu la ambii electrozi, tensiunea electromotoare la 20°C are valoarea de 1,0183 V. Folosind ca etalon elementul Weston și un potențiometru corespunzător, diferența de potențial poate fi măsurată cu o precizie de 10^{-5}.

În raport cu un circuit exterior, elementul poate fi reprezentat printr-o schemă echivalentă format dintr-o tensiune electromotoare $\mathcal{E}$, legată în serie cu o rezistență internă oarecare R_i. Legarea la o rezistență externă R dă un curent

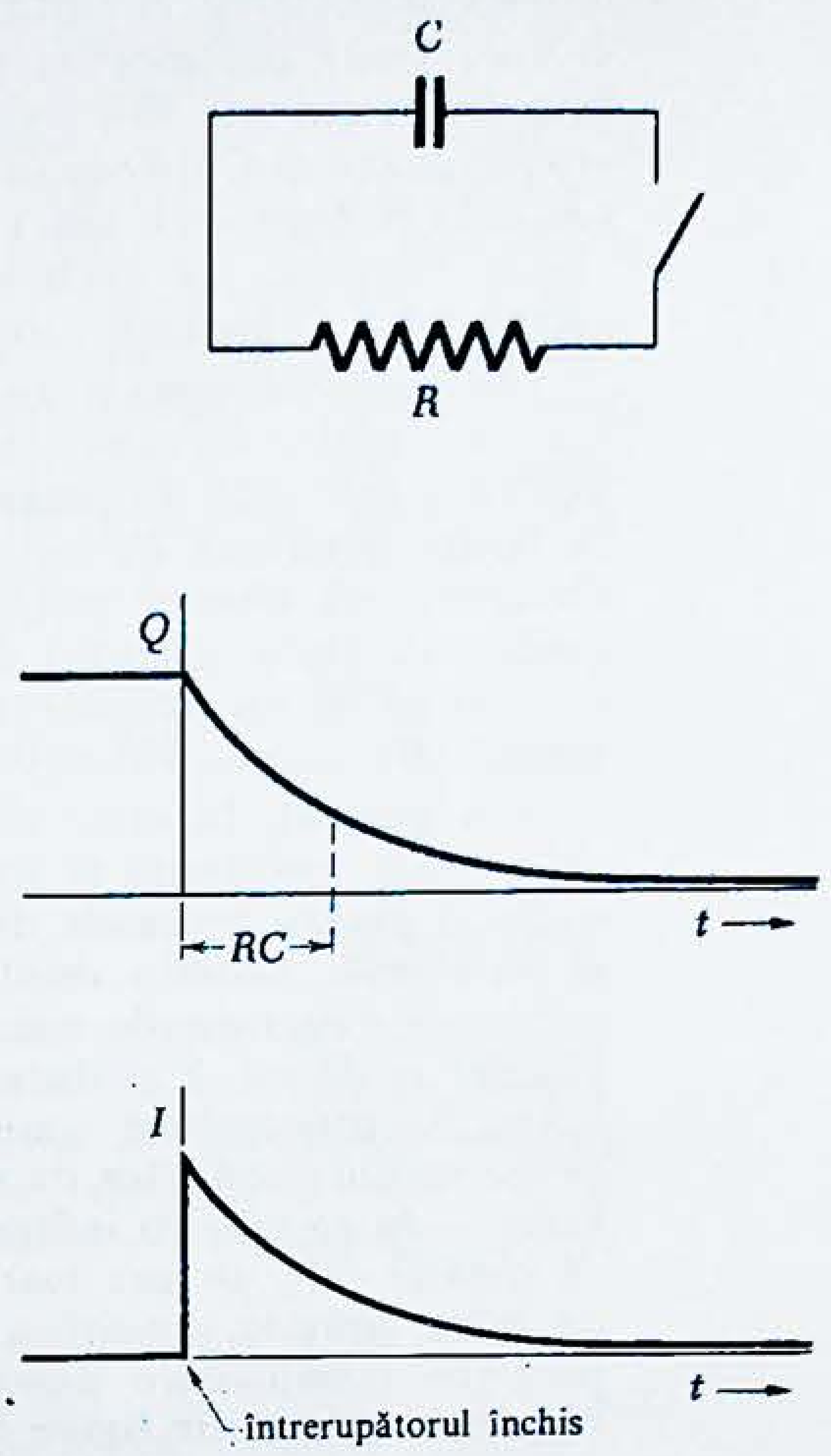
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}.$$

reprezentat în figura 4.20.

4.11. CURENȚI VARIABILI ÎN CONDENSATORI ȘI REZISTORI

Fie un condensator, cu capacitatea C, încărcat pînă la o diferență de potențial oarecare V_0 și apoi descărcat, prin legarea unei rezistențe R între capetele sale. În figura 4.21 sînt reprezentate: condensatorul — prin semnul

Fig. 4.21. Sarcina și curentul într-un circuit RC. În timpul RC sarcina scade de e ori.



convențional ⊣⊢ , rezistorul R și întrerupătorul pe care-l închidem la momentul $t = 0$. Este evident că pe măsură ce trece curentul condensatorul își va pierde treptat sarcina, tensiunea pe condensator se micșorează, ceea ce duce, la rîndul său, la micșorarea curentului. Pentru a vedea ce se întîmplă de fapt, este suficient să scriem legile ce guvernează circuitul. Fie Q sarcina pe condensator la un moment oarecare, V — diferența de potențial pe plăcile sale cît și pe rezistorul R. Fie I — intensitatea curentului, considerat pozitiv dacă curge dinspre placa pozitivă a condensatorului. Aceste mărimi, toate funcții de timp, sînt legate prin relațiile următoare:

$$Q = CV \quad I = \frac{U}{R} \quad -\frac{dQ}{dt} = I. \tag{28}$$

Eliminînd pe I și V, vom obține ecuația ce descrie variația în timp a lui Q:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \tag{29}$$

Separînd variabilele

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}. \tag{30}$$

și integrînd, obținem:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + \text{const.} \tag{31}$$

Prin urmare, soluția ecuației noastre diferențiale va fi de forma:

$$Q = (\text{o altă constantă}) \times e^{-t/RC} \tag{32}$$

Am stabilit că la $t = 0$, $U = U_0$ și prin urmare, la $t = 0$, $Q = CU_0$. Astfel se determină constanta și cunoaștem cum variază Q după închiderea contactului:

$$Q = CU_0 e^{-t/RC} \tag{33}$$

De aici, se determină direct variația intensității curentului:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \tag{34}$$

La închiderea circuitului curentul crește brusc pînă la valoarea V_0/R și apoi scade exponențial pînă la zero. Timpul caracteristic acestei scăderi este constanta RC. Nu trebuie să ne surprindă că produsul dintre rezistență și capacitate are dimensiunile timpului, întrucît știm că C are dimensiunile lungimii și după cum am văzut, produsul „rezistență × lungime" are dimensiunile timpului. Se vorbește deseori despre „constanta de timp RC" a circuitului sau a porțiunii de circuit.

În sistemul practic de unități, unitatea pentru capacitate este *faradul*. Un condensator cu capacitatea de un farad are o sarcină egală cu un coulomb pentru o diferență de potențial de un volt. Dacă R se exprimă în ohmi și C în farazi, produsul RC este exprimat în secunde. Pentru a verifica aceasta remarcăm că ohm = volt/ampere = volt · sec/coulomb, iar faradul = coulomb/volt. Dacă circuitul din figura 4.21 este format dintr-un condensator de 0,05 μF și un rezistor de 5M Ω, ambele ușor de găsit în orice laborator, atunci $RC = 5 \times 10^6 \times 0,05 \times 10^{-6}$ sau 0,25 s.

În general, în orice sistem electric format din conductori încărcați și căi ce opun rezistență la trecerea curentului, o măsură a timpului (poate nu singura) pentru procesele din sistem este dată de produsul dintre capacitate și rezistență. Aceasta rezultă în urma observațiilor făcute mai înainte cu privire la dimensiunile rezistivității. Să considerăm un condensator cu aria plăcilor egală cu A și distanța dintre ele s. Capacitatea sa C este egală cu $\varepsilon_0 A/s$. Să presupunem acum că distanța dintre plăci se umple dintr-o dată cu un mediu conductor de rezistivitate ρ. Pentru a ocoli răspunsul la întrebarea — în ce măsură influențează aceasta asupra capacității, să presupunem că mediul este un gaz foarte slab ionizat; o substanță cu o densitate atît de mică, practic, nu are nici o influență asupra capacității. Această nouă porțiune conductoare descarcă condensatorul cu aceeași eficacitate ca și rezistorul extern din figura 4.21. Cît de repede se va întîmpla aceasta? Rezistența R a acestei porțiuni este egală cu $\rho s/A$. Prin urmare, constanta de timp RC este egală cu $(\rho s/A)(\varepsilon_0 A/s) = \varepsilon_0 \rho$.

Acest timp este independent de proprietățile și dimensiunile specifice ale condensatorului. Mărimea obținută reprezintă, pur și simplu, constanta de timp a procesului de redistribuire a sarcinii sau relaxarea cîmpului electric într-un mediu conductor. Pentru descrierea acestei stări, într-adevăr, nu intervin plăcile condensatorului. Dacă într-un mediu conductor așezăm față în față două straturi de sarcini, ele vor dispărea destul de repede, ca și cîmpul electric, iar mediul revine la un potențial constant. *Timpul de relaxare* este determinat de rezistivitatea ρ. De exemplu, dacă rezistivitatea gazului slab ionizat este de 10^6 ohm · m, timpul de relaxare este de aproximativ 10 μs.

Ne reamintim că rezistivitatea conductorilor buni cum sînt metalele, de exemplu, este de ordinul a 10^{-7} ohm · m, valoarea timpului de relaxare fiind, în acest caz, de ordinul a 10^{-18} s. Un asemenea număr poate da naștere la bănuieli. Poate fi el, de fapt, interpretat ca timpul necesar pentru dispararea sarcinii concentrate într-un conductor? Remarcăm, în primul rînd, că acest timp este mult mai scurt decît orice timp scurs între două ciocniri succesive sau timpul de corelație din modelul conductivității electrice pe care l-am studiat. În ecuația (19) am găsit că pentru sodiu metalic, la temperatura camerei, $\tau_- = 3 \times 10^{-14}$ s. Acest lucru ne previne asupra faptului că pentru fenomenele ce au loc într-un asemenea interval de timp scurt nu avem dreptul, în general, să folosim rezistivitatea ρ întîlnită în circuitele de curent continuu. De asemenea, orice evaluări cantitative ale timpului de relaxare sînt sub semnul întrebării.

Cu toate acestea, motivul, pentru care putem bănui că problema nu e complet rezolvată, este mult mai profund. Pare curios faptul că timpul de relaxare $T = \varepsilon_0 \rho$ este independent de dimensiunea regiunii în cauză. Dacă regiunea este suficient de mică, totul este în ordine, dar dacă măcar una din dimensiunile regiunii este mai mare decît produsul dintre T şi viteza luminii — pentru oricare valoare finită a timpului de relaxare T — relaxarea presupune că redistribuirea sarcinilor se propagă cu o viteză mai mare decît c. Aceasta este incompatibilă cu teoria relativităţii. Este evident că dacă comportarea sarcinilor electrice şi a cîmpurilor este conformă cu postulatele teoriei relativităţii speciale, trebuie să mai intervină şi altceva pentru a putea explica aceste fenomene. Aceasta va constitui tema capitolului următor.

PROBLEME

Aplicaţie la densitatea de curent.

4.1. Într-un cm^3 se găsesc 5×10^{10} ioni pozitivi dublu ionizaţi, care se mişcă spre vest cu viteza de 10^7 cm/s. În aceeaşi regiune, se găsesc 10^{11} electroni pe cm^3, care se mişcă spre nord-est cu viteza de 10 cm/s. (Nu vă întrebaţi cum!) Care este direcţia lui **J**? Care este valoarea sa în amperi/cm^2?

Răspuns: 48,8° spre sud-vest; 1,85 A/cm^2.

Curentul produs de electronii ce se rotesc.

4.2. Într-un sincroton pentru electroni de 6 BeV, electronii se mişcă pe o orbită aproape circulară de lungime 240 m. Este normal ca în decursul unui ciclu să se mişte 10^{11} electroni pe orbită. Viteza electronilor este practic egală cu viteza luminii. Cu ce este egală intensitatea curentului? Am ales acest exemplu simplu pentru a sublinia că în definiţia pe care am dat-o pentru curent ca fiind viteza de transport a sarcinii, nu se impune ca purtătorii să fie nerelativişti şi nu există o regulă care să excludă contribuţia unei particule încărcate date, de mai multe ori pe secundă, la curent.

Transportul mecanic al sarcinii.

4.3. Într-un generator electrostatic Van de Graaff, o bandă de cauciuc de 30 cm lăţime se mişcă cu viteza de 20 m/s. În partea de jos a benzii există o sarcină superficială dată, a cărei densitate este suficient de mare pentru a da naştere unui cîmp de 12 kV/cm pe fiecare faţă a benzii. Care este intensitatea curentului, exprimată în mA?

Curentul de electroni într-o diodă cu vid.

4.4. Să considerăm o diodă cu vid cu catodul şi anodul plan paralele ca în figura 4.2. Distanţa dintre catod şi anod este de s cm, aria fiecăreia din ele fiind 1 cm^2, iar curentul de electroni emis de catod, ce trece spre anod, este I. Considerăm potenţialul catodului zero, iar

cel al anodului pozitiv şi menţinut la V_0. Cum se exprimă viteza electronului şi densitatea spaţială de sarcină ρ în funcţie de distanţa x pînă la catod? Să presupunem că curentul este atît de slab încît cîmpul electric nu este influenţat de sarcina spaţială şi electronii părăsesc catodul cu viteza iniţială egală cu zero.

Viteza de antrenare a electronilor de conducţie într-un metal.

4.5. Dacă aproximăm numărul electronilor de conducţie dintr-un metal-argint, de exemplu, ca fiind egal cu cel al atomilor, care este viteza medie de antrenare a electronilor de conducţie dintr-un fir de argint de diametru 1 mm, prin care trece un curent de 30 A? Daţi un răspuns aproximativ; daţi valori constantelor ce apar în calcule şi ale căror valori nu sînt tabelate.

Conductibilitatea ionică în aer.

4.6. Un container umplut cu aer, aflat la temperatura şi presiunea camerei, este iradiat cu un fascicul de raze X care ionizează o mică parte din moleculele aflate în interior. Ionii negativi sînt moleculele de O_2, avînd un electron suplimentar. În problemă, puteţi considera că moleculele au toate aceeaşi masă moleculară cuprinsă între masa molară a O_2 şi N_2. Dimensiunile containerului sînt $10 \times 10 \times 2$ cm^3 şi presupunem că pereţii de 10×10 cm^2 sînt din metal, iar restul din material izolator. La capetele conductoare se aplică o t.e.m. de 1000 V, dînd naştere unui curent de intensitate $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ A. Care este conductivitatea acestui gaz slab ionizat? Dacă viteza medie a ionului este 5×10^4 cm/s şi drumul liber mediu de 10^{-5} cm, care este timpul mediu dintre ciocniri? Ce fracţiune din moleculele gazului este ionizată? (Presupunem că numărul ionilor pozitivi şi negativi odată ionizaţi este egal.)

O aplicaţie simplă implicînd rezistivitatea.

4.7. Un experimentator doreşte să realizeze o foiţă de aluminiu de grosime 50 Å, prin evaporarea în vid a aluminiului pur şi depunerea lui pe o sticlă curată. Întîi depune un strat destul de gros, lăsînd o porţiune centrală liberă, prin mascarea ei. Apoi folosind o altă mască,

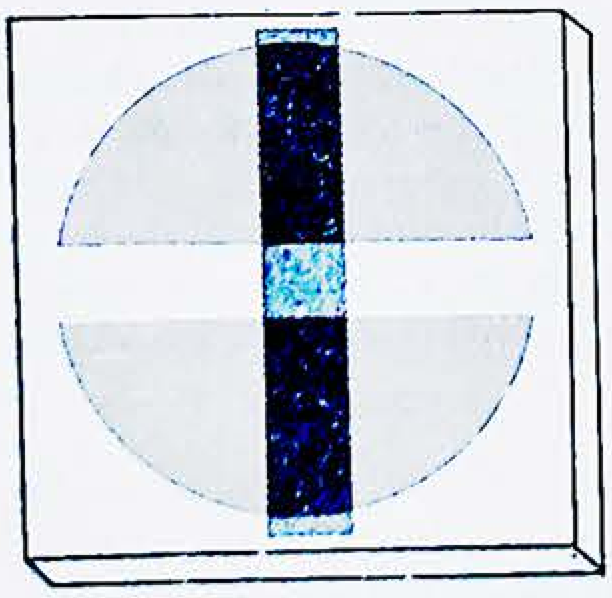


Fig. la problema 4.7.

depune un strat identic cu porţiunea goală şi perpendicular pe ea. În acelaşi timp, porţiunile groase sînt folosite drept capete pentru măsurarea rezistenţei. Pentru ce valoare a rezistenţei va înceta evaporarea? (Rezistivitatea aluminiului pur la temperatura camerei este $2,83 \cdot 10^{-8}$ ohm · m.)

Rezistenţa unui conductor compus.

4.8. Fierul pur are o rezistivitate de $10,0 \cdot 10^{-8}$ ohm · m la 20°C. Rezistivitatea cuprului, la aceeaşi temperatură, este de $1,77 \cdot 10^{-8}$ ohm · m. Considerăm doi conductori compuşi diferit. Fiecare din ei are lungimea de 1m şi secţiunea un pătrat cu latura de 0,8 cm. Conductorul *A* este format prin punerea cap la cap a unei bare paralelipipedice de fier cu lungimea de 50 cm şi a unei bare similare de cupru. Conductorul *B* este format din bare de cupru şi fier de lungime 1 m şi secţiune $0,4 \times 0,8$ cm² alăturate prin presare. Care este rezistenţa ambilor conductori, exprimată în ohmi şi măsurată la distanţa de 1 m de capete? Dacă prin conductorul *A* trece curent continuu, în care din bare disiparea de putere va fi mai mare? Răspundeţi la aceeaşi întrebare în cazul conductorului *B*.

Chestiune pentru discuţie.

4.9. Dacă un fir de cupru este întins, lungindu-l cu 0,1%, cu cît a variat rezistenţa sa? Ce presupuneri faceţi, referitor la comportarea cuprului în timpul deformării?

Curentul într-un mediu conductor de dimensiuni mari.

4.10. Doi electrozi, constituiţi din două sfere metalice de diametru 30 cm, sînt coborîţi în adîncul oceanului, suspendaţi de cabluri izolatoare. Sferele se află la adîncimea de 60 m. Distanţa dintre ele, pe orizontală, este de 300 m. Circuitul este închis printr-un cablu izolator, aflat în apropiere de suprafaţă şi care ajunge pînă la un vapor, aflat deasupra uneia din sfere. Luînd conductivitatea apei de mare egală cu 4 $(\text{ohm} \cdot \text{m})^{-1}$, să se evalueze rezistenţa în acest circuit. În primul rînd, trebuie să decideţi dacă rezistenţa porţiunii de ocean dintre cele două sfere se datorează vecinătăţii sferelor sau întregului volum al oceanului. Pentru clarificarea acestei probleme, puteţi studia rezistenţa dintre două sfere concentrice, din care una este mult mai mare ca cealaltă şi între care se află un mediu omogen. De asemenea, puteţi trasa aproximativ liniile de curent din ocean, în porţiunea dintre cele două sfere. Această problemă, asupra rezistenţei circuitului, în care una din porţiuni este o sondă conductoare introdusă într-un mediu slab conductor, este importantă nu numai pentru geofizică dar şi pentru multe cercetări fiziologice.

4.11. Ce valoare trebuie să aibă R_1, în circuitul din figură, pentru ca rezistența la intrarea dintre capete să fie egală cu R_0, dacă R_0 este dat?

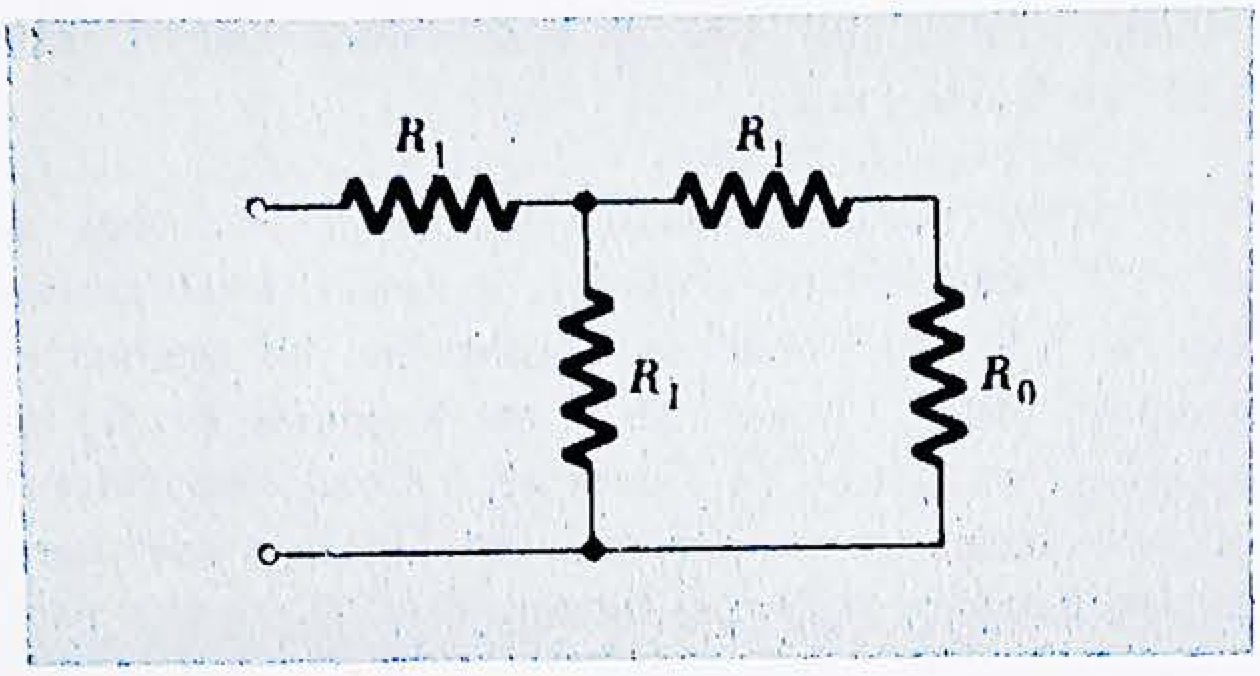


Fig. la problema 4.11.

4.12. Cînd o baterie de tensiune V necunoscută, fără rezistență interioară, este conectată la un rezistor R, ampermetrul din circuit indică 4 A. Cînd se leagă în serie cu R o rezistență adițională de 10 ohmi, intensitatea curentului scade la 3A, care sînt valorile lui R și V? Dacă bateria are o rezistență interioară R_i, ce experiențe trebuie făcute pentru a determina pe R, V și R_i?

4.13. Să se arate că dacă o baterie, de t.e.m. fixă $\mathcal{E}$ și rezistența interioară R_i, este conectată la un rezistor cu rezistență variabilă R, pentru $R = R_i$, pe rezistorul exterior se debitează puterea maximă.

4.14. Unui aparat oarecare, aflat în interiorul unui cilindru sub înaltă presiune, este necesar să i se transmită căldură cu o viteză perfect constantă. În cursul experienței, presiunea va varia provocînd variații ale rezistenței firului folosit ca încălzitor. Circuitul reprezentat în figură corespunde unei asemenea situații. R_3 este înfășurarea încălzitorului aflat în interiorul cilindrului de înaltă

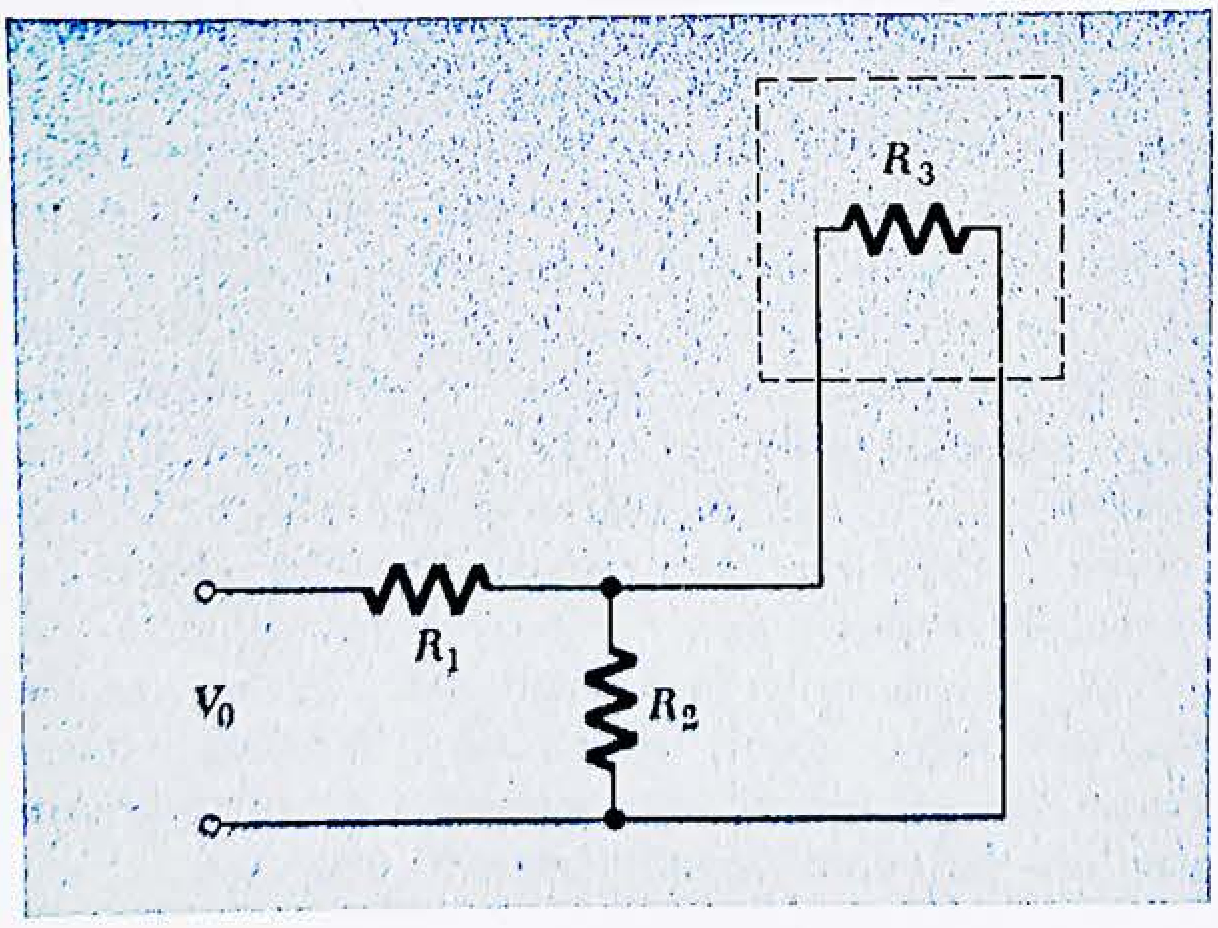


Fig. la problema 4.14.

presiune R_1 şi R_2 sînt rezistori ficşi, aflaţi în exterior şi care rămîn constanţi. V_0 este valoarea tensiunii constante aplicate. Ideea constă în aceea, că în primă aproximaţie, puterea disipată pe R_3 să fie independentă de rezistenţa lui R_3. Că acest lucru este posibil, se va vedea din următoarele argumente. Dacă R_3 tinde către zero, puterea disipată pe el trebuie să tindă spre zero întrucît curentul este limitat de R_1. Pe de altă parte, dacă R_3 creşte infinit de mult, puterea disipată tinde tot către zero întrucît tensiunea pe R_3 este limitată. Undeva, între aceste limite, trebuie să existe un maxim. Problema constă în a-l găsi, adică a găsi o asemenea relaţie între R_1, R_2 şi R_3, pentru care se atinge insensibilitatea căutată a puterii la variaţiile rezistenţei R_3.

4.15. În puntea ilustrată în figură, rezistenţele variabile $R_1, \ldots, R_5$ sînt date şi de asemenea este dată intensitatea curentului I_0, ce intră în stînga şi iese în dreapta. Rezolvarea acestui circuit constă în găsirea intensităţilor curentului în toate ramurile. Acestor cinci intensităţi necunoscute li s-au atribuit direcţii arbitrare, indicate prin săgeţi. Dacă în vreuna din ramuri intensitatea curentului are sens opus, vom obţine o valoare negativă. Pentru fiecare din cele patru joncţiuni sau *noduri*, este valabilă o ecuaţie de forma $I_0 - I_1 - I_3 = 0$. Scrieţi aceste ecuaţii şi arătaţi că numai trei sînt independente. Folosind condiţia III din paragraful 4.8, aplicată la două contururi, se obţin încă două ecuaţii. (Observaţi, că se pot considera trei contururi, dar numai două din ecuaţiile pentru contururi sînt independente.) Avem acum 5 ecuaţii independente cu 5 necunoscute şi nu rămîne decît să aplicăm cunoştinţele de algebră. Cînd se obţine soluţia, una din metodele de verificare a ei constă în a egala unul sau mai mulţi R cu zero reducînd, în acest fel, puntea la un simplu circuit în care distribuţia curenţilor este simplă. De exemplu, cu ce va fi egal I_1 dacă $R_5 = 0$?

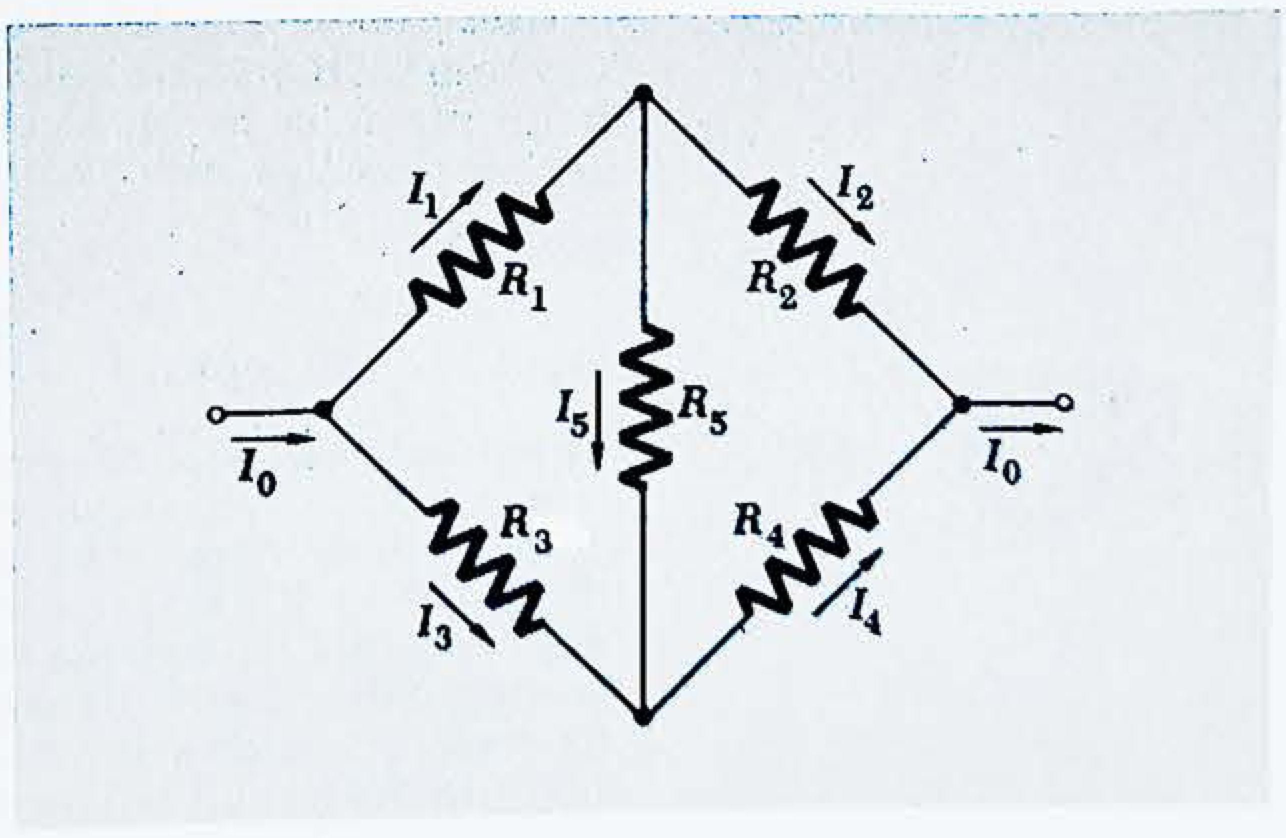


Fig. la problema 4.15.

Aplicație din care reiese de ce considerăm, de obicei, că curentul ce iese dintr-o porțiune de circuit este egal cu curentul ce intră.

4.16. Ca exemplu, alegem „cutia neagră" din paragraful 4.8, reprezentată printr-un cub cu latura de 10 cm, cu două terminale. Aceste terminale sînt legate printr-un fir la un circuit exterior oarecare. În rest, cutia este bine izolată. Prin acest element de circuit trece un curent de aproximativ 1 A. Presupunem acum că curentul ce intră diferă de cel care iese cu o milionime. Cît durează pînă ce potențialul cutiei ajunge la 1000 V, dacă nu se întîmplă nimic altceva?

Variația energiei în circuitul RC.

4.17. Reveniți la exemplul condensatorului C, care se descarcă printr-un rezistor R și arătați că energia totală disipată în rezistor este egală cu energia inițial acumulată în condensator. Presupuneți că vi se obiectează prin aceea că un condensator, în realitate, nu se descarcă niciodată deoarece Q devine zero numai pentru $t = \infty$. Cum veți răspunde la această obiecție? Cu ajutorul unor ipoteze logice, puteți găsi timpul în care sarcina scade pînă la un electron.

O problemă cu mult conținut fizic.

4.18. O particulă de grafit, aproximativ sferică de diametru 10 μ (10^{-3} cm) cade în vid, intersectînd un fascicul de protoni cu energia de 3 keV. I s-a dat drumul de pe o suprafață aflată la cîțiva centimetri de partea superioară a fasciculului. Fasciculul se mișcă orizontal, poartă un curent de 10 mA, uniform distribuit pe o secțiune circulară cu raza de 2 cm. Vom considera că protonii de 3 keV nu pot străpunge 10 μ de grafit, astfel încît orice proton care pătrunde în grafit, rămîne în el. Ce se va întîmpla cu particula de grafit? Apar, aici, cîteva chestiuni asupra cărora merită să reflectați: Cîți protoni trebuie să rețină particula, pentru ca potențialul ei să crească destul de mult astfel încît să înceapă a respinge protonii? Aproximativ în cît timp se ajunge la aceasta? Mai mult decît îi trebuie particulei pentru a străbate fasciculul? I se va imprima particulei o viteză orizontală apreciabilă? Se va încălzi ea puternic? Credeți că un asemenea fascicul de protoni, îndreptat vertical în sus, poate servi ca suport unei particule de grafit în vid?

Chestiuni pentru discuție.

4.19. Cineva ar putea fi tentat să afirme că viteza cu care se mișcă purtătorii de sarcină, limitează viteza redistribuirii sarcinilor în conductor. Să considerăm, totuși, o bară metalică pe care dintr-o dată se amplasează sarcina pozitivă de $\frac{10^{-9}}{3}$ C la unul din capete și la celălalt capăt sarcina negativă de $\frac{10^{-9}}{3}$ C. Cît timp trebuie să se deplaseze sarcinile pentru ca bara să ajungă din nou neutră? Sau, să considerăm un proton cu energia de 10 MeV și cu viteza (care se găsește ușor prin calcul) de $4{,}5 \cdot 10^7$ m/s, ce se mișcă paralel cu suprafața unei plăci de cupru, la distanța de 1 mm de ea. Viteza electronilor de conducție din cupru abia depășește 10^8 m/s. Ce credeți, sarcina superficială indusă va putea urmări mișcarea protonului sau va rămîne în urmă?

Capitolul 5

Cîmpul purtătorilor de sarcină în mişcare

5.1. De la Oersted la Einstein 164
5.2. Forţe magnetice 165
5.3. Măsurarea sarcinii în mişcare 167
5.4. Invarianţa sarcinii 170
5.5. Cîmpul electric măsurat în diferite sisteme de referinţă 173
5.6. Cîmpul unui purtător punctiform de sarcină ce se mişcă cu viteză constantă 177
5.7. Cîmpul unui purtător de sarcină la pornire sau oprire 180
5.8. Forţa ce acţionează asupra unui purtător de sarcină în mişcare 186
5.9. Interacţiunea dintre un purtător de sarcină în mişcare şi alţi purtători de sarcină în mişcare 190

PROBLEME 197

5.1. DE LA OERSTED LA EINSTEIN

În iarna anului 1819-20 Hans Christian Oersted preda cursul de electricitate, galvanism şi magnetism la Universitatea din Copenhaga. Prin *electricitate* se subînţelegea electrostatica, *galvanismul* — capitol apărut în urma descoperirii lui Galvani şi a experienţelor efectuate de Volta, se referea la efectele curentului continuu produs de baterii, iar *magnetismul* se ocupa de proprietăţile, de mult cunoscute, ale minereurilor de fier, de acele de busolă, de cîmpul magnetic al Pămîntului. Apărea, totuşi, clar faptul că între curenţii galvanici şi sarcina electrică trebuie să existe o legătură, deşi în afara faptului că ambele produc şocuri organismelor, nu existau alte dovezi directe. Pe de altă parte, părea că magnetismul şi electricitatea n-au nimic comun. Totuşi, la Oersted, exista ideea, poate neclară, dar urmărită cu perseverenţă, că magnetismul ca şi curentul galvanic ar putea fi una din „formele ascunse" ale electricităţii. În căutarea acestei legături, a încercat să facă în faţa auditoriului său, experienţa trecerii unui curent galvanic printr-un fir aflat deasupra acului unei busole şi perpendicular pe el. N-a obţinut nici un efect. După curs, ceva l-a stimulat să încerce experienţa cu firul paralel cu acul busolei. Acul a deviat puternic, iar dacă sensul curentului galvanic era opus, acul devia în sens invers!

Lumea ştiinţifică era perfect pregătită pentru această descoperire. Îndată ce vestea a ajuns la alte laboratoare, au fost impulsionate alte experienţe şi descoperiri. N-a trecut multă vreme şi Ampère, Faraday şi alţii au făcut o descriere exactă şi completă a acţiunilor magnetice a curenţilor electrici. Descoperirea fundamentală a lui Faraday a inducţiei electromagnetice a urmat după mai puţin de 12 ani de la experienţa lui Oersted. În două sute de ani de la publicarea în 1800 a marii lucrări a lui William Gilbert — „De Magnete", cunoştinţele asupra naturii magnetismului n-au progresat deloc. Pornind de la aceste descoperiri experimentale s-a dezvoltat teoria clasică a electromagnetismului. Ea a fost formulată matematic de Maxwell şi ingenios fundamentată experimental de către Hertz în 1888, prin punerea în evidenţă a undelor electromagnetice.

Teoria specială a relativităţii îşi are rădăcinile sale istorice în electromagnetism. Lorentz, studiind electrodinamica sarcinilor în mişcare, a ajuns foarte aproape de formularea finală a lui Einstein. Iar importanta lucrare a lui Einstein, apărută în 1905, n-a fost intitulată „Teoria relativităţii", ci „Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare". Astăzi, ne dăm seama că postulatele teoriei relativităţii şi implicaţiile lor deschid un larg cîmp de acţiune ce cuprinde toate legile fizicii, nu numai cele ale electromagnetismului. Impunem ca oricare teorie fizică completă să fie invariantă relativist. În oricare din sistemele de referinţă inerţiale, descrierea evenimentelor tre-

buie să fie aceeaşi. În fizică s-a întîmplat ca, cu mult înainte de a fi conştienţi de semnificaţia invarianţei relativiste, să existe o teorie relativist invariantă — teoria electromagnetică a lui Maxwell. Ar fi putut oare apare ideile relativităţii speciale dacă n-ar fi existat o teorie completă a cîmpului electromagnetic — este o chestiune ce priveşte istoria ştiinţei; probabil, nu se va putea răspunde la ea. Ceea ce putem spune azi este că drumul istoric ce duce de la acul busolei lui Oersted la postulatele lui Einstein, este destul de clar marcat.

În capitolul acesta şi în cel următor, vom urma acest drum aproape în sens invers. Asta nu înseamnă că nu respectăm istoria. Dimpotrivă, credem că aceluia care urmăreşte istoria acestor mari descoperiri, o reprezentare clară asupra legăturii esenţiale dintre electricitate şi magnetism, îi va fi de folos. Această legătură poate fi relevată foarte direct şi simplu, privind din punctul de vedere al relativităţii speciale tot ce-am învăţat pînă acuma despre sarcina electrică şi cîmpul electric. Dar, înainte de asta, să trecem în revistă cîteva fenomene, pe care ne vom strădui să le explicăm.

5.2. FORŢE MAGNETICE

Doi conductori paraleli, prin care trec curenţi de acelaşi sens, se atrag. Forţa, ce acţionează asupra unităţii de lungime a unuia din conductori, este proporţională cu produsul intensităţilor celor doi curenţi şi invers proporţională cu distanţa dintre conductori (fig. 5.1, *a*). Schimbînd sensul unuia din curenţi, forţa devine de respingere. Astfel, cele două porţiuni de conductori din figura 5.1, *b*, care fac parte din acelaşi circuit, tind să se despartă. Între două filamente de curent continuu există ceva asemănător cu „acţiunea la distanţă". Ea pare să nu aibă nimic comun cu o sarcină electrică statică aflată la suprafaţa conduc-

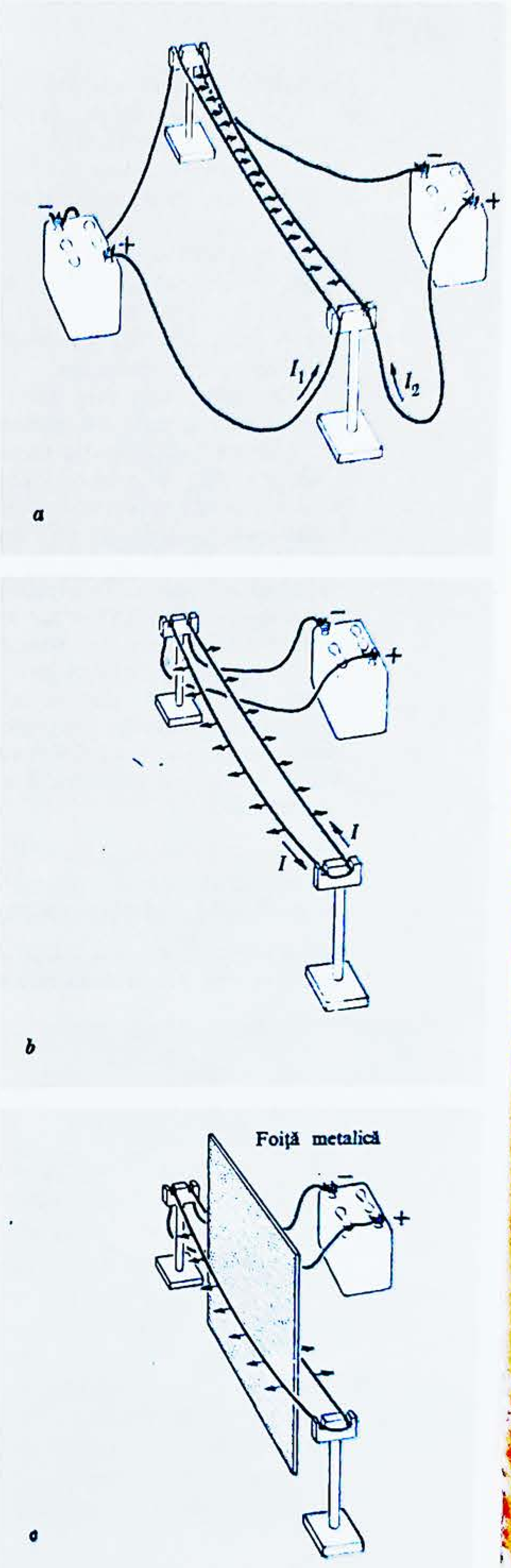


Fig. 5.1. *(a)* Conductorii paraleli străbătuţi de curenţi de acelaşi sens se atrag. *(b)* Conductorii paraleli străbătuţi de curenţi de sens opus se resping. *(c)* Punerea unei foiţe metalice între conductori nu influenţează asupra forţelor.

torului. Asemenea sarcini ar putea exista şi conductorii ar putea avea potenţiale diferite, dar forţa, despre care vorbim, depinde doar de *mişcarea* sarcinilor în conductori, adică, de cei doi curenţi. Dacă punem o foiţă de metal între cei doi conductori, forţa rămîne aceeaşi (fig. 5.1, *c*). Aceste noi tipuri de forţe, care apar cînd sarcinile sînt în mişcare, se numesc *forţe magnetice*.

Acul busolei lui Oersted (fig. 5.2, *a*) nu seamănă prea mult cu un circuit de curent continuu. Noi ştim însă acum, ceea ce Ampère a intuit primul, că fierul magnetizat este plin de sarcini în continuă mişcare — de curenţi electrici la scară atomică. O bobină subţire, prin care trece curentul de la o baterie (fig. 5.2, *b*), se comportă exact ca acul busolei aflate sub influenţa curentului din apropiere.

Urmărind mişcarea unei particule încărcate libere şi a unui conductor parcurs de curent, nu vedem nici o diferenţă.

Într-un tub catodic electronii, care în mod obişnuit urmează o traiectorie dreaptă, se vor apropia sau îndepărta de un conductor străbătut de curent, aflat în exterior, în funcţie de sensul curentului din conductor (fig. 5.3). În laborator, aţi făcut deja cunoştinţă cu acest fenomen şi ştiţi că interacţiunea dintre curenţi şi alte sarcini în mişcare poate fi descrisă prin introducerea *cîmpului magnetic*. (Reamintiţi-vă că cîmpul electric era folosit la descrierea „acţiunii la distanţă" a sarcinilor aflate în repaus, exprimată prin legea lui Coulomb.) Spunem că curentului electric i se asociază un cîmp magnetic care ocupă spaţiul înconjurător. Asupra unui alt curent sau asupra oricărei particule încărcate care se mişcă în acest cîmp se exercită o forţă proporţională cu intensitatea cîmpului magnetic în acel punct. Pentru o particulă încărcată, forţa este întotdeauna perpendiculară pe direcţia vitezei particulei. Forţa totală, ce acţionează asupra particulei ce poartă sarcina q, este dată de expresia

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

unde **B** este inducţia cîmpului magnetic.

Fig. 5.2. Curentul ce trece prin conductor are aceeaşi acţiune şi asupra acului busolei *(a)* şi asupra unei bobine străbătute de curent *(b)*.

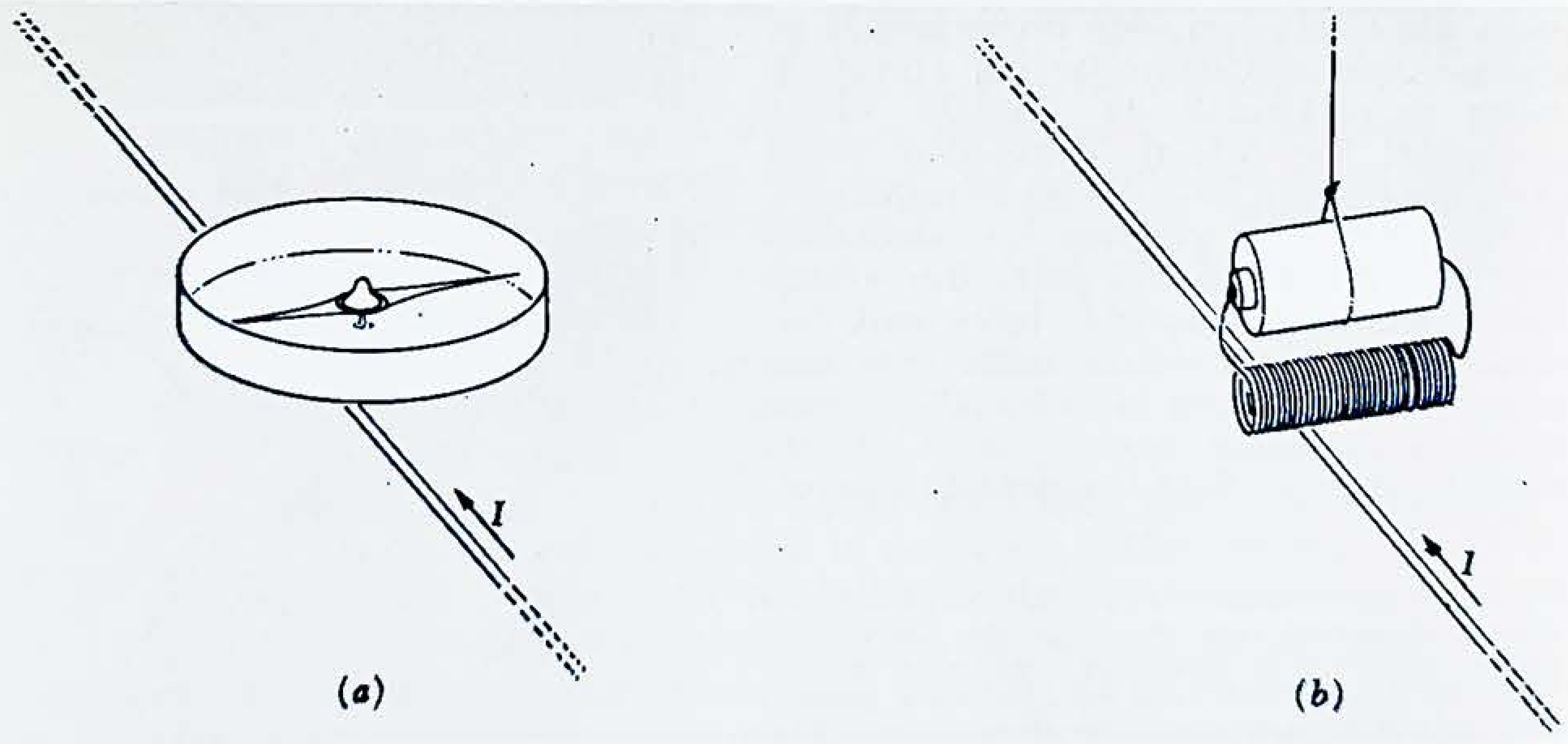
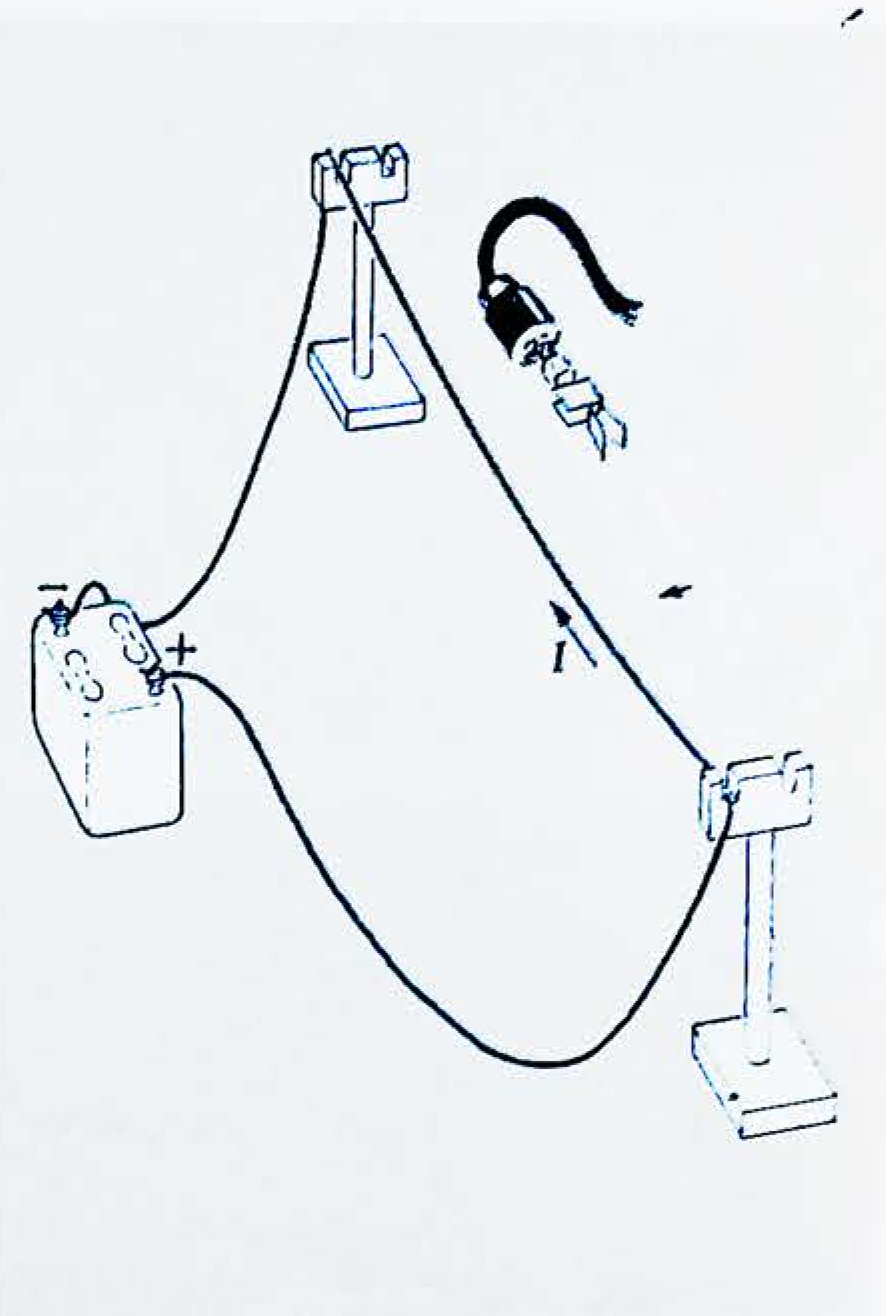


Fig. 5.3. Un exemplu de atracție a curenților de același sens (comparați cu fig. 5.1, *a*). Acest fenomen poate fi descris în același mod ca devierea unui fascicul de electroni de către un cîmp magnetic.



Pentru definirea lui **B** folosim ecuația (1). Inducția cîmpului magnetic este un vector care determină acea parte a forței ce acționează asupra sarcinii în mișcare, care este proporțională cu viteza ei. Cu alte cuvinte, dacă se spune: „Determinați direcția și mărimea vectorului **B** în locul cutare sau cutare", sînt necesare următoarele operațiuni: alegeți o particulă de sarcină cunoscută q. Măsurați forța exercitată asupra lui q în repaus, pentru a determina pe **E**. Apoi măsurați forța exercitată asupra particulei cînd are viteza **v**; repetați măsurătorile pentru alte direcții ale lui **v**. Găsiți, acum, valoarea lui **B** astfel încît înlocuind valoarea lui în ec. (1), să verifice toate aceste rezultate; aceasta va fi inducția cîmpului magnetic în acel loc.

Este evident că aceasta nu explică nimic. De ce este valabilă ec. (1)? De ce putem găsi întotdeauna un **B**, care să satisfacă această relație simplă, pentru toate valorile posibile ale vitezei? Vrem să înțelegem de ce există o forță proporțională cu viteza. Este remarcabil faptul că această forță este strict proporțională cu **v**, iar cîmpul electric nu depinde deloc de **v**! De ce este așa, vom vedea în paginile următoare.

5.3. MĂSURAREA SARCINII ÎN MIȘCARE

Cum vom proceda pentru a măsura mărimea sarcinii electrice a unei particule în mișcare? Înainte de a lămuri această problemă, n-are sens să ne întrebăm ce efect are mișcarea asupra sarcinii însăși. O sarcină poate fi măsurată numai prin efectele pe care le produce. O sarcină punctiformă Q, aflată în repaus, poate fi măsurată prin determinarea forței ce acționează asupra unei sarcini de probă q, aflată la o anumită distanță (fig. 5.4, *a*). Aceasta este dată de legea lui Coulomb. Dar dacă sarcina, pe care vrem s-o măsurăm, este în mișcare, ne aflăm pe un teren nesigur. Apare o direcție aparte în spațiu, direcția instantanee a mișcării. S-ar putea ca forța ce acționează asupra sarcinii de probă q, să depindă nu numai de distanța dintre cele două sarcini ci și de direcția de la Q la q. Pentru diferite poziții ale sarcinii de probă, ca în figura 5.4, *b*, putem observa forțe diferite. Înlocuin-

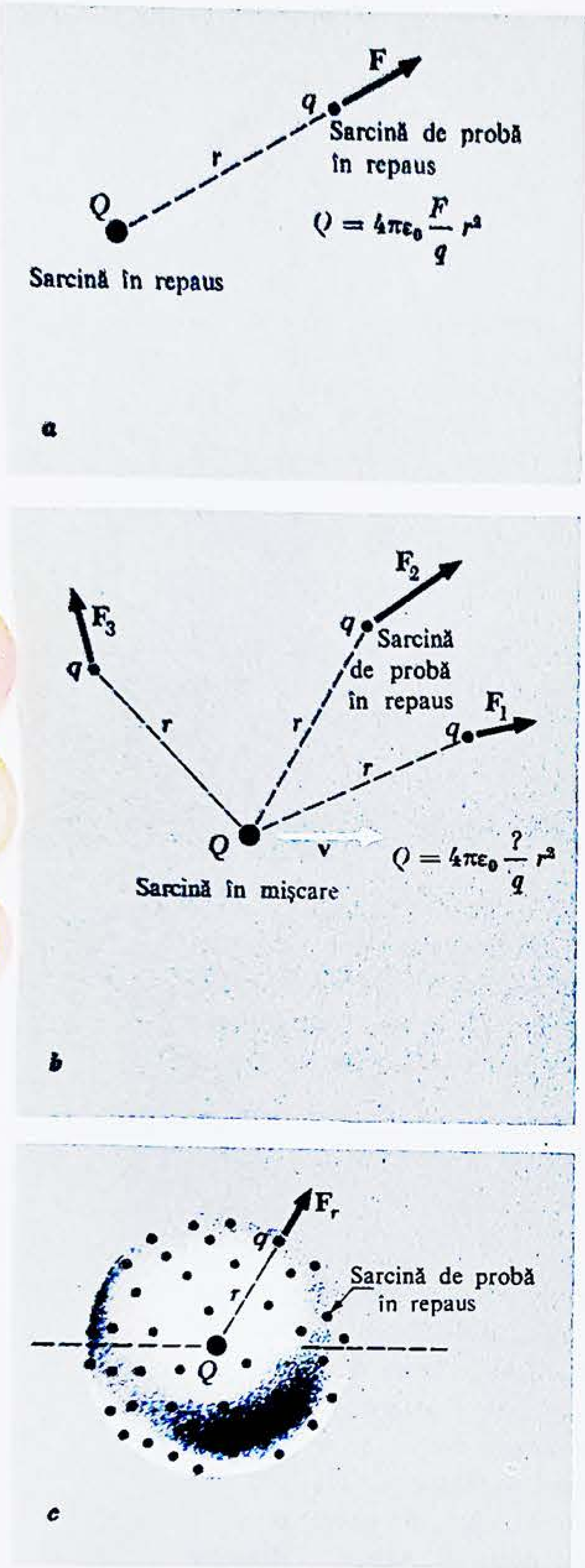


Fig. 5.4. *a*) Mărimea unei sarcini în repaus este determinată de forţa ce acţionează asupra unei sarcini de probă aflată în repaus şi de legea lui Coulomb.
b) În cazul unei sarcini în mişcare, forţa, după cîte ştim, poate depinde de poziţia sarcinii de probă. Dacă este aşa, nu putem folosi metoda (*a*).
c) În momentul trecerii lui Q prin centrul sferei pe care sînt distribuite sarcinile de probă, măsuraţi componenta radială a forţei ce acţionează asupra fiecărei sarcini şi folosiţi valoarea medie a lui F_r, pentru determinarea lui Q. Aceasta este echivalentă cu evaluarea integralei de suprafaţă a lui **E**.

du-le în legea lui Coulomb, vom obţine diferite valori pentru una şi aceeaşi mărime a lui Q. De asemenea, nu putem avea certitudinea că forţa va fi îndreptată întotdeauna pe direcţia razei vectoare **r**.

Pentru a lua în consideraţie această posibilitate, să convenim a determina pe Q prin medierea forţei după toate direcţiile. Să ne imaginăm un număr infinit de mare de sarcini de probă distribuite uniform pe suprafaţa unei sfere (fig. 5.4, *c*). În momentul cînd sarcina în mişcare trece prin centrul sferei, se măsoară componenta radială a forţei ce acţionează asupra fiecărei sarcini de probă, folosind în calculul lui Q media acestor valori ale forţei. Asta este exact operaţia care se face la determinarea integralei de suprafaţă din cîmpul electric pe întreaga sferă, la momentul t. Reţinem că sarcinile de probă sînt toate în repaus; prin definiţie, forţa exercitată pe unitatea de sarcină q dă intensitatea cîmpului electric în acel punct. Înseamnă că legea lui Gauss şi nu cea a lui Coulomb, oferă calea firească* de determinare a mărimii sarcinii electrice a

* Aceasta nu este singura cale posibilă. Se poate, de exemplu, alege arbitrar ca sarcinile de probă să se afle întotdeauna exact pe direcţia de mişcare a sarcinii de măsurat. Sarcina astfel determinată nu va mai avea proprietăţile simple amintite, iar noua teorie va fi greoaie şi complicată.

unei particule sau a mai multor particule în mişcare. Această determinare se poate face după cum urmează.

Mărimea sarcinii electrice într-o regiune este dată de integrala de suprafaţă din intensitatea cîmpului electric **E**, pe o suprafaţă S ce delimitează această regiune. Această suprafaţă S, într-un sistem de referinţă F, este fixă. Intensitatea cîmpului **E**, într-un punct oarecare (x, y, z) al sistemului de referinţă F şi la un moment oarecare t, este măsurată de forţa ce acţionează asupra sarcinii de probă aflată în repaus faţă de F, la acest moment şi în acest loc. Integrala de suprafaţă trebuie determinată la un anumit moment t. Adică, valorile folosite pentru intensitatea cîmpului sînt măsurate simultan de observatorii răspîndiţi pe întreaga suprafaţă S. (Întrucît suprafaţa S este fixă în sistemul de referinţă F, nu apar dificultăţi.) Să notăm integrala de suprafaţă pe S, la momentul t, prin

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \tag{2}$$

Cantitatea de sarcină, din interiorul suprafeţei S, este determinată de valoarea integralei:

$$Q = \varepsilon_0 \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{3}$$

Ar fi surprinzător ca valoarea lui Q, astfel determinată, să depindă de dimensiunile şi forma suprafeţei S. Conform legii lui Gauss — pentru o sarcină în repaus, ea nu depinde. Dar putem noi fi siguri că legea lui Gauss este valabilă şi pentru sarcinile în mişcare? Din fericire, da. O putem lua ca pe un fapt dovedit experimental. Această proprietate fundamentală a cîmpului electric a sarcinilor în mişcare ne permite să definim sarcina din ec. (3). De acum înainte, vom putea vorbi de sarcina ce se găseşte într-o regiune sau pe o particulă şi înţelesul va fi bine determinat chiar dacă sarcina este în mişcare.

Toate aceste afirmaţii sînt ilustrate în figura 5.5. Sînt reprezentaţi doi protoni şi doi electroni în mişcare, la un anumit moment. Este bine stabilit că integrala de suprafaţă pe suprafaţa S_1, din intensitatea cîmpului electric **E**

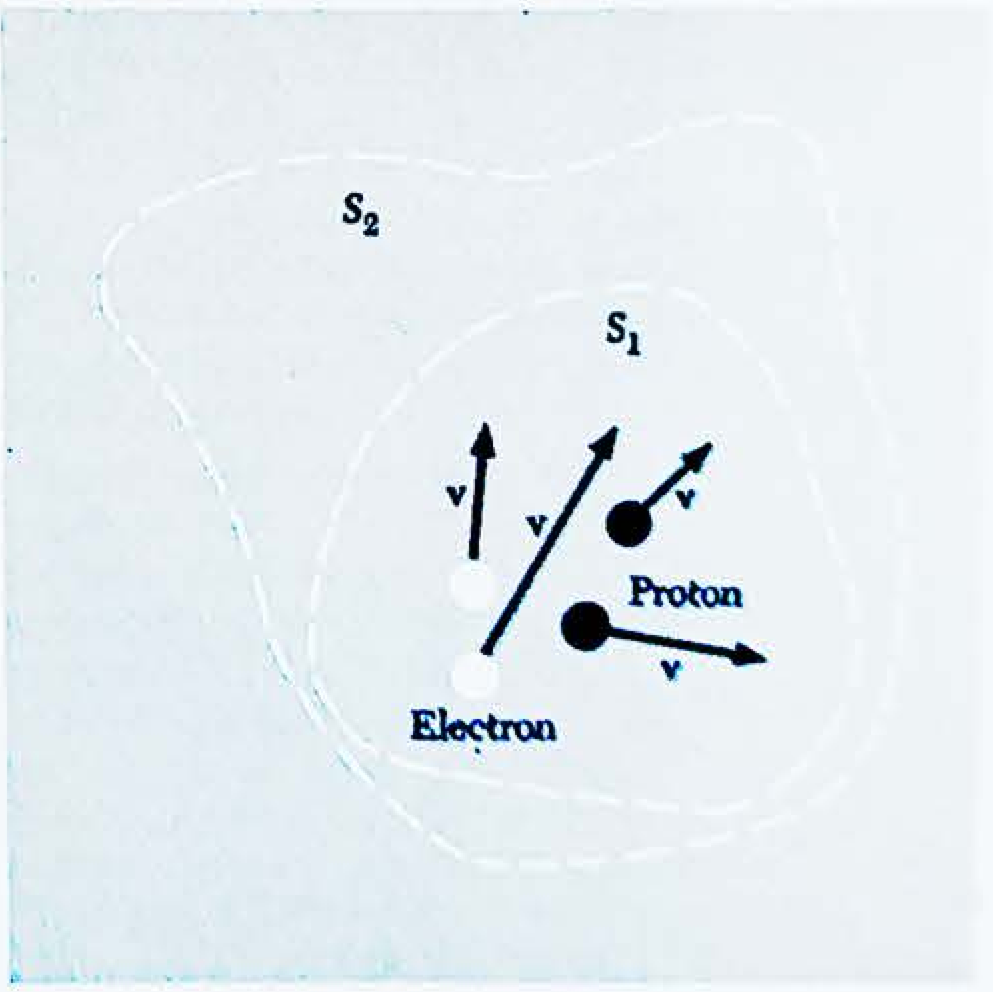


Fig. 5.5. Legea lui Gauss rămîne valabilă pentru cîmpul sarcinilor în mişcare. Fluxul lui **E** prin S_2 este egal cu fluxul lui **E** prin S_1, evaluate în acelaşi moment de timp.



Fig. 5.6. Depinde fluxul lui **E** prin S de starea de mişcare a particulelor încărcate? Este integrala de suprafaţă pe suprafaţa S din **E**, aceeaşi ca în figura 5.5? Aici particulele sînt legate într-o moleculă de hidrogen.

este identic egală cu integrala de suprafaţă pe suprafaţa S_2, evaluată la acelaşi moment şi că pentru determinarea sarcinii totale cuprinse în interiorul acestei regiuni, putem folosi această integrală aşa cum în electrostatică, foloseam întotdeauna teorema lui Gauss. Figura 5.6 ridică o nouă problemă. Ce se întîmplă dacă aceleaşi particule ar avea alte viteze? Să presupunem, de exemplu, că cei doi protoni şi cei doi electroni se combină formînd o moleculă de hidrogen. Sarcina totală va mai fi aceeaşi ca înainte?

5.4. INVARIANŢA SARCINII

Este dovedit experimental că sarcina totală într-un sistem nu este schimbată de mişcarea purtătorilor de sarcină. Sîntem atît de obişnuiţi cu asta încît rareori mai reflectăm cît de remarcabil şi fundamental este acest fapt. Ca dovadă putem folosi neutralitatea electrică a atomilor şi moleculelor.

În cap. I am descris experienţa care pune în evidenţă neutralitatea moleculei de hidrogen şi din care rezultă, cu o precizie de cel puţin 10^{-20}, că sarcinile purtate de electron şi proton sînt egale în mărime. Analog, s-a efectuat o experienţă cu atomi de heliu. Atomul de heliu conţine aceleaşi particule încărcate ca şi molecula de hidrogen — doi protoni şi doi electroni. În atomul de heliu, însă, mişcarea lor este cu totul alta. Protonii, de exemplu, în loc să se dispună lent la distanţa de 0,7 Å unul de altul, sînt strîns legaţi în nucleul de heliu, în care se mişcă avînd o energie cinetică de aproximativ un milion de electron-volţi. Dacă mişcarea ar avea vreun efect asupra mărimii sarcinii, atunci n-ar mai exista o perfectă compensaţie a sarcinilor nucleului şi electronilor atît în molecula de hidrogen cît şi în atomul de heliu. De fapt, s-a demonstrat experimental, aproape cu aceeaşi precizie, că atomul de heliu este neutru.

O altă dovadă este legată de spectrul optic al izotopilor aceluiaşi element — atomi cu nuclee de mase diferite dar cu aceleaşi sarcini. Aici, intîlnim din nou o deosebire netă la mişcarea protonilor în nucleu, dar comparînd liniile spectrale a celor doi izotopi nu observăm nici o diferenţă care ar putea fi atribuită unei diferenţe cît de mici în sarcina totală a nucleului.

În acelaşi sens, masa nu este invariantă. Ştim că masa unei particule în mişcare variază de $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ori. Pentru a sublinia această diferenţă, în figura 5.7 este reprezentată o experienţă imaginară. Cele două particule masive încărcate din cutia din dreapta, fixate la capetele barei, sînt puse în mişcare cu viteza v. Masa totală a sistemului din dreapta este mai mare

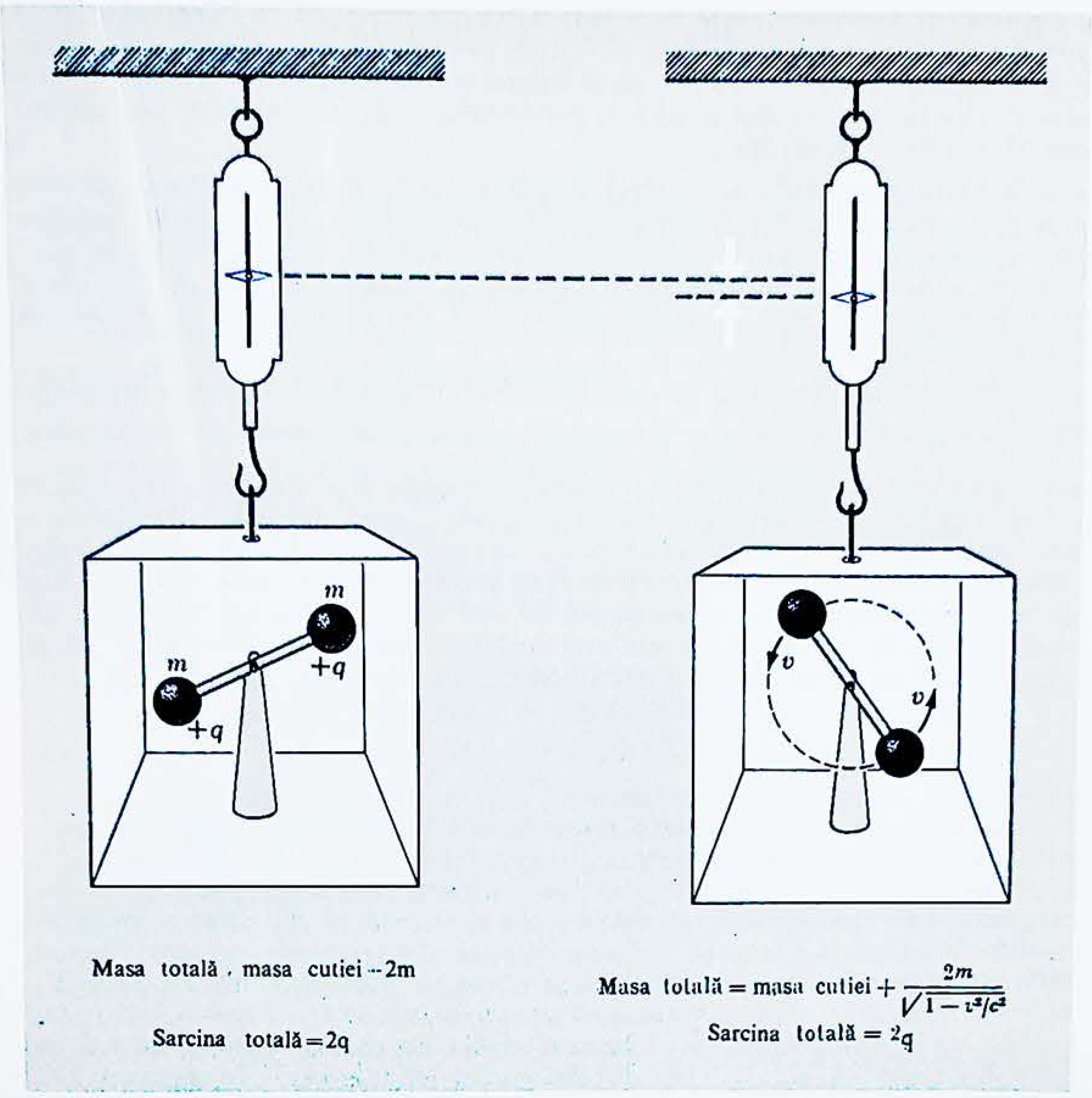


Fig. 5.7. O experiență imaginară pentru a demonstra invarianța sarcinii. Sarcina electrică din cutie poate fi determinată prin măsurarea cîmpului din jurul cutiei sau, ceea ce este același lucru, măsurînd forța exercitată asupra unei sarcini de probă aflată la o anumită distanță.

ca masa din stînga, ceea ce se poate constata fie atîrnînd cutia de un resort, fie măsurînd forța necesară pentru a o accelera.*

Totuși, sarcina electrică totală rămîne neschimbată. O experiență reală, echivalentă cu aceasta, poate fi făcută cu un spectrograf de masă, care poate pune ușor în evidență diferența de masă dintre o moleculă de deuteriu ionizată (2 protoni, 2 neutroni, 1 electron) și un atom de heliu ionizat (tot 2 protoni,

* Diferența între mase depinde nu numai de energia cinetică a particulelor, ci și de orice schimbări în energia potențială, de exemplu, de deformarea elastică a barei de care sînt prinse particulele. Dacă bara este perfect rigidă, această contribuție este mică în comparație cu termenul ce conține pe v^2/c^2. Încercați să arătați de ce.

2 neutroni și 1 electron). Acestea sînt două structuri foarte diferite, în care particulele componente se mișcă cu viteze foarte diferite. Diferența în energiile ambelor sisteme se relevă ca o diferență măsurabilă de masă. În sarcina electrică a celor doi ioni, nici măsurătorile de foarte mare precizie nu detectează vreo diferență.

Această invarianță a sarcinii prezintă o deosebită importanță pentru cuantificarea ei. În cap. I am subliniat importanța și curiozitatea faptului că sarcinile tuturor particulelor elementare încărcate sînt egale în mărime. Observăm acum, că această egalitate se păstrează nu numai pentru cazul cînd două particule sînt în repaus una față de alta ci și pentru orice stare de mișcare relativă.

Experiențele descrise și multe altele demonstrează că valoarea integralei de suprafață din teorema lui Gauss $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$, *depinde numai de numărul și tipul particulelor încărcate din interiorul suprafeței S și nu de modul cum se mișcă.* Conform postulatului teoriei relativității, dacă această afirmație este adevărată într-un sistem de referință inerțial, ea trebuie să fie valabilă pentru orice alt sistem de referință inerțial. Prin urmare, dacă F' este un alt sistem de referință inerțial, ce se mișcă în raport cu F și S' este o suprafață închisă care la momentul t' cuprinde aceleași corpuri încărcate în sistemul F' ca și suprafața S la momentul t, atunci trebuie ca

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}'. \tag{4}$$

Intensitatea cîmpului $\mathbf{E}'$ este, bineînțeles, măsurată în F', adică este definită prin forța ce acționează asupra unei sarcini de probă aflată în repaus în F'. Nu trebuie să pierdem din vedere diferența dintre t și t'. După cum știm, evenimente care sînt simultane în F, pot să nu fie simultane în F'. Fiecare din integralele de suprafață din ec. (4) trebuie să fie calculată pentru un anumit timp în sistemul de referință respectiv. Dacă sarcinile se găsesc la limita lui S sau S', trebuie să ne convingem că în interiorul suprafeței S la momentul t, se găsesc aceleași sarcini ca cele din interiorul suprafeței S', la momentul t'. Dacă sarcinile se află destul de departe de suprafața ce le delimitează, ca în figura 5.8 ce ilustrează relația (4), nu se pune această problemă.

Ecuația (4) este exprimarea formală a invarianței relativiste a sarcinii. Suprafața gaussiană o putem alege în orice sistem de referință inerțial, rezultatul integralei de suprafață este un număr independent de sistemul de referință. Aceasta

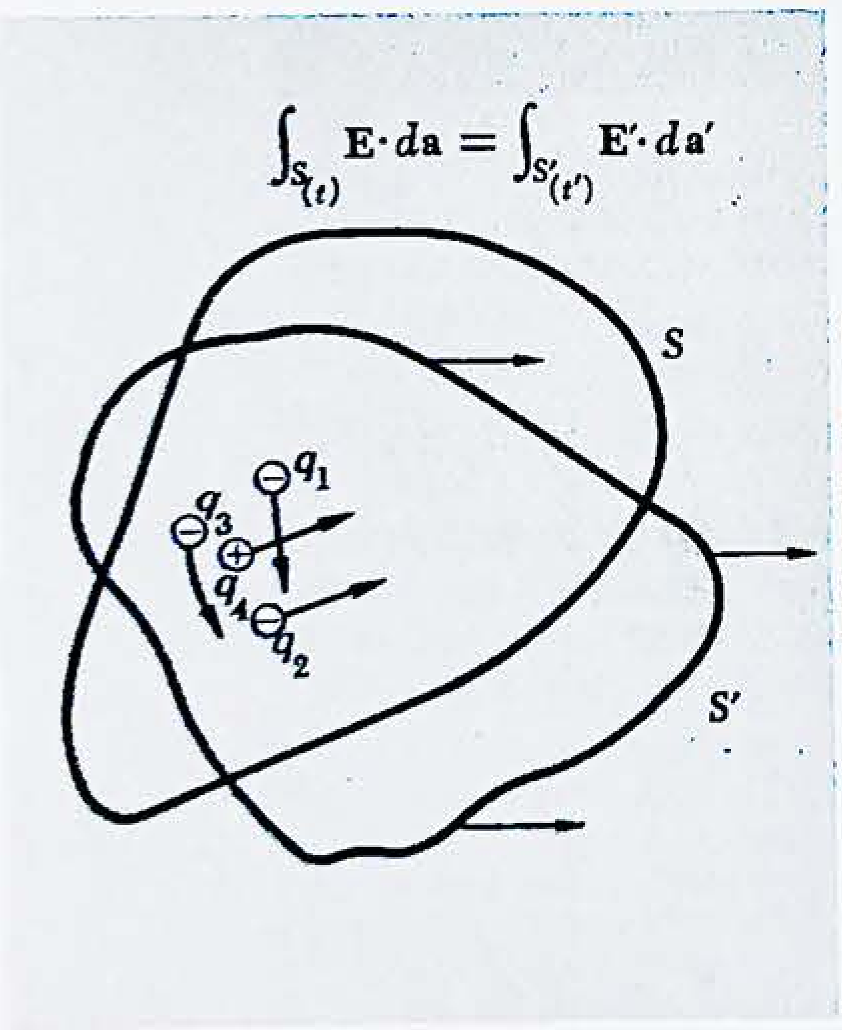


Fig. 5.8. Integrala de suprafață din E pe suprafața S este egală cu integrala din E' pe suprafața S'. Sarcina este aceeași în toate sistemele de referință.

nu este echivalentă cu conservarea sarcinii, pe care am discutat-o în cap. 4 şi care se exprimă matematic prin ecuaţia

$$\mathrm{div}\ \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Conservarea sarcinii înseamnă că dacă luăm o suprafaţă închisă într-un sistem de coordonate oarecare, ce conţine o cantitate oarecare de substanţă încărcată şi dacă nici o particulă nu trece prin suprafaţă, atunci sarcina totală din interiorul acestei suprafeţe rămîne constantă.

Invarianţa sarcinii înseamnă că dacă separăm o parte de substanţă din oricare alt sistem de referinţă, cantitatea de sarcină măsurată va fi exact aceeaşi. Energia se conservă dar ea nu este un invariant relativist. Sarcina se conservă şi este un invariant relativist. În limbajul teoriei relativiste, energia este o componentă a unui vector cuadri-dimensional, în timp ce sarcina este un scalar, un număr invariant la transformarea Lorentz. Acesta este un fapt experimental cu extinse implicaţii. El determină complet natura cîmpului sarcinilor în mişcare.

5.5. CÎMPUL ELECTRIC MĂSURAT ÎN DIFERITE SISTEME DE REFERINŢĂ

Dacă sarcina este invariantă la transformarea Lorentz, intensitatea cîmpului electric **E** se transformă într-un mod bine determinat. A transforma pe **E** înseamnă a rezolva următoarea problemă. Dacă un observator, aflat într-un sistem de referinţă oarecare F, măsoară intensitatea cîmpului electric **E** de atîţia şi atîţia V/m, într-un punct dat din spaţiu şi la un moment dat, ce intensitate a cîmpului va măsura observatorul, în punctul de aceleaşi coordonate ale spaţiului şi timpului, într-un alt sistem de referinţă inerţial F'? Pentru un anumit tip de cîmpuri, se poate răspunde la această întrebare folosind teorema lui Gauss aplicată unor sisteme simple.

În sistemul de referinţă F (fig. 5.9, *a*) se găsesc două straturi fixe, uniform încărcate, cu densitatea superficială de sarcină $+\sigma$ şi respectiv, $-\sigma$ C/m^2. Ele reprezintă două pătrate cu latura de b cm, paralele la planul xy, iar distanţa dintre ele se consideră mică în raport cu dimensiunile lor astfel încît, cîmpul dintre ele poate fi considerat uniform. Intensitatea cîmpului, măsurată de un observator aflat în F este, bineînţeles, egală cu σ/ε_0. Să considerăm că un sistem inerţial F' se mişcă spre stînga faţă de F, cu viteza **v**. Pentru un observator aflat în F' „pătratele" încărcate nu mai sînt pătrate. Pe direcţia x' latura lor se micşorează de la b la $b\sqrt{1-\beta^2}$, unde cu β am notat, ca de obicei, raportul v/c. Dar sarcina totală este invariantă, adică este independentă de sistemul de referinţă şi ca urmare, densitatea de sarcină măsurată în F' va fi mai mare decît σ cu $1/\sqrt{1-\beta^2}$. În figura 5.9 sistemul este reprezentat în secţiune, văzut în F (*b*) şi văzut în F' (*c*). Ce putem spune despre cîmpul electric din F', dacă tot ce ştim despre cîmpul electric al sarcinilor în mişcare este conţinut în ec. (4)?

În primul rînd, putem fi siguri că cîmpul electric în afara „sandwich"-ului este nul şi uniform între straturi, cel puţin la limită, cînd suprafeţele tind către infinit. Cîmpul unui strat uniform, infinit nu depinde nici de distanţa

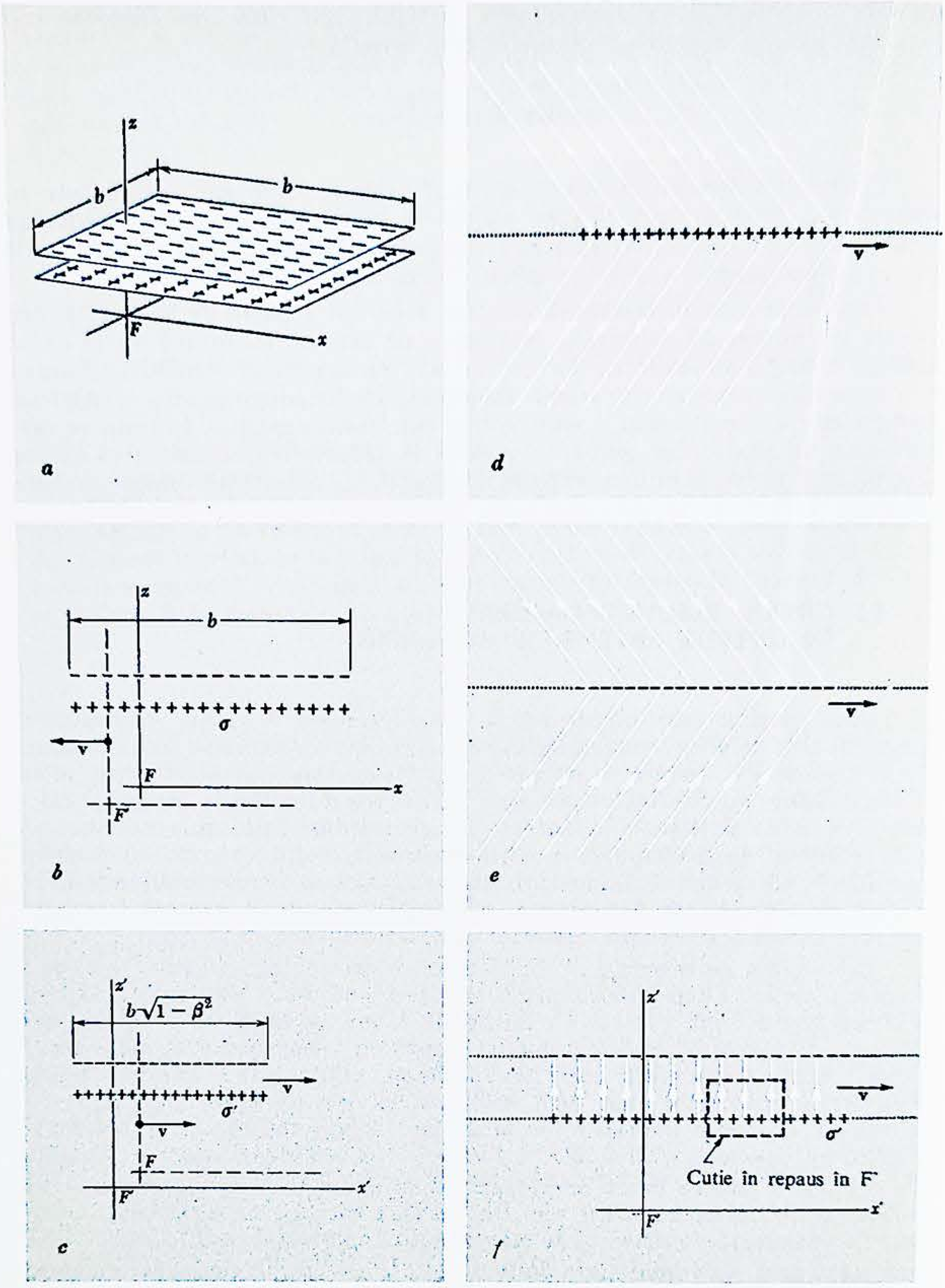


Fig. 5.9. Cum arată cîmpul electric într-un alt sistem de referinţă (viteza relativă este perpendiculară pe direcţia cîmpului). *a)* Două straturi uniform încărcate, aflate în repaus. *b)* Secţiune transversală a sistemului văzută în sistemul de referinţă *F*. *c)* Secţiune transversală a sistemului văzută în sistemul de referinţă *F'*. *d)* Aspectul ipotetic al cîmpului unui singur strat de sarcini pozitive. *e)* Aspectul ipotetic al cîmpului unui strat de sarcini negative. *f)* Superpoziţia cîmpurilor din *(d)* şi *(e)*.

pînă la strat, nici de poziția punctului de-a lungul stratului. (Nimic în sistem nu permite stabilirea unei distanțe sau poziții; dacă cîmpul ar varia după o lege exponențială, ca în cazul unei sarcini punctiforme sau liniare, atunci, pe strat, ar tinde către infinit.) Totuși, putem presupune* că cîmpul unui singur strat de sarcini pozitive, aflat în mișcare, poate arăta ca cel din figura 5.9, *d*. Dar dacă este așa, atunci cîmpul unui strat de sarcini negative va arăta ca cel din figura 5.9, *e*, iar compunerea celor două va da un cîmp ca cel reprezentat în figura 5.9, *f*.

Putem aplica legea lui Gauss unei cutii aflate în repaus în sistemul F', a cărei secțiune transversală este arătată în figura 5.9, *f*. Cantitatea de sarcină este determinată de σ, iar cîmpul în exterior este nul. Conform legii lui Gauss, mărimea lui E'_z — care este singura componentă a cîmpului din interior, trebuie să fie egală cu σ'/ε_0 sau $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} / \sqrt{1-\beta^2}$.

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma E_z. \tag{5}$$

(Pentru factorul $1/\sqrt{1-\beta^2}$, vom folosi adeseori notația γ, introdusă în vol. I, cap. 11, ec. (13) care simplifică mult expresiile. Să reținem că întotdeauna $\gamma \geqslant 1$.)

Să ne imaginăm acum, o situație diferită în care straturile încărcate se află în repaus în sistemul F și sînt orientate perpendicular pe axa x, ca în figura 5.10. Observatorul din F ne comunică că intensitatea cîmpului pe direcția lui x este $E_x = \sigma/\varepsilon_0$. În acest caz, densitatea de sarcină, observată în sistemul F' este *aceeași* cu cea observată în F. Straturile nu s-au contractat, doar distanța dintre ele s-a micșorat, dar ea nu intervine în determinarea cîmpului. De astă dată, aplicînd legea lui Gauss cutiei aflate în repaus în F', găsim:

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_x. \tag{6}$$

Toate acestea sînt foarte adevărate pentru distribuția simplă de sarcini aleasă; dar sînt oare concluziile noastre general valabile? Această întrebare ne introduce în miezul noțiunii de *cîmp*. Dacă intensitatea cîmpului electric **E**, într-un punct de coordonate spațiu-timp, are un înțeles bine determinat, atunci **E**, determinat într-un punct de aceleași coordonate spațiu-timp, dar într-un alt sistem de referință, nu poate depinde de natura surselor ce produc cîmpul, oricare ar fi acestea. Cu alte cuvinte, un observator aflat în F, care măsoară cîmpul din vecinătatea sa, la un anumit moment, trebuie să poată prezice, *pe baza acestor măsurători*, ce măsoară alți observatori, aflați în alte sisteme de referință, într-un punct ce are aceleași coordonate spațiu-timp. Dacă n-ar fi așa, noțiunea de cîmp ar fi inutilă. Demonstrarea acestei afirmații reprezintă confirmarea concordanței dintre teoria cîmpului construită de noi și experiență.

---

* Să ne reamintim că, în sistemul F', acest strat de sarcini se mișcă; încă nu avem garanția că cîmpul creat de el va fi la fel cu cel creat de un strat aflat în repaus. De fapt, reiese că cîmpul electric al unui strat de sarcini în mișcare este perpendicular pe strat, total diferit de cîmpurile ipotetice din figura 5.9, *d* și *e*.

Privite în această lumină, relațiile exprimate de ecuațiile (5) și (6) capătă o semnificație mult mai largă decît în cazul particular al sarcinilor distribuite pe straturi paralele. Să considerăm o distribuție *oarecare* de sarcini, fiecare porțiune aflîndu-se în repaus în raport cu sistemul F. Dacă un observator din F măsoară pe direcția z, intensitatea cîmpului E_z, atunci un observator din F' va obține, pentru un punct de aceleași coordonate spațiu-timp, intensitatea cîmpului $E'_z = \gamma E_z$. Adică în urma măsurării lui E'_z el va obține un număr, care este mai mare decît numărul obținut de observatorul din F pentru E_z, cu un factor γ. Pe de altă parte, dacă observatorul din F măsoară intensitatea cîmpului E_x pe direcția x — direcția vitezei cu care F' se mișcă față de F, atunci observatorul din F' comunică o intensitate E'_x *egală* cu E_x. Evident, direcțiile y și z sînt echivalente, ambele fiind perpendiculare pe viteza **v**. Tot ce-am spus pentru E'_z este valabil și pentru E'_y. Oricare ar fi direcția lui **E** în sistemul F, o putem considera ca rezultanta intensităților de pe direcțiile x, y și z și din transformarea fiecărei componente să putem calcula vectorul intensitate **E**′ în același punct din F'. Să sintetizăm acestea astfel încît să fie valabile pentru mișcarea relativă în *orice* direcție: Sarcinile aflate în repaus în sistemul F constituie sursa cîmpului **E**. Fie sistemul F' care se mișcă cu viteza **v** față de F. Într-un punct oarecare din F, descompunem cîmpul **E** într-o componentă longitudinală $E_\parallel$, paralelă cu **v** și o componentă transversală $E_\perp$, perpendiculară pe direcția lui **v**. În punctul de aceleași coordonate spațiu-timp din sistemul F', cîmpul **E**′ va fi descompus în $E'_\parallel$ și $E'_\perp$, $E'_\parallel$ fiind paralel cu **v** și $E'_\perp$ perpendicular pe ea. Am arătat că

$$\boxed{\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel \\ E'_\perp &= \gamma E_\perp \end{aligned}} \tag{7}$$

Concluzia noastră este valabilă doar pentru cîmpurile sarcinilor ce se află în repaus în F. Curînd vom vedea că dacă sarcinile se mișcă în F, pentru a putea pre-

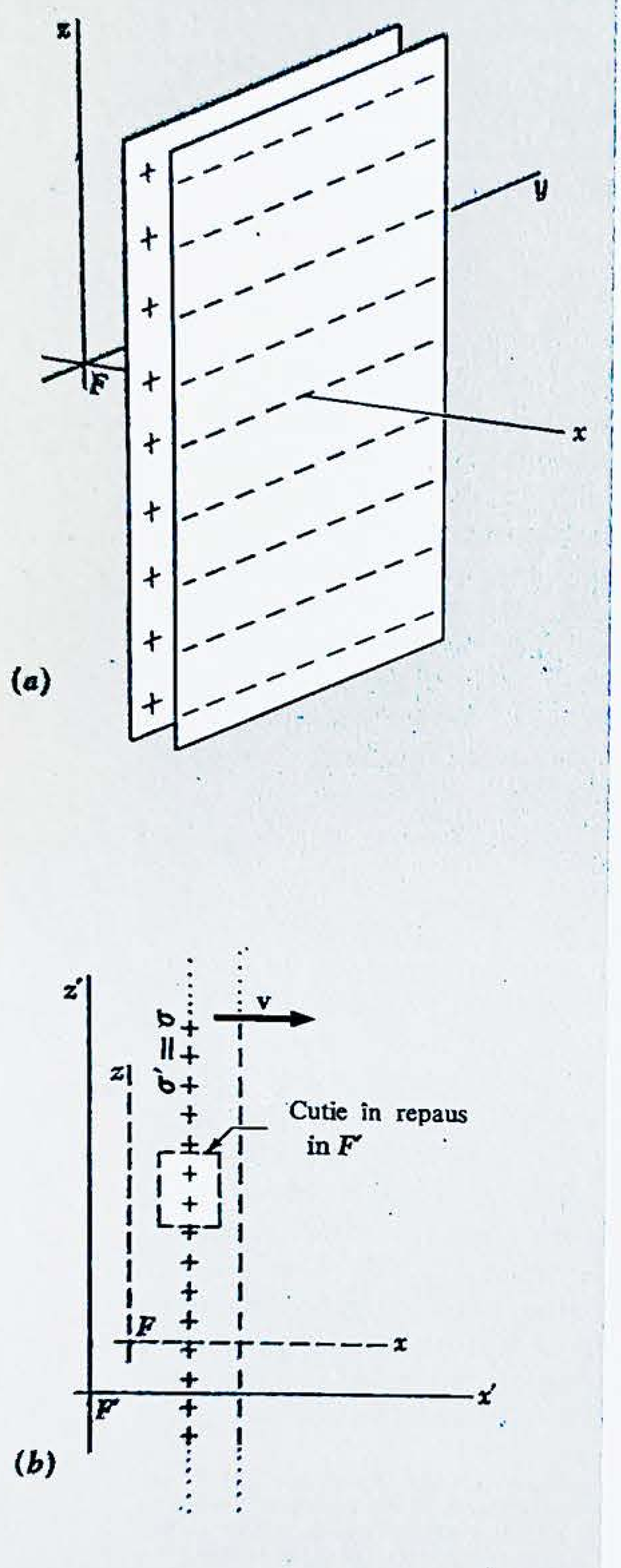


Fig. 5.10. Cîmpul electric într-un alt sistem de referință (viteza relativă este paralelă cu cîmpul): *a)* în sistemul de referință F. *b)* Secțiune transversală în sistemul de referință F'.

vedea cîmpul din F', trebuie cunoscute *două* cîmpuri în F — electric şi magnetic. Deocamdată, am obţinut un rezultat util, care ne este suficient oricînd avem de-a face cu sisteme de referinţă inerţiale în care toate sarcinile se găsesc în repaus. Vom folosi acest rezultat pentru a studia cîmpul electric al unei sarcini punctiforme ce se mişcă cu viteză constantă.

5.6. CÎMPUL UNUI PURTĂTOR PUNCTIFORM DE SARCINĂ CE SE MIŞCĂ CU VITEZĂ CONSTANTĂ

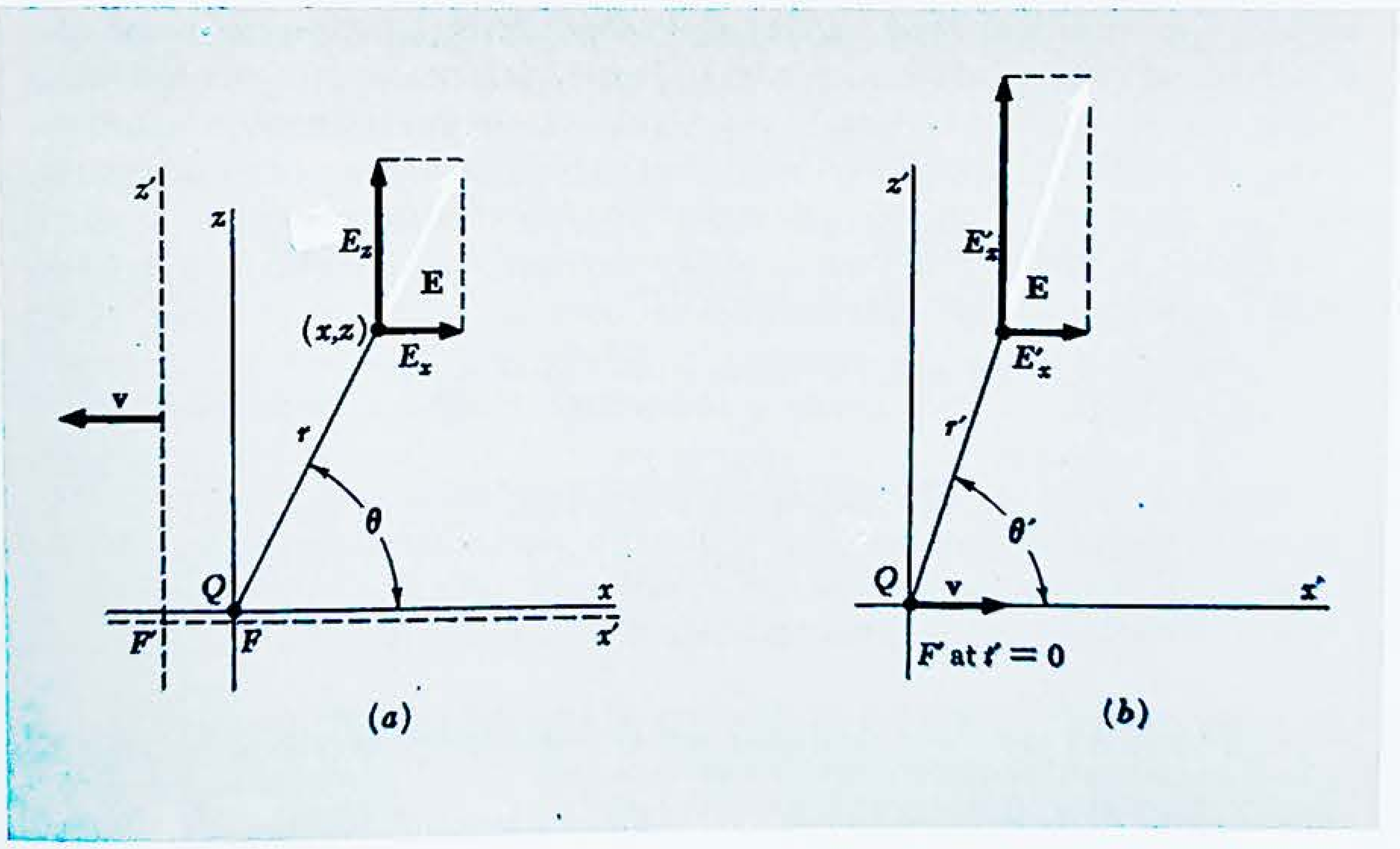
Purtătorul de sarcină punctiform Q se află în repaus în originea sistemului de coordonate F (fig. 5.11, *a*). Intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ în fiecare punct este Q/r^2 şi este îndreptată radial dinspre sarcină spre exterior. În planul xz, în orice punct (x, z) componentele sale sînt

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}},$$
$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (8)$$

Fie ca sistemul F' să se mişte în sensul negativ al axei x, cu viteza v. Relaţiile dintre coordonatele unui eveniment sau coordonatele spaţiu-timp a două puncte, în cele două sisteme de referinţă sînt următoarele:

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right). \qquad (9)$$

Fig. 5.11. Cîmpul electric al unei sarcini punctiforme:
a) într-un sistem în care sarcina este în repaus;
b) într-un sistem în care sarcina se mişcă cu viteză constantă.



Aceasta este transformarea Lorentz, dată în vol. I, cap. 11, ec. (15). Semnul minus din aceste ecuații apare datorită faptului că, privit din F, sistemul F' se mișcă în sensul negativ al axei x. Ceasurile au fost puse la zero cînd punctele $x = 0$ și $x' = 0$ coincid.

Conform ecuațiilor (5) și (6), $E'_z = \gamma E_z$ și $E'_x = E_x$. Folosind ecuațiile (8) și (9), putem exprima componentele E'_z și E'_x în funcție de coordonatele sistemului F'. Pentru momentul $t' = 0$, cînd Q trece prin originea sistemului de coordonate F', avem:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x = \frac{\gamma Q x'}{4\pi\varepsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}}, \\
E'_z &= E_z = \frac{\gamma Q z'}{4\pi\varepsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Înainte de toate, să observăm că $E'_z/E'_x = z'/x'$. Asta înseamnă că vectorul $\mathbf{E}'$ formează cu axa x' același unghi ca și vectorul $\mathbf{r}'$. Prin urmare, vectorul $\mathbf{E}'$ este îndreptat radial, prin exterior, de-a lungul dreptei ce trece prin poziția instantanee a lui Q, ca în figura 5.11, *b*. Reflectați o clipă asupra acestei concluzii! Înseamnă că dacă sarcina Q trece prin originea sistemului notat cu „prim", la ora 12^{00} fix (timpul „prim"), un observator, care staționează undeva în sistemul „prim", raportează că la ora 12^{00} în vecinătatea sa, intensitatea cîmpului electric era îndreptată după direcția razei din originea sistemului. La prima vedere, asta aduce cu o transmitere instantanee de informație! Cum poate ști un observator, aflat la o distanță de o milă, unde se găsește particula în acest moment? Efectiv, nu poate. Dar nu despre asta era vorba. Reamintiți-vă că această particulă se mișca dintotdeauna cu viteză constantă și după „orarul ei de zbor" trebuia să treacă la amiază prin originea sistemului de coordonate. Această informație rămînea valabilă multă vreme. Dacă ne referim la cauză și efect, cîmpul observat este determinat de istoria trecutului particulei. Vom vedea în curînd, ce se întîmplă cînd în orarul de zbor apare o schimbare neprevăzută.

Pentru a găsi intensitatea cîmpului, calculăm $E'^2_x + E'^2_z$ care este egală cu pătratul intensității cîmpului, E'^2.

$$
\begin{aligned}
E'^2 = E'^2_x + E'^2_z &= \frac{\gamma Q^2(x'^2 + z'^2)}{4\pi\varepsilon_0[(\gamma x')^2 + z'^2]^3} = \\
&= \frac{Q^2(x'^2 + z'^2)}{4\pi\varepsilon_0\gamma^4(x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2)^3} = \\
&= \frac{Q(1 - \beta^2)^2}{4\pi\varepsilon_0(x'^2 + z'^2)^2\left(1 - \dfrac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(Aici, folosirea lui β „curăță" expresia.) Fie r', distanța de la sarcina Q — ce se găsește la momentul dat în origine — la un punct (x', z'), în care se măsoară intensitatea cîmpului $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$. Fie θ', unghiul dintre această rază

vectoare şi viteza sarcinii Q care se mişcă în sensul pozitiv al axei x', în sistemul F'. Întrucît $z' = r' \sin \theta'$, intensitatea cîmpului poate fi scrisă sub forma:

$$E' = \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r'^2(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \cdot \tag{12}$$

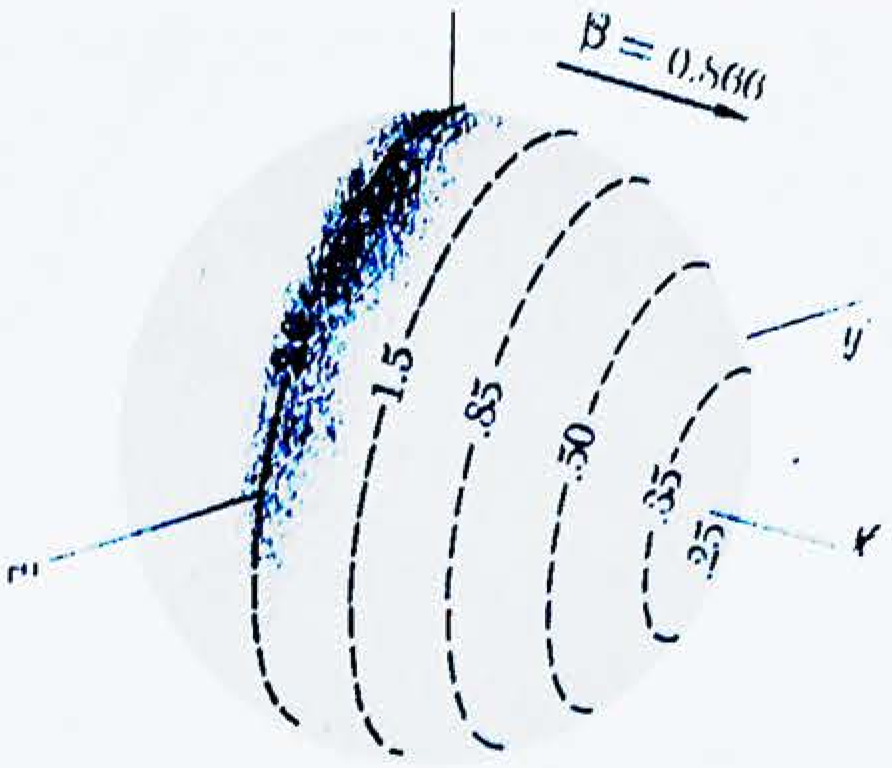


Fig. 5.12. Intensitatea cîmpului unei sarcini în mişcare, în diferite direcţii. În acest moment sarcina trece prin originea sistemului de referinţă x', y', z'. Numerele reprezintă raportul dintre intensitatea cîmpului şi mărimea Q/r'^2.

Originea sistemului de coordonate a fost aleasă arbitrar, iar planul $x'z'$ nu se deosebeşte cu nimic de celelalte plane ce trec prin axa x'. Prin urmare, putem generaliza afirmaţia că, cîmpul electric al unei sarcini în mişcare uniformă, la un moment dat de timp, este îndreptat radial, pornind de la poziţia instantanee a sarcinii, în timp ce mărimea lui este dată de ec. (12), în care θ' este unghiul dintre direcţia de mişcare a sarcinii şi raza vectoare de la poziţia instantanee a sarcinii pînă la punctul de observaţie.

Pentru viteze mici, expresia intensităţii cîmpului se reduce la $E' \approx \approx Q/4\pi\varepsilon_0 r'^2$ şi practic, la orice moment, este acelaşi cu cîmpul unei sarcini aflate în repaus în F', în punctul în care se găseşte Q în acel moment. Dar dacă β^2 nu este neglijabil, cîmpul este mai intens în direcţia perpendiculară pe direcţia mişcării decît în direcţia mişcării, la aceeaşi distanţă de sarcină. Dacă am reprezenta intensitatea cîmpului, aşa cum se obişnuieşte, prin densitatea liniilor de forţă, liniile tind să se concentreze într-un disc perpendicular pe direcţia mişcării. În figura 5.12 este arătată densitatea liniilor de forţă provenite de la o sarcină ce se mişcă pe direcţia x', cu viteza $v/c = 0{,}866$, în punctele în care ele intersectează suprafaţa unei sfere unitate. O reprezentare mai simplă a cîmpului este dată în figura 5.13 în care este redată o secţiune a cîmpului şi cîteva linii de cîmp aflate în planul $x'z'$*.

Acest cîmp electric are proprietăţi remarcabile. El nu prezintă simetrie sferică, ceea ce nu este de mirare, întrucît în acest sistem de referinţă există o direcţie preferată — direcţia de mişcare a sarcinii. De asemenea, acest cîmp nu poate fi produs de nici o distribuţie staţionară de sarcini, indiferent de

* Într-o diagramă *bidimensională* ca cea din figura 5.13, este imposibilă reprezentarea corectă a intensităţii cîmpului prin densitatea liniilor de forţă. Chiar dacă n-am întrerupe arbitrar cîteva linii, densitatea liniilor din figură va scădea proporţional cu $1/r'$, iar intensitatea cîmpului, pe care ne străduim s-o reprezentăm, scade proporţional cu $1/r'^2$; ca urmare, figura 5.13 dă numai o idee calitativă asupra variaţiei lui E' cu r' şi θ'.

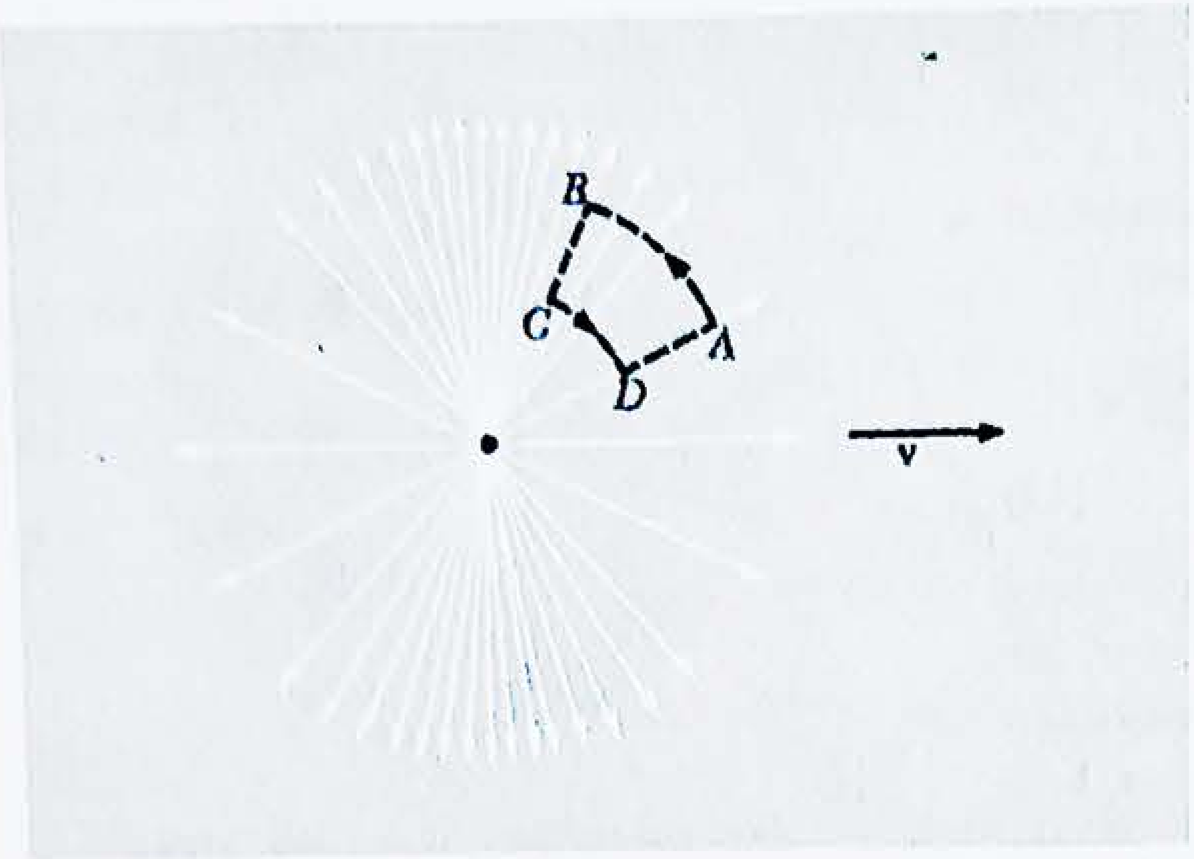


Fig. 5.13. O altă reprezentare a cîmpului unui purtător de sarcină aflat în mișcare uniformă.

forma pe care ar avea-o. Din această cauză, în acest cîmp integrala de linie din **E**' este *diferită de zero* pe orice drum închis. Să luăm, de exemplu, drumul închis $ABCD$ din figura 5.13. Arcele circulare nu aduc nici o contribuție la integrala de linie, ele fiind perpendiculare pe cîmp; pe porțiunile radiale, cîmpul în lungul lui BC este mai intens decît în lungul lui DA, astfel încît *circulația* din **E**' pe acest drum este diferită de zero. Dar nu uitați că acesta nu este un cîmp *electrostatic*. Întrucît sarcina sursă se mișcă în orice punct al sistemului F', intensitatea cîmpului electric **E**' variază în timp.

În figurile 5.14 și 5.15 se reprezintă cîmpul electric la momente de timp bine determinate, observat în sistemul de referință în care electronul se mișcă cu viteză constantă, în direcția axei x.* În figura 5.14, viteza electronului este 0,33 c și prin urmare, energia sa cinetică (vol. I, cap. 12) în jur de 30 000 eV (30 keV). Valoarea lui β^2 este 1/9 și cîmpul electric diferă puțin de cel al unei sarcini aflate în repaus. În figura 5.15, viteza este 0,8 c, corespunzînd unei energii cinetice de 335 keV. Dacă unitatea de timp, pentru fiecare diagramă, se ia $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ s, atunci distanțele vor fi reprezentate în „mărime naturală". Bineînțeles, diagrama este valabilă pentru orice particulă încărcată ce se mișcă cu viteza egală cu fracțiunea indicată din viteza luminii. Menționăm energiile echivalente pentru un electron, pentru a reaminti cititorului că vitezele relativiste nu sînt neobișnuite în laborator.

5.7. CÎMPUL UNUI PURTĂTOR DE SARCINĂ LA PORNIRE ȘI OPRIRE

Trebuie să ne fie clar că terminologia utilizată de *viteză constantă*, înseamnă o mișcare cu viteză constantă pe o dreaptă ce se întinde la infinit.

Ce se întîmplă dacă electronul, pînă a ajunge în cîmpul nostru vizual la momentul $t = 0$, n-ar fi parcurs o distanță mare pe axa x negativă? Să

* Pînă acum am notat cu „prim" sistemul în care sarcina se mișca. Acum, coordonatele din sistemul în care se mișcă sarcina, le vom nota cu x, y, z pentru a nu încărca relațiile ce urmează.

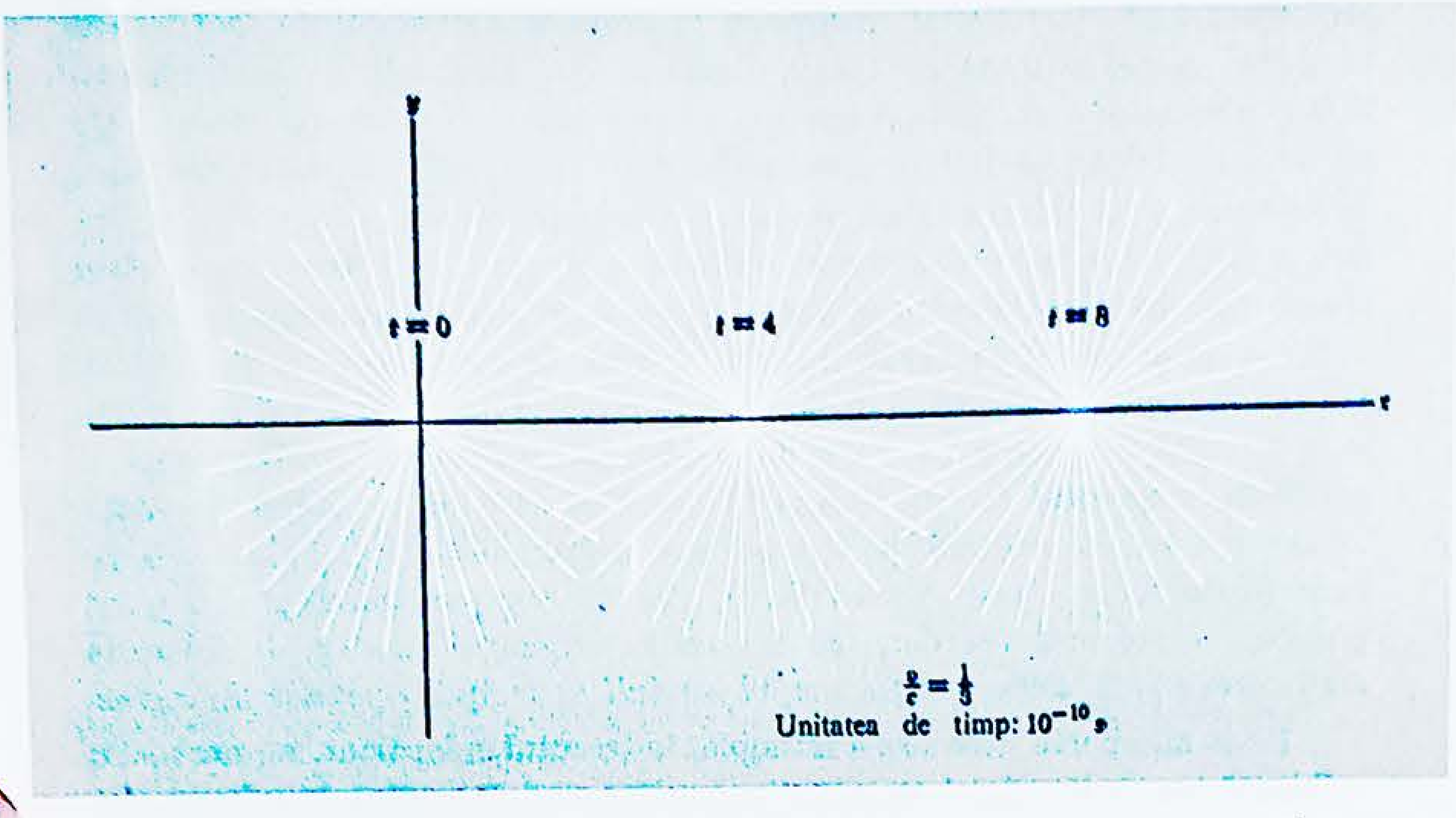
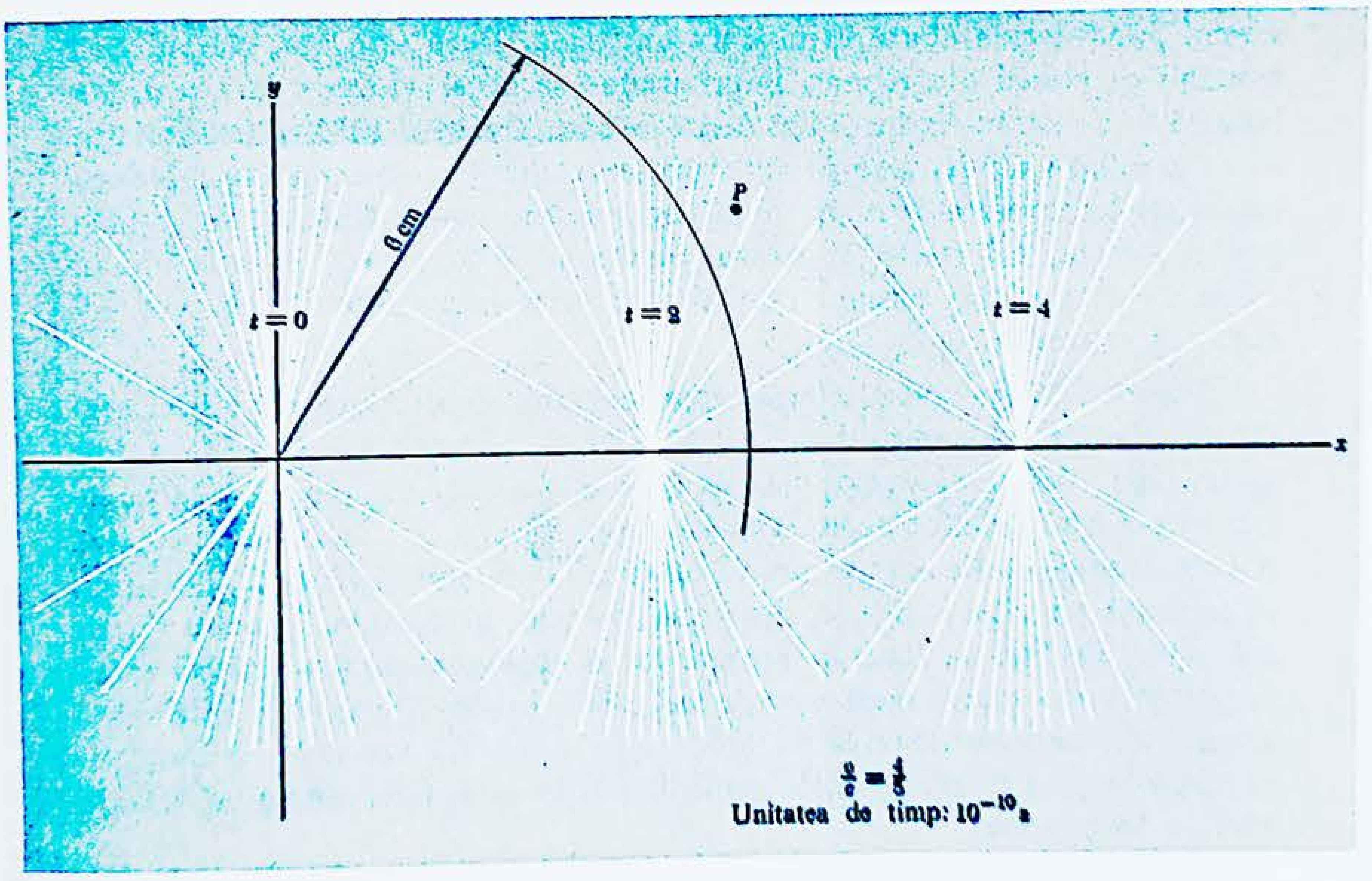


Fig. 5.14. Cîmpul electric al unui purtător de sarcină în mişcare în trei momente diferite de timp: $v/c = 1/3$.

Fig. 5.15. Cîmpul electric al unui purtător de sarcină în mişcare în trei momente diferite de timp: $v/c = 4/5$.



presupunem că s-ar fi aflat în repaus, în originea sistemului de coordonate, pînă cînd ceasul ar fi marcat $t = 0$. Exact înainte de $t = 0$, ceva ar fi imprimat electronului o accelerație mare, pînă la viteza v și el începe să se miște cu această viteză în lungul axei x pozitive. Începînd din acest moment, mișcarea sa ar fi aidoma mișcării electronului reprezentat în figura 5.15. Dar figura 5.15 nu este reprezentarea corectă a cîmpului electronului a cărui istorie am descris-o. Pentru a vedea de ce este așa, să studiem cîmpul în punctul notat cu P, la momentul $t = 2$, ceea ce corespunde la $2 \cdot 10^{-10}$ s. Un semnal luminos parcurge în acest timp 6 cm. Întrucît punctul se găsește la o distanță mai mare de 6 cm de origine, nu putem ști că electronul a pornit la momentul $t = 0$! Numai în cazul în care nu există o flagrantă încălcare a teoriei relativității (iar noi am fundamentat întreaga discuție pe baza postulatelor teoriei relativității), cîmpul din punctul P și din toate punctele aflate în afara sferei cu centrul în origine și cu raza de 6 cm, la momentul $t = 2$, *trebuie să fie cîmpul sarcinii ce se află în repaus în origine.*

Pe de altă parte, ceea ce s-a întîmplat în trecutul îndepărtat, nu are nici o influență asupra imediatei vecinătăți a purtătorului de sarcină în mișcare. La momentul $t = 2$, pe măsura îndepărtării de sarcină, cîmpul se va schimba, trecînd de la cîmpul reprezentat în a doua diagramă a figurii 5.15, la cîmpul unei sarcini aflate în origine. Mai mult decît atît nu putem spune, dacă nu știm cît de rapid se răspîndesc „noutățile". Să presupunem că se răspîndesc cu viteza maximă, fără a intra în conflict cu postulatele teoriei relativității. Atunci, dacă neglijăm intervalul în care s-a produs accelerarea, ne putem aștepta ca cîmpul din interiorul sferei de 6 cm, la $t = 2$, să fie cîmpul unei sarcini punctiforme aflate în mișcare uniformă. Dacă este așa, cîmpul electronului ce pleacă din repaus, imprimîndu-i-se brusc viteza v la $t = 0$, trebuie să arate ca în figura 5.16. Apare o pătură sferică subțire (a cărei grosime, în cazul real, depinde de durata intervalului de accelerare), în interiorul căreia are loc trecerea de la un tip de cîmp la altul. Această pătură se extinde, pur și simplu, cu viteza c, centrul ei rămînînd în $x = 0$. Săgețile de pe liniile de cîmp indică sensul cîmpului cînd sursa este o sarcină negativă, așa cum am considerat.

Figura 5.17 ilustrează cîmpul unui electron ce se mișca cu viteză constantă *pînă* la momentul $t = 0$, cînd a atins punctul $x = 0$, unde a fost *oprit* brusc. Vestea despre oprirea sa nu poate ajunge, în timpul t, în punctele aflate mai departe decît ct de origine. Cîmpul, în afara sferei de rază $R = ct$, trebuie să fie cel pe care l-ar fi creat electronul dacă ar fi continuat să se miște cu viteza inițială. De aceea, vedem, în dreapta figurii 5.17, un „pămătuf" de linii de cîmp îndreptate exact spre locul unde ar fi trebuit să se găsească electronul dacă n-ar fi fost oprit brusc. (Remarcați că această ultimă concluzie nu depinde de presupunerea, făcută anterior, că noutățile se răspîndesc cu viteza maximă posibilă.) Este ca și cum cîmpul ar avea o viață a lui proprie!

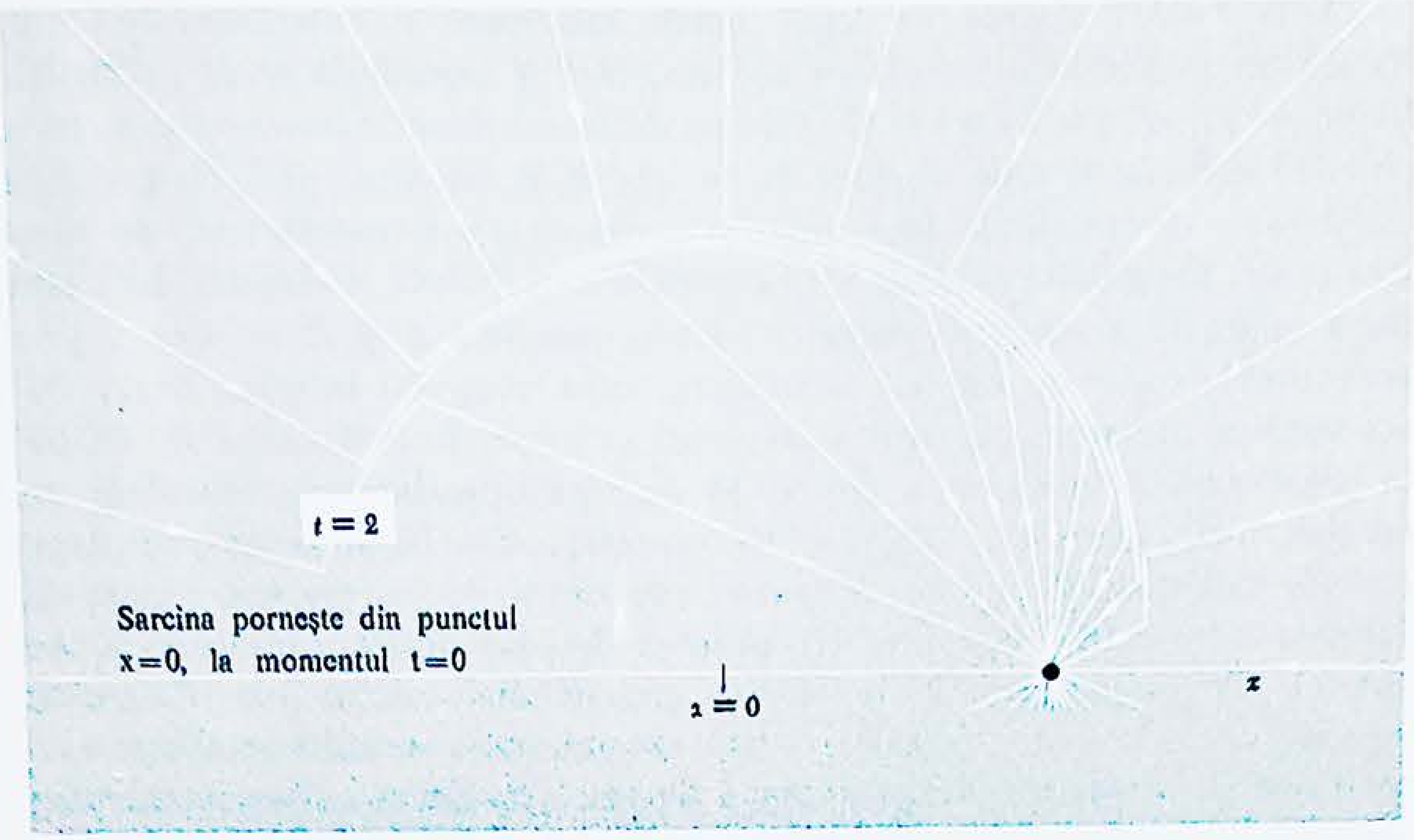
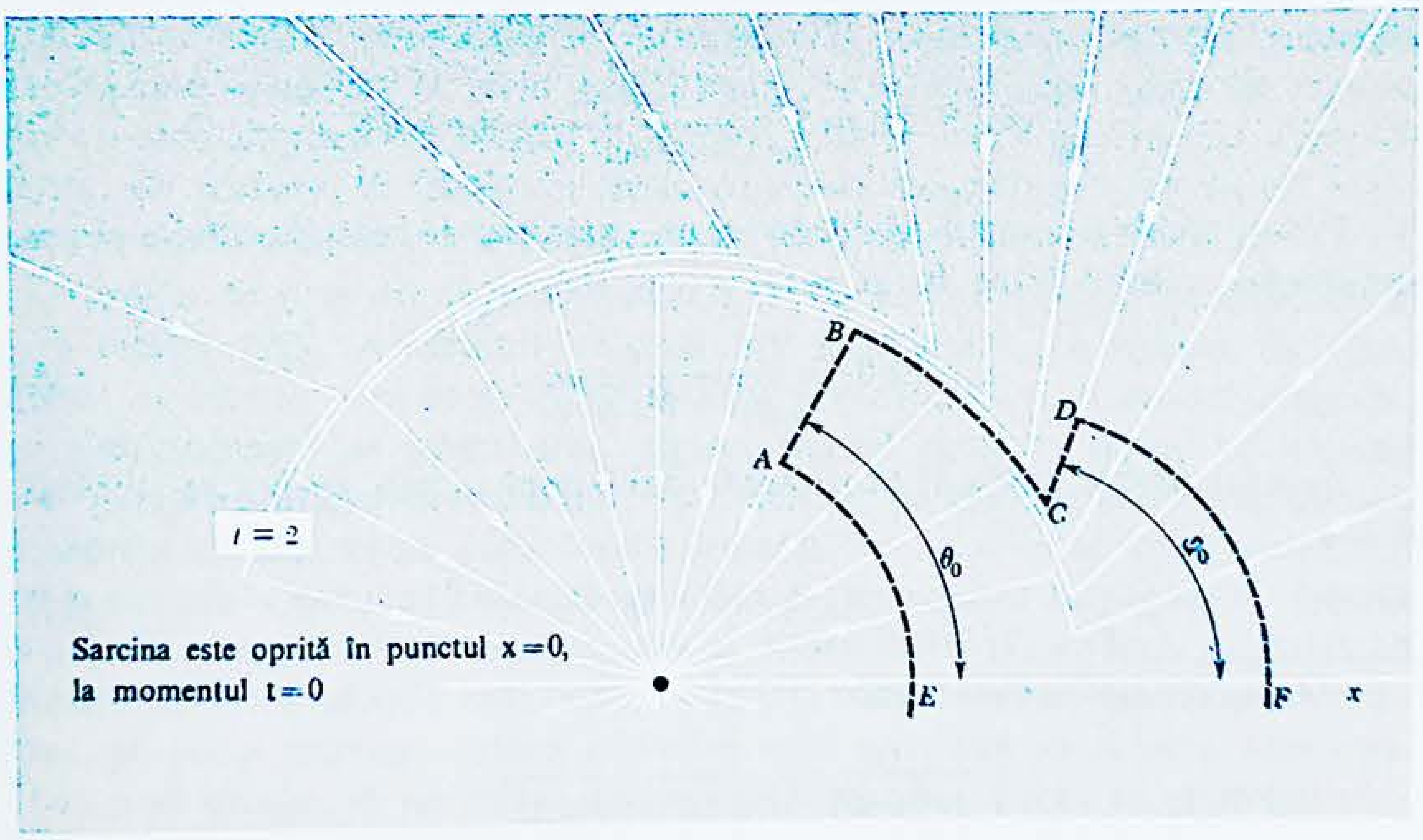


Fig. 5.16. Un purtător de sarcină, aflat inițial în repaus în punctul $x = 0$, este accelerat brusc la momentul $t = 0$ și se mișcă apoi cu viteză constantă.

Fig. 5.17. Un purtător de sarcină ce se mișcă cu viteză constantă, ajunge în origine la $t = 0$, este frînat brusc și rămîne în originea sistemului de coordonate.



Este relativ simplu de legat liniile interioare şi exterioare de cîmp. Există un singur mod de a face aceasta, fără a contrazice legea lui Gauss. Luînd exemplul din figura 5.17, pornim de la un punct oarecare A, pe linia de cîmp radială ce face unghiul θ_0 cu axa x, o urmărim pînă cînd ajunge în cîmpul exterior, unde face unghiul φ_0 cu axa x. (Această linie de cîmp este şi ea, bineînţeles, radială de la poziţia extrapolată a sarcinii, care este sursa aparentă a cîmpului exterior.) Unim punctele A şi D cu axa x prin arce circulare; arcul AE are centrul în sursa cîmpului interior, arcul DF are centrul în sursa aparentă a cîmpului exterior. Rotind curba $EABCDF$ în jurul axei x, obţinem o suprafaţă de revoluţie. Întrucît suprafaţa nu conţine nici o sarcină, integrala de suprafaţă din **E**, pe toată suprafaţa, trebuie să fie egală cu zero. Singurele contribuţii la integrală sînt date de calotele sferice, restul suprafeţei generat de AB şi CD, fiind paralel cu cîmpul. Cîmpul calotei interioare este cîmpul unei sarcini punctiforme în repaus; cîmpul calotei exterioare este cîmpul unei sarcini punctiforme ce se mişcă cu viteză constantă v, dată de ec. (12). Să calculăm fluxul prin calota interioară din figura 5.18. Integrala din **E** pe această calotă, este:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta. \qquad (13)$$

Integrala din **E** pe calota exterioară, este:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} 2\pi r^2 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sin\varphi \, d\varphi. \qquad (14)$$

Din condiţia ca fluxul ce intră prin stînga să egaleze fluxul ce iese prin dreapta, obţinem:

$$\int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sin\varphi \, d\varphi. \qquad (15)$$

Puteţi rezolva această egalitate ca un exerciţiu de integrare.* Se obţine următoarea relaţie între θ_0 şi φ_0:

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi_0}}. \qquad (16)$$

Aceeaşi relaţie poate fi exprimată mai simplu, prin egalitatea echivalentă:

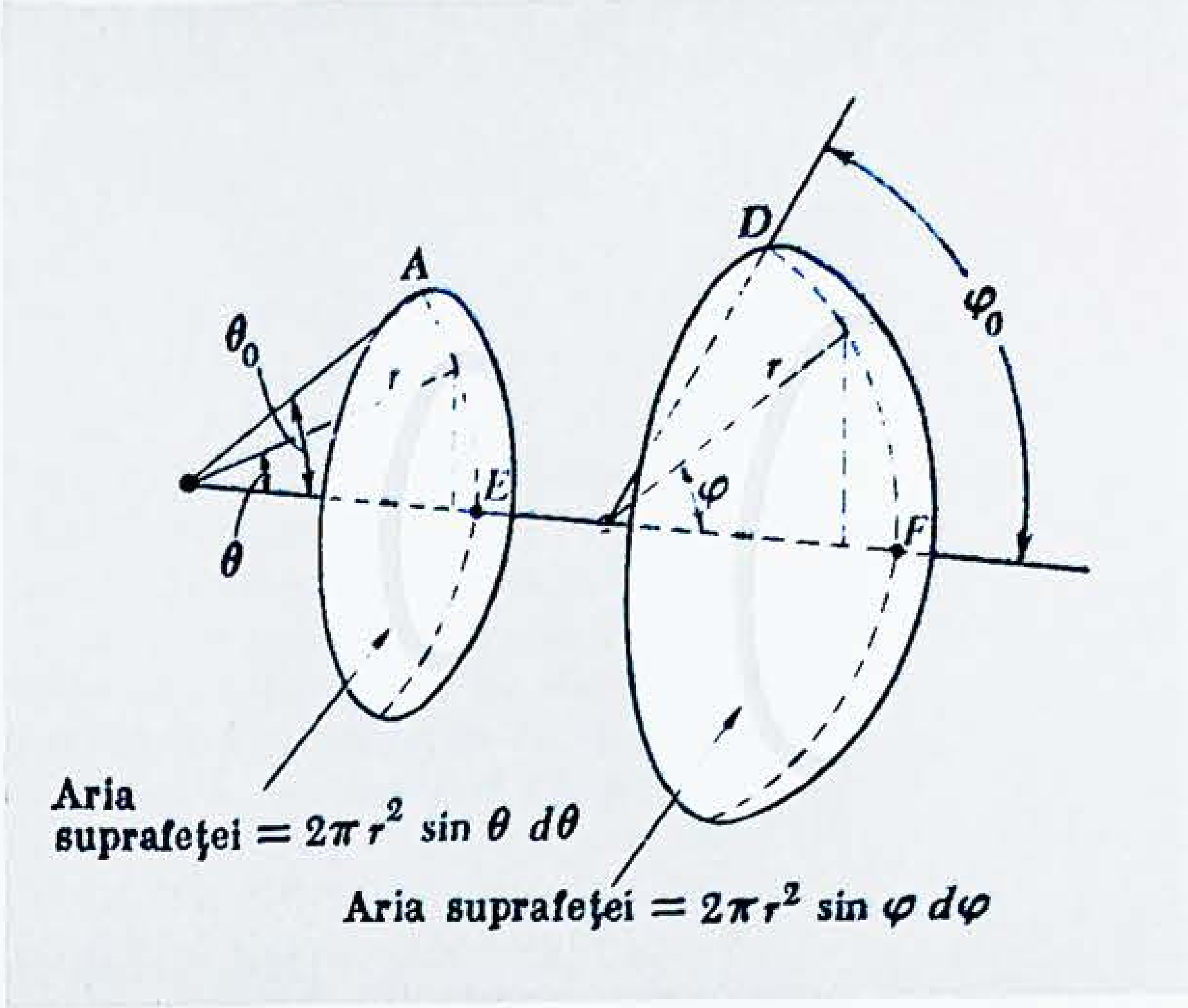
$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \gamma \operatorname{tg}\theta_0. \qquad (17)$$

---

* Integrala dată este de forma:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}.$$

Fig. 5.18. Calota interioară, formată prin rotirea lui AE din figura 5.17 și calota exterioară, formată prin rotirea lui DF. Cîmpul pe AE este cel al unei sarcini în repaus. Cîmpul din DF este al unei sarcini ce se mișcă cu viteză constantă. Vrem ca fluxurile prin cele două calote să fie egale.



Întîmplător, această relație între θ_0 și φ_0, dedusă pe baza egalității fluxurilor, este aceeași cu relația dintre unghiurile pe care le formează cu direcția mișcării relative, o tijă rigidă în sistemul de referință propriu aflat în repaus, cu sistemul de referință aflat în mișcare. Aceasta ne permite să obținem cîmpul purtătorului de sarcină în mișcare printr-o cale extrem de simplă. Fie, ca fiecare „linie" să reprezinte un flux de o valoare bine determinată și să ne imaginăm liniile din sistemul de referință în care sarcina se află în repaus, ca niște tije rigide îndreptate spre exterior în toate direcțiile. În sistemul de referință aflat în mișcare, fiecare tijă reprezintă un flux de aceeași mărime, dar tijele apar îndreptate sub unghiuri mai mari, astfel încît mănunchiul de tije arată ca cel din figura 5.13.

Doar lărgimea regiunii de tranziție din figura 5.17, depinde de presupunerea noastră nefundamentată că „noutățile se răspîndesc cu viteza maximă posibilă". Relația, exprimată în formula (17), trebuie să rămînă valabilă, dacă există o regiune în jurul purtătorului de sarcină aflat acum în repaus, pentru care istoria purtătorului de sarcină pînă la $t = 0$ nu are nici o importanță. Ca urmare, în liniile de cîmp, ce unesc cîmpul apropiat de cel îndepărtat, trebuie să existe o componentă transversală, adică radială.

Liniile de cîmp din figurile 5.16 și 5.17, au fost astfel unite încît să satisfacă relația (17). Ca rezultat, în regiunea de tranziție, a apărut un cîmp destul de intens, care în mare parte este perpendicular, în această regiune, pe raza vectoare ce pleacă din origine. Ținînd cont de faptul că această configurație a cîmpului se extinde cu viteza c, pe măsura trecerii timpului, observăm că aici avem ceva foarte asemănător cu o undă transversală de cîmp electric — perpendiculară pe direcția de propagare. Am ajuns la această concluzie, respectînd postulatele teoriei relativității și pe baza faptului că sarcina electrică este un invariant relativist. Vom folosi în continuare aceste idei, pentru a înțelege natura radiației unui purtător de sarcină accelerat. Dar, pînă atunci, să ne întoarcem la purtătorul de sarcină ce se mișcă uniform, care ne mai rezervă multe surprize.

5.8. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI PURTĂTOR DE SARCINĂ ÎN MIȘCARE

Ecuația (12) ne dă forța ce acționează asupra unui purtător de sarcină aflat în repaus, ce se găsește în cîmpul unui alt purtător de sarcină ce se deplasează cu viteză constantă. Vom ridica acum o altă problemă: ce forță se exercită asupra unui purtător de sarcină, care se mișcă în cîmpul altor purtători de sarcină?

Vom studia întîi cazul unui purtător de sarcină ce se mișcă în cîmpul produs de purtători de sarcină aflați în repaus. Acesta poate fi un electron ce se mișcă între plăcile încărcate ale unui osciloscop sau o particulă alfa ce se mișcă în cîmpul coulombian al unui nucleu atomic. Sursele cîmpului, într-un sistem de referință pe care-l vom numi al „laboratorului“, sînt toate în repaus. Într-un anumit punct din spațiu și la un anumit moment, observăm în sistemul de referință al laboratorului o particulă ce poartă sarcina q și care, în momentul respectiv, se mișcă cu viteza $\mathbf{v}$ în cîmpul electrostatic. Ce forță acționează asupra lui q?

Forța înseamnă variația impulsului, așa încît, de fapt, întrebarea noastră este: care este variația de impuls a particulei $d\mathbf{p}/dt$, în acest loc și la acest moment, în sistemul de referință al laboratorului? (Asta se și subînțelege prin forța ce acționează asupra unei particule în mișcare.) Răspunsul îl găsim direct din cele învățate. Să considerăm un sistem de coordonate F, ce se mișcă, la momentul respectiv, odată cu particula. În acest sistem „al particulei“, pentru moment această particulă se va afla în repaus, ceilalți purtători de sarcină găsindu-se în mișcare. Această situație ne este cunoscută. Forța ce acționează asupra unei sarcini în repaus este egală cu $\mathbf{E}'$, unde $\mathbf{E}'$ este intensitatea cîmpului electric observată în sistemul F'. Știm, de asemenea, cum să-l găsim pe $\mathbf{E}'$, dacă-l cunoaștem pe $\mathbf{E}$; regula ne-o dă ec. (7). Cunoscîndu-l pe $\mathbf{E}$, putem găsi variația impulsului particulei, observate în F'. Rămîne doar să transformăm această mărime în sistemul F. Astfel, problema noastră se reduce la transformarea forței sau a variației de impuls dintr-un sistem inerțial într-altul.

Această problemă a fost studiată în vol. I, cap. 12. Ne putem reaminti etapele deducerii formulelor. Aceasta ne va ajuta să înțelegem ce se întîmplă aici. Să considerăm deci, un sistem inerțial F', ce se mișcă în sensul pozitiv al axei x, cu viteza v, văzut de un observator aflat într-un alt sistem de referință F. Fie particula de masă de repaus m, ce se mișcă în sistemul de referință F', în sensul pozitiv al axei x', cu viteza v'. Vom nota cu p_x componenta x, a impulsului măsurată în F și cu p_x' componenta x' a impulsului, măsurată în F'. Pentru a găsi relația dintre p_x și p_x' observăm că

$$p_x' = \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc\,\beta'\gamma'. \tag{18}$$

Am folosit aici prescurtările cunoscute: $\beta' = v'/c$ și $\gamma' = 1/\sqrt{1 - \beta'^2}$.

Pe de altă parte, în sistemul de referință F, viteza particulei este $(v + v')/(1 + vv'/c^2)$, care poate fi scrisă și sub forma $(\beta + \beta')/(1 + \beta\beta')$, astfel încît

$$p_x = \frac{mc(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')\left[1 - \left(\dfrac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{mc(\beta + \beta')}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)]^{1/2}} = mc\,\gamma\gamma'(\beta + \beta'). \tag{19}$$

Comparînd ecuaţia (18) cu ecuaţia (19), găsim relaţia dintre p_x şi p'_x:

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta\gamma' mc). \tag{20}$$

Observăm că în termenul $\beta\gamma' mc$, $\gamma' mc$ este egal cu $\gamma' mc^2/c$ sau E'/c, unde E' (a nu se confunda cu intensitatea cîmpului electric de care nu ne ocupăm momentan!) este energia totală a particulei în sistemul F', adică energia de repaus plus energia cinetică. Să scriem ec. (20) sub forma: $p_x = \gamma(p'_x + \beta E')/c)$ şi oprindu-ne, s-o comparăm cu transformarea Lorentz a coordonatei x din acelaşi exemplu: $x = \gamma(x' + \beta ct')$. Analogia dintre aceste relaţii, ne reaminteşte că cele patru mărimi p_x, p_y, p_z şi E/c se comportă, în transformarea Lorentz, exact ca cele patru coordonate spaţiu-timp: x, y, z şi ct. Într-adevăr, dacă am fi fost siguri de acest fapt, am fi putut scrie ec. (20) direct şi am fi putut considera scurta noastră trecere în revistă ca o pierdere de timp. Să folosim acest fapt pentru găsirea relaţiilor dintre componentele transversale ale impulsului. Întrucît în transformarea Lorentz $y = y'$, dacă viteza relativă este îndreptată pe direcţia lui x, trebuie să ne aşteptăm ca:

$$p_y = p'_y. \tag{21}$$

Relaţia dintre t şi t' este dată de formula cunoscută:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right). \tag{22}$$

Pe noi ne interesează relaţia dintre $\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t$ şi $\mathrm{d}p'_x/\mathrm{d}t'$. Diferenţiind ec. (22), obţinem:

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}t' + \gamma\frac{\beta}{c}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)\mathrm{d}t' = \gamma \mathrm{d}t'(1 + \beta\beta'), \tag{23}$$

deoarece $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ este, pur şi simplu, v'. Ecuaţia (21) ne dă:

$$\mathrm{d}p_y = \mathrm{d}p'_y \tag{24}$$

şi diferenţierea ecuaţiei (20) dă

$$\mathrm{d}p_x = \gamma \mathrm{d}p'_x + \gamma\beta mc\left(\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}p'_x}\right)\mathrm{d}p'_x. \tag{25}$$

În această ultimă expresie, factorul $mc\left(\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}p'_x}\right)$ poate fi evaluat din ecuaţia (18)

$$p'_x = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^2 - 1} \tag{26}$$

şi astfel

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}\gamma'} = \frac{mc\gamma'}{\sqrt{\gamma'^2 - 1}} = \frac{mc}{\beta'}. \tag{27}$$

Atunci $\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}p_x} = \frac{1}{(\mathrm{d}p'_x/\mathrm{d}\gamma')} = \frac{\beta'}{mc}$ şi înlocuind în ecuaţia (25), obţinem

$$\mathrm{d}p_x = \gamma \mathrm{d}p'_x(1 + \beta\beta'). \tag{28}$$

Comparînd ecuaţiile 23 şi 28, vedem că

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}, \tag{29}$$

şi aceasta este valabilă indiferent de mărimea lui v', întrucît factorul $(1 + \beta\beta')$ apare în ambele ecuaţii. Pe noi ne interesează, de fapt, doar situaţiile în care v' este foarte mic, adică acele cazuri, cînd particula este aproape în repaus în sistemul F'. În acest caz, termenul $\beta\beta'$ poate fi neglijat şi comparînd ec. (23) şi (24), găsim transformarea impulsului transversal

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_y}{dt'}. \tag{30}$$

Sintetizînd aceste rezultate importante, găsim că: F' este un sistem de referinţă inerţial în care particula se găseşte, la un moment dat, în repaus sau se mişcă foarte lent. F este un alt sistem de referinţă în raport cu care F' se poate mişca oricît de repede. Folosind indicii $\parallel$ şi $\perp$ pentru componentele impulsului, paralelă şi perpendiculară pe viteza relativă a lui F' şi F, putem afirma că:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{dp'_{\parallel}}{dt} \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_{\perp}}{dt'} \end{aligned}} \tag{31}$$

Înarmaţi cu relaţiile de transformare pentru forţă (31) şi cu relaţiile de transformare pentru cîmp (ec. 7), să ne reîntoarcem la particula încărcată ce se mişcă în cîmpul **E** şi vom descoperi un lucru uluitor de simplu. Să considerăm, în primul rînd, $E_{\parallel}$ — componenta lui **E**, paralelă cu direcţia instantanee de mişcare a particulei încărcate. Să trecem la sistemul F', care se mişcă în acest moment, odată cu particula. În acest sistem, cîmpul electric longitudinal este $E'_{\parallel}$ şi, conform ec. (7), $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$. Prin urmare, forţa $dp'_{\parallel}/dt'$ este

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel}q = qE_{\parallel}. \tag{32}$$

Întorcîndu-ne la sistemul F, observatorii măsoară forţa longitudinală, adică variaţia, componentei longitudinale a impulsului $dp_{\parallel}/dt$. Conform ec. (31), $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$, astfel încît, în sistemul F, ei vor găsi că componenta longitudinală a forţei este

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel}. \tag{33}$$

Bineînţeles că particula *nu rămîne* în repaus în sistemul F', odată cu trecerea timpului. Ea va fi accelerată de cîmpul **E'**, şi viteza **v'** a particulei, în sistemul inerţial F', va creşte treptat de la zero. Totuşi, deoarece avem de-a face numai cu acceleraţia instantanee, intervin numai valorile infinitezi-

Comparînd ecuaţiile 23 şi 28, vedem că

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}, \tag{29}$$

şi aceasta este valabilă indiferent de mărimea lui v', întrucît factorul $(1 + \beta\beta')$ apare în ambele ecuaţii. Pe noi ne interesează, de fapt, doar situaţiile în care v' este foarte mic, adică acele cazuri, cînd particula este aproape în repaus în sistemul F'. În acest caz, termenul $\beta\beta'$ poate fi neglijat şi comparînd ec. (23) şi (24), găsim transformarea impulsului transversal

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_y}{dt'}. \tag{30}$$

Sintetizînd aceste rezultate importante, găsim că: F' este un sistem de referinţă inerţial în care particula se găseşte, la un moment dat, în repaus sau se mişcă foarte lent. F este un alt sistem de referinţă în raport cu care F' se poate mişca oricît de repede. Folosind indicii $\|$ şi $\perp$ pentru componentele impulsului, paralelă şi perpendiculară pe viteza relativă a lui F' şi F, putem afirma că:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dp_\|}{dt} &= \frac{dp'_\|}{dt}\\ \frac{dp_\perp}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_\perp}{dt'}\end{aligned}} \tag{31}$$

Înarmaţi cu relaţiile de transformare pentru forţă (31) şi cu relaţiile de transformare pentru cîmp (ec. 7), să ne reîntoarcem la particula încărcată ce se mişcă în cîmpul **E** şi vom descoperi un lucru uluitor de simplu. Să considerăm, în primul rînd, $E_\|$ — componenta lui **E**, paralelă cu direcţia instantanee de mişcare a particulei încărcate. Să trecem la sistemul F', care se mişcă în acest moment, odată cu particula. În acest sistem, cîmpul electric longitudinal este $E'_\|$ şi, conform ec. (7), $E'_\| = E_\|$. Prin urmare, forţa $dp'_\|/dt'$ este

$$\frac{dp'_\|}{dt'} = E'_\| q = qE_\|. \tag{32}$$

Întorcîndu-ne la sistemul F, observatorii măsoară forţa longitudinală, adică variaţia, componentei longitudinale a impulsului $dp_\|/dt$. Conform ec. (31), $dp_\|/dt = dp'_\|/dt'$, astfel încît, în sistemul F, ei vor găsi că componenta longitudinală a forţei este

$$\frac{dp_\|}{dt} = \frac{dp'_\|}{dt'} = qE_\|. \tag{33}$$

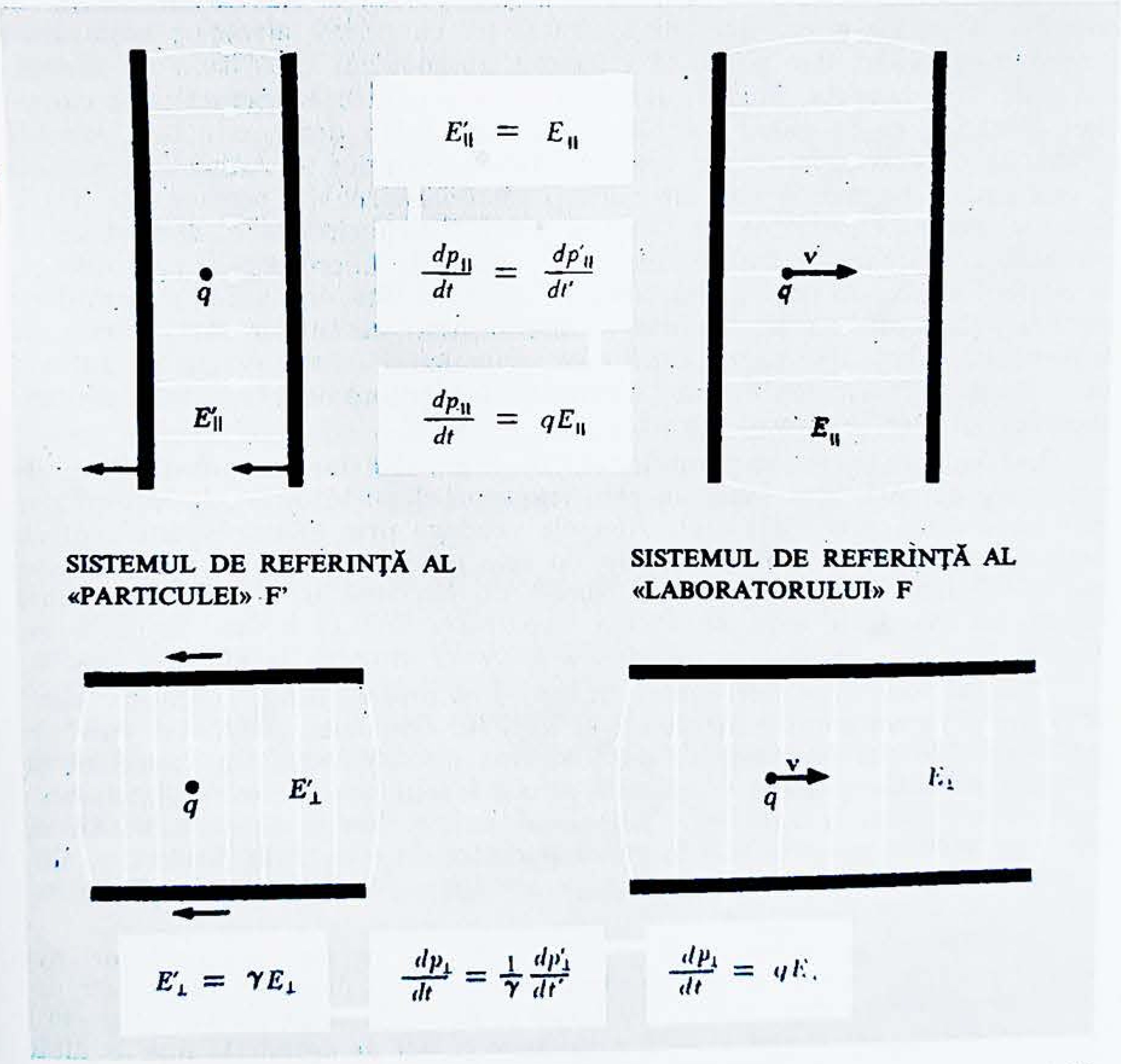
Bineînţeles că particula *nu rămîne* în repaus în sistemul F', odată cu trecerea timpului. Ea va fi accelerată de cîmpul **E'**, şi viteza **v'** a particulei, în sistemul inerţial F', va creşte treptat de la zero. Totuşi, deoarece avem de-a face numai cu acceleraţia instantanee, intervin numai valorile infinitezi-

male ale lui v', şi astfel, restricţia impusă ec. (31) este riguros îndeplinită. Pentru $E_\perp$, componenta transversală a cîmpului în F, transformarea este $E'_\perp = \gamma E_\perp$, astfel încît $(\mathrm{d}p'_\perp/\mathrm{d}t') = qE'_\perp = q\gamma E_\perp$. Trecînd din nou în sistemul F, forţa este egală cu $(\mathrm{d}p_\perp/\mathrm{d}t) = \frac{1}{\gamma}(\mathrm{d}p'_\perp/\mathrm{d}t')$ astfel încît γ dispare pînă la urmă:

$$\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_\perp q) = qE_\perp. \tag{34}$$

Conţinutul ecuaţiilor (33) şi (34) este, pur şi simplu, următorul: forţa ce acţionează asupra unei particule, aflate în mişcare în F, este egală cu produsul dintre q şi **E** — intensitatea cîmpului electric din acest sistem, *total independentă* de viteza particulei. Figura 5.19, ne reaminteşte aceste concluzii şi modul cum am ajuns la ele.

Fig. 5.19. Într-un sistem de referinţă în care sarcinile, ce produc cîmpul **E**, sînt în repaus, forţa, ce acţionează asupra unei sarcini q, care se mişcă cu o viteză oarecare este, pur şi simplu, egală cu q**E**.

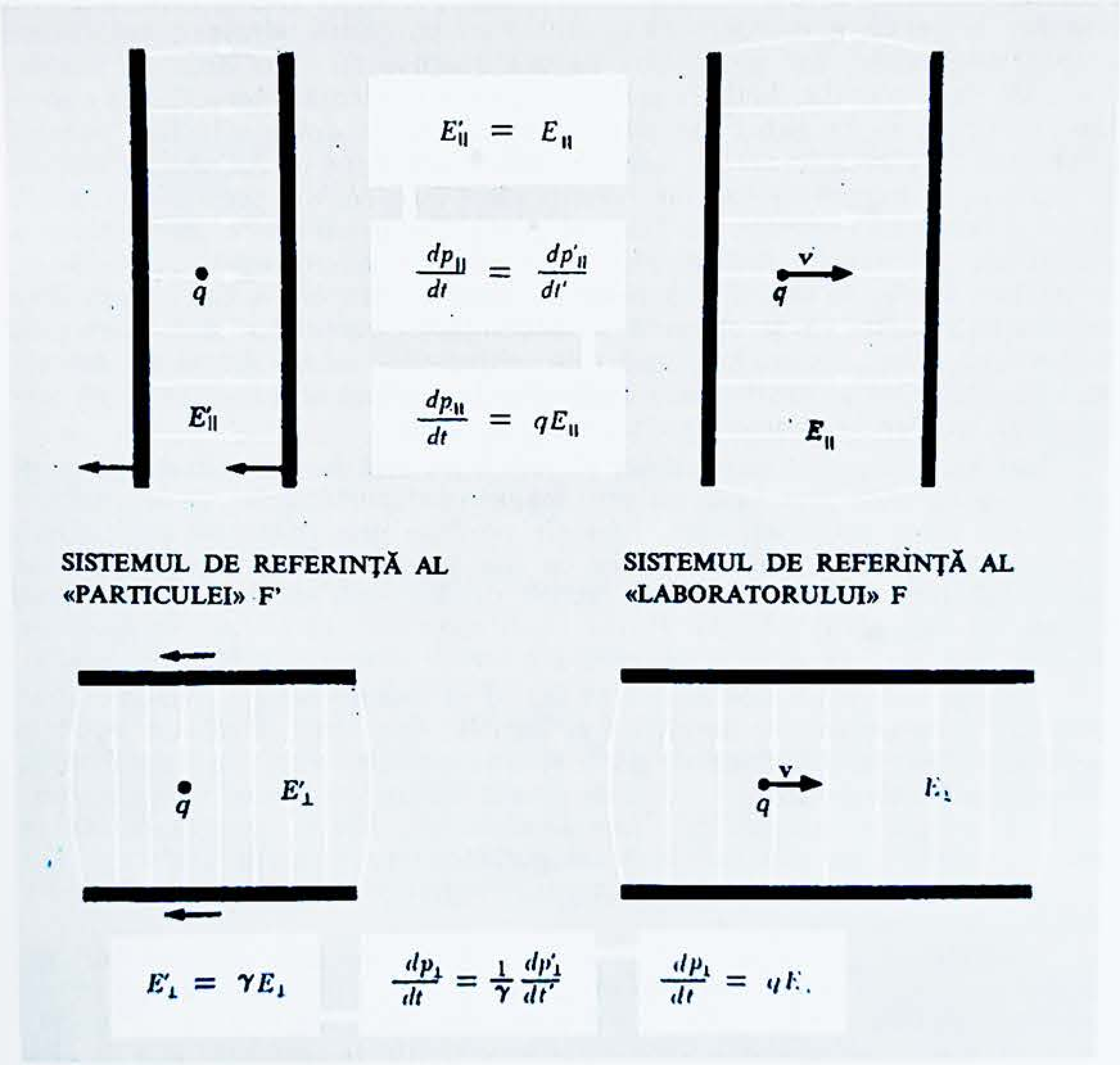


male ale lui v', şi astfel, restricţia impusă ec. (31) este riguros îndeplinită. Pentru $E_\perp$, componenta transversală a cîmpului în F, transformarea este $E'_\perp = \gamma E_\perp$, astfel încît $(dp'_\perp/dt') = qE'_\perp = q\gamma E_\perp$. Trecînd din nou în sistemul F, forţa este egală cu $(dp_\perp/dt) = \frac{1}{\gamma}(dp'_\perp/dt')$ astfel încît γ dispare pînă la urmă:

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_\perp q) = qE_\perp. \tag{34}$$

Conţinutul ecuaţiilor (33) şi (34) este, pur şi simplu, următorul: forţa ce acţionează asupra unei particule, aflate în mişcare în F, este egală cu produsul dintre q şi **E** — intensitatea cîmpului electric din acest sistem, *total independentă* de viteza particulei. Figura 5.19, ne reaminteşte aceste concluzii şi modul cum am ajuns la ele.

Fig. 5.19. Într-un sistem de referinţă în care sarcinile, ce produc cîmpul **E**, sînt în repaus, forţa, ce acţionează asupra unei sarcini q, care se mişcă cu o viteză oarecare este, pur şi simplu, egală cu qE.



Acest rezultat l-am folosit mai înainte, cînd am pomenit că contribuţia cîmpului electric la forţa ce acţionează asupra unei sarcini în mişcare este $q\mathbf{E}$. Acest lucru este atît de cunoscut şi simplu, încît poate fi considerat evident şi pare a fi o pierdere de timp demonstrarea lui. Am fi putut să-l luăm ca un fapt experimental. S-a verificat, într-un domeniu foarte larg, pînă la viteze foarte apropiate de viteza luminii ca în cazul electronilor, că factorul γ este egal cu 10^4. Din acest punct de vedere, este o lege remarcabilă. Toate discuţiile din acest capitol s-au dovedit a fi o consecinţă directă a invarianţei sarcinii.

5.9. INTERACŢIUNEA DINTRE UN PURTĂTOR DE SARCINĂ ÎN MIŞCARE ŞI ALŢI PURTĂTORI DE SARCINĂ ÎN MIŞCARE

Ştim că asupra unui purtător de sarcină în mişcare ar acţiona o forţă ce depinde de viteză. Această forţă este asociată unui *cîmp magnetic* ale cărui surse sînt curenţi electrici, adică alţi purtători de sarcină aflaţi în mişcare. Experienţa lui Oersted a arătat că cîmpurile electrice acţionează asupra magneţilor, dar pe atunci, natura magnetului constituia un mister. Nu mult după aceasta, Ampère şi alţii au pus în evidenţă interacţiunea curenţilor electrici, ca în cazul atracţiei observate între doi conductori paraleli străbătuţi de curent în acelaşi sens. Aceasta l-a condus pe Ampère la ipoteza că substanţa magnetică conţine curenţi electrici circulari permanenţi. Dacă este aşa, atunci experienţa lui Oersted poate fi explicată ca o interacţiune a curentului „galvanic" din conductor cu curenţii microscopici permanenţi, ce conferă acului de busolă proprietăţi deosebite. Ampère a dat o formulare matematică completă şi elegantă a interacţiunii curenţilor staţionari şi a faptului că substanţa magnetizată este echivalentă cu un sistem de curenţi permanenţi. Pînă la confirmarea strălucitei lui ipoteze asupra naturii magnetismului în fier, a trecut aproximativ un secol.

Lui Ampère şi contemporanilor săi, nu le era clar dacă manifestările magnetice ale curenţilor se explicau prin transportul purtătorilor de sarcini sau prin ceva mult mai complicat. Efectele produse prin mişcarea unui obiect încărcat electrostatic pot fi aceleaşi cu cele produse de un curent galvanic continuu? Din lucrarea teoretică, scrisă de Maxwell la sfîrşitul secolului, reieşea că răspunsul este *da*. Prima confirmare directă a fost obţinută de Henry Rowland, la experienţa căruia ne vom întoarce la sfîrşitul cap. 6.

Meritul teoriei actuale constă în faptul că interacţiunea curenţilor electrici apare ca un corolar inevitabil al legii lui Coulomb. Dacă sînt valabile postulatele teoriei relativităţii, dacă sarcina electrică este un invariant şi dacă legea lui Coulomb este valabilă, atunci fenomenele, pe care ne-am obişnuit să le numim „magnetice", trebuie să existe. Ele se observă îndată ce apare o interacţiune electrică între un purtător de sarcină în mişcare şi alţi purtători de sarcină în mişcare. O experienţă imaginară foarte simplă ne va demonstra acest lucru.

În sistemul „laboratorului" (fig. 5.20, *a*), un şir lung de purtători de sarcini pozitive se mişcă spre dreapta cu viteza v_0 şi, deasupra lui, un şir de purtători de sarcini negative se mişcă spre stînga cu aceeaşi viteză. Se presupune că aceste sarcini sînt atît de numeroase şi atît de apropiate una de alta

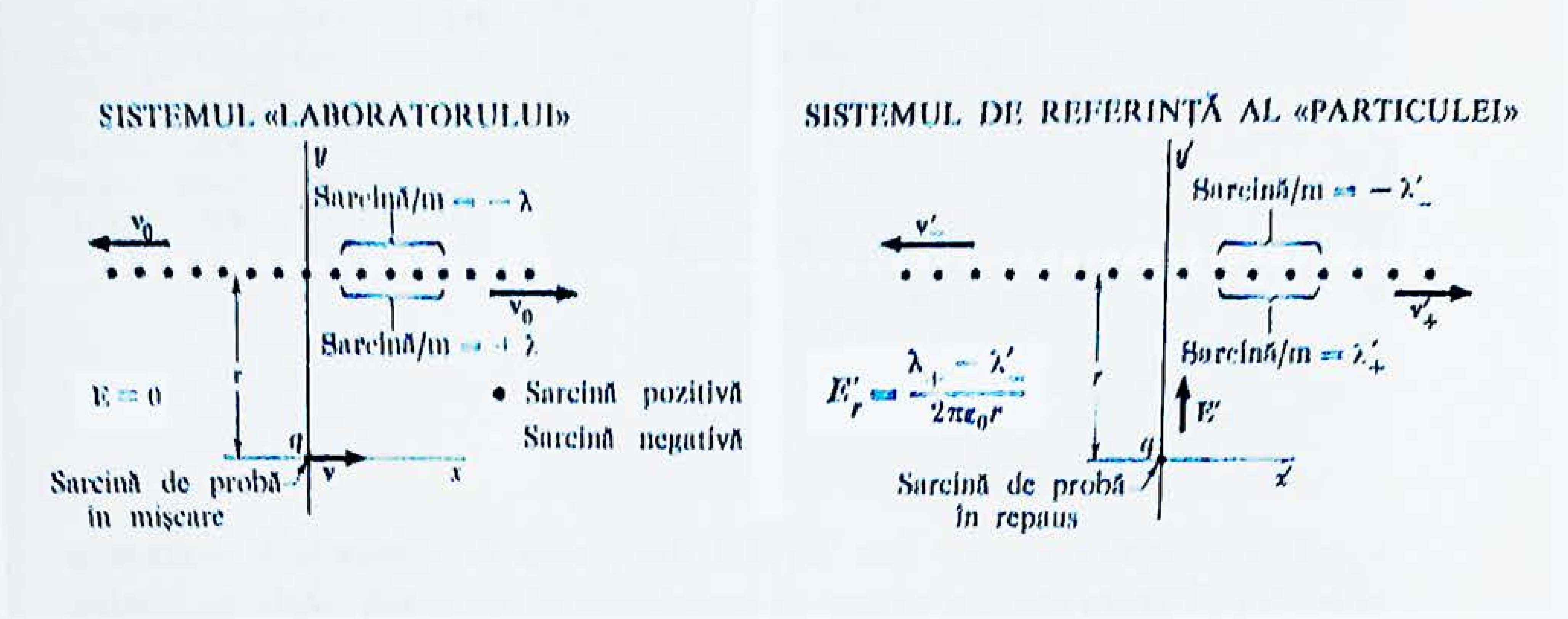


Fig. 5.20. Un şir de purtători de sarcină pozitivă şi negativă în mişcare, aşa cum se observă în două sisteme de referinţă diferite. (*a*) Purtătorii de sarcină negativă se mişcă spre stînga, cei pozitivi spre dreapta, cu viteze egale în sistemul laboratorului. În sistemul laboratorului densităţile sînt egale, dar în sistemul de referinţă al „particulei" (*b*), în care sarcina de probă q este în repaus, densităţile liniare de sarcină nu sînt egale.

încît, la distanţele care ne interesează, structura lor discretă poate fi neglijată. În figură am reprezentat, pentru claritate, cele două şiruri uşor delimitate. Pentru această configuraţie, nu există un sistem de referinţă în care toate sarcinile să se afle în repaus. Presupunem că densitatea liniară de sarcină pozitivă, măsurată în sistemul laboratorului, este λ şi că densitatea de sarcină negativă este aceeaşi. Atunci în sistemul laboratorului, densitatea liniară totală de sarcină este nulă. Prin urmare, intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$, în sistemul laboratorului, este nul. Această situaţie este echivalentă cu cea a unui conductor neîncărcat prin care trece un curent electric constant. Într-un conductor metalic, se mişcă doar purtătorii de sarcini negative (electronii), purtătorii de sarcini pozitive fiind în repaus. Am ales un model mai simetric, numai pentru a simplifica întrucîtva raţionamentul.

Dacă v-aţi fi mişcat cu aceeaşi viteză ca şi purtătorii de sarcini pozitive, aţi fi observat că densitatea liniară de sarcină variază. Această situaţie este asemănătoare cu cea a condensatorilor din figura 5.19. În sistemul laboratorului, distribuţia de sarcină pozitivă va fi contractată în direcţia x cu factorul $(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$, ceea ce o face mai densă decît în sistemul în care purtătorii de sarcini pozitive s-ar fi aflat în repaus. Întrucît am specificat că densitatea în sistemul laboratorului este λ, densitatea în sistemul în care sarcinile pozitive se află în repaus va fi mai mică şi anume egală cu $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$. Acelaşi lucru este valabil pentru densitatea liniară a sarcinilor negative în repaus. Aceste raţionamente ne vor fi în curînd utile.

Asupra unei sarcini de probă q aflată în repaus, la o distanţă oarecare r de conductor, nu acţionează nici o forţă, deoarece cîmpul electric este nul. Ne interesează, acum, forţa exercitată asupra unei sarcini de probă aflate *în mişcare*. Presupunem că în sistemul laboratorului, sarcina q este pusă în mişcare cu viteza v, spre dreapta. Ce forţă va acţiona asupra ei,

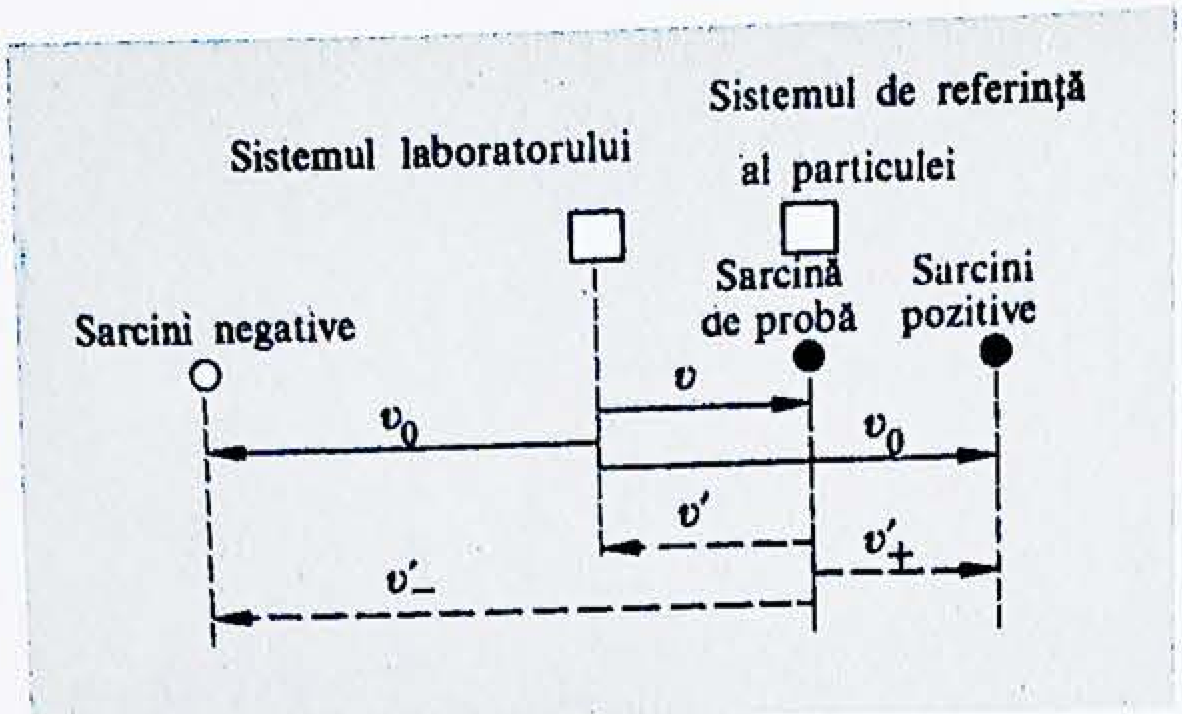


Fig. 5.21. Diagramă în „spațiul vitezelor" pentru a ne ajuta să înțelegem lucrurile. (Adunarea vitezelor trebuie făcută relativist.) Notațiile pentru modulele diferitelor viteze sînt aceleași cu cele din ecuațiile 35–44.

în sistemul laboratorului? Am învățat deja, cum se răspunde la asemenea întrebări. Trecem într-un sistem de coordonate ce se mișcă odată cu sarcina de probă q. În acest sistem de referință „al particulei", sarcina q se află în repaus și forța ce acționează asupra ei este determinată numai de cîmpul electric din acest sistem de referință.

De unde apare acest cîmp electric în sistemul de referință „al particulei", cînd în sistemul laboratorului acesta nu exista? Explicația constă în faptul că densitățile liniare de sarcină în sistemul „particulei", pe care le vom nota cu λ'_+ și λ'_-, *nu sînt egale*. Conductorul, observat în sistemul de referință „al particulei", este încărcat! Pe fiecare unitate de lungime există un surplus de sarcini negative.*

Pentru a ne descurca, trebuie să cunoaștem viteza purtătorilor de sarcini pozitive și a purtătorilor de sarcini negative în noul sistem de referință. Evident, ele nu sînt egale. De fapt, întrucît sistemul ales „al particulei" se mișcă spre dreapta față de sistemul laboratorului, el ajunge din urmă purtătorii de sarcini pozitive și se îndepărtează de cei negativi, chiar mai repede. Figura 5.21 ne ajută să determinăm vitezele care ne interesează. Nu vom face nici un fel de aproximații, așa încît, pentru obținerea vitezelor v'_+ și v'_- a purtătorilor de sarcini pozitive și negative în sistemul „particulei", trebuie să folosim formula compunerii vitezelor din mecanica relativistă. Aceste viteze sînt egale cu:

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} \qquad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2}. \tag{35}$$

Aici ne convine să folosim notațiile β și γ. Fie $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$; $\beta'_+ = v'_+/c$, $\gamma'_+ = (1 - \beta'^2_+)^{-1/2}$ ș.a.m.d. Cu aceste notații, ec. (35) devine:

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \qquad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta}. \tag{36}$$

---

* Vă puteți întreba: „Cum rămîne cu invarianța sarcinii?" Am subliniat deja că sarcina totală cuprinsă într-un domeniu oarecare este aceeași, indiferent de sistemul de referință în care se măsoară. În cazul nostru, nu există nici o regiune care să poată include întreaga sarcină a conductorului, întrucît el tinde către infinit; ce se întîmplă la capetele lui, nu ne interesează.

Dificultatea problemei constă în faptul că cele două distribuţii de sarcină suferă contracţii Lorentz *diferite*. Densitatea liniară a sarcinilor pozitive, o putem găsi plecînd de la densitatea sarcinilor pozitive în sistemul lor propriu de repaus şi aplicînd factorul de contracţie în sistemul de referinţă al particulei. Înainte, găseam densitatea sarcinilor pozitive în sistemul lor propriu de repaus; ea era egală cu $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ sau în noile notaţii, λ/γ_0. Distribuţia de sarcină se micşorează liniar cu factorul $1/\gamma'_+$ în sistemul de referinţă al particulei, iar inversul lui, γ'_+ este factorul cu care creşte densitatea liniară de sarcină faţă de densitatea din sistemul de referinţă în repaus a sarcinilor pozitive. Astfel, densitatea liniară de sarcină pozitivă, în sistemul de referinţă al particulei, va fi:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+\left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right). \tag{37}$$

Analog, densitatea de sarcină negativă, în sistemul de referinţă al particulei, este:

$$\lambda'_- = \gamma'_-\left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right). \tag{38}$$

Eliminînd din aceste ecuaţii pe γ'_+ şi γ'_-, şi folosind ec. (36), vrem să găsim densitatea totală de sarcină, $\lambda'_+ - \lambda'_-$. Deşi pare că ne afundăm în algebră, substituţia ne duce imediat la o surprinzătoare simplificare:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma'_+ - \gamma'_-). \tag{39}$$

Din ec. (36),

$$\gamma'_+ - \gamma'_- = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0+\beta}{1+\beta_0\beta}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1-\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2+\beta_0^2\beta^2}} - \frac{1+\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2+\beta_0^2\beta^2}} =$$

$$= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1-\beta_0^2)(1-\beta^2)}} = -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma. \tag{40}$$

Prin urmare, densitatea liniară totală de sarcină este egală cu:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = -2\lambda\beta_0\beta\gamma = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2}. \tag{41}$$

Această sarcină electrică liniară dă naştere, în sistemul de referinţă al particulei, aceluiaşi cîmp electric ca orice sarcină liniară de aceeaşi densitate. Trebuie doar să aplicăm teorema lui Gauss unui cilindru ce înconjoară linia şi vom obţine rezultatul cunoscut — un cîmp electric radial egal cu:

$$E'_r = \frac{(\lambda'_+ - \lambda'_-)}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\lambda\gamma v v_0}{\pi\varepsilon_0 r c^2}. \tag{42}$$

Prin urmare, forţa ce acţionează asupra sarcinii de probă pozitive q, este îndreptată pe direcţia razei, spre interior (în sistemul particulei, în sensul pozitiv al axei y') şi are mărimea

$$F'_y = \frac{q\gamma\lambda v v_0}{\pi\varepsilon_0 r c^2}. \tag{43}$$

În sistemul de referinţă al particulei, aceasta este o forţă transversală. Mărimea sa, măsurată în sistemul laboratorului, va fi diferită. Conform regulilor de transformare a forţelor, ec. (31), $F_y = (1/\gamma)F'_y$. Ca urmare, γ se simplifică. Ajungem la concluzia că valoarea forţei care acţionează asupra sarcinii q, ce se mişcă în sistemul laboratorului cu o viteză v paralelă cu conductorul, este

$$F_y = \frac{q\lambda v v_0}{\pi\varepsilon_0 r c^2}. \tag{44}$$

Mărimea λv_0, pe care o putem pune în evidenţă în ecuaţia (44), este chiar intensitatea curentului electric din conductor. Adică, λv_0 este viteza de transport a purtătorului de sarcină pozitivă spre dreapta — sau cantitatea de sarcină pozitivă ce trece într-o secundă prin faţa unui punct dat — şi aceeaşi contribuţie la curent o aduce şi transportul sarcinii negative spre stînga.

Notînd intensitatea acestui curent cu I, mărimea forţei, ce acţionează asupra unei sarcini în mişcare, este dată de

$$F = \frac{qvI}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}. \tag{45}$$

Este remarcabil faptul că forţa ce acţionează asupra unei sarcini de probă în mişcare, nu depinde de viteza sau densitatea tipului de purtători de sarcină din conductor, ci numai de combinaţia acestor mărimi care determină transportul total de sarcină. Dacă avem un anumit curent n-are importanţă dacă acest curent este format din electroni de înaltă energie care se mişcă cu o viteză egală cu 99% din viteza luminii, din electronii unui metal ce execută o mişcare termică haotică cu o vagă mişcare ordonată suprapusă pe o direcţie, sau din ioni încărcaţi într-o soluţie, cei pozitivi mişcîndu-se într-un sens şi cei negativi într-altul. Indiferent de toate acestea, forţa ce acţionează asupra sarcinii de probă, este direct proporţională cu viteza sarcinii de probă. În deducerea noastră nu s-a impus în nici un fel restricţia ca purtătorii de sarcină din conductor sau sarcina de probă să aibă viteze mici. Ec. (45) este exactă, fără nici un fel de restricţii.

Să vedem cum explică această formulă respingerea reciprocă a doi conductori prin care curenţii trec în sens opus, ca în figura 5.1, *b* de la începutul acestui capitol. Să presupunem, mai întîi, că în fiecare conductor există un număr egal de purtători de sarcină pozitivă şi negativă, mişcîndu-se în sensuri opuse, cu aceeaşi viteză. În sistemul laboratorului avem ceva asemănător cu figura 5.22, *a*. Trecînd într-un sistem de referinţă, ce se mişcă odată cu purtătorii de sarcini negative din conductorul 1 şi cu purtătorii de sarcini pozitive din conductorul 2, observăm că sistemul arată ca în figura 5.22, *b*. În acest sistem de referinţă, conductorul 1 are pe unitatea de lungime un surplus de purtători de sarcini pozitive; prin urmare, el *va respinge* purtătorii de sarcini pozitive din conductorul 2. Analog, purtătorii de sarcini negative din conductorul 1 sînt respinşi de surplusul de purtători de sarcini negative din conductorul 2. Pentru a găsi forţele ce acţionează asupra purtă-

torilor de sarcină rămași — pozitive în 1 și negative în 2 — le transferăm într-un sistem de referință în care ele se află în *repaus* (fig. 5.22, *c*). Aici, conductorul 2 apare cu un surplus de purtători de sarcini pozitive, astfel încît purtătorii de sarcini pozitive din 1 trebuie să simtă o respingere. Același lucru se întîmplă cu purtătorii de sarcini negative din conductorul 2.

Astfel, fiecare purtător de sarcină, aflat în sistemul său propriu în repaus, resimte respingerea exercitată de purtătorii de sarcină din celălalt conductor. Pentru a găsi mărimea exactă a forței, în sistemul laboratorului, trebuie să facem aceeași transformare a forțelor ca cea pe care am făcut-o trecînd de la ec. (43) la ec. (44). Dar aceasta nu schimbă *semnul* forței. Prin urmare, trebuie ca în sistemul laboratorului să observăm neapărat respingerea unui conductor de către celălalt.

Modelul pe care abia l-am descris, poate explica conductibilitatea unui electrolit sau a unui gaz ionizat și în general, două tipuri de purtători de sarcină pot avea viteze foarte diferite. Totuși, într-un metal, se mișcă numai purtătorii de sarcină negativă (electronii), în timp ce purtătorii de sarcină pozitivă corespunzător rămîn fixați în rețeaua cristalină. Doi asemenea conductori prin care trec curenți în sensuri opuse, văzuți în sistemul laboratorului, sînt reprezentați în figura 5.23, *a*. Conductorii fiind neutri, asupra ionilor pozitivi ce se află în repaus în sistemul laboratorului, nu se exercită nici o forță electrică din partea celuilalt conductor. Trecînd la un sistem de referință în care unul din grupurile de electroni se află în repaus (fig. 5.23, *b*), observăm că distribuția electronilor din celălalt conductor suferă o contracție Lorentz mai mare decît distribuția ionilor pozitivi. În figura 5.23, *c* este reprezentată o situație similară. Astfel, acest model prezice, de asemenea, o respingere între doi curenți paraleli de sensuri opuse. Ea ilustrează calitativ o afirmație făcută mai înainte, că forțele dintre curenți depind doar de

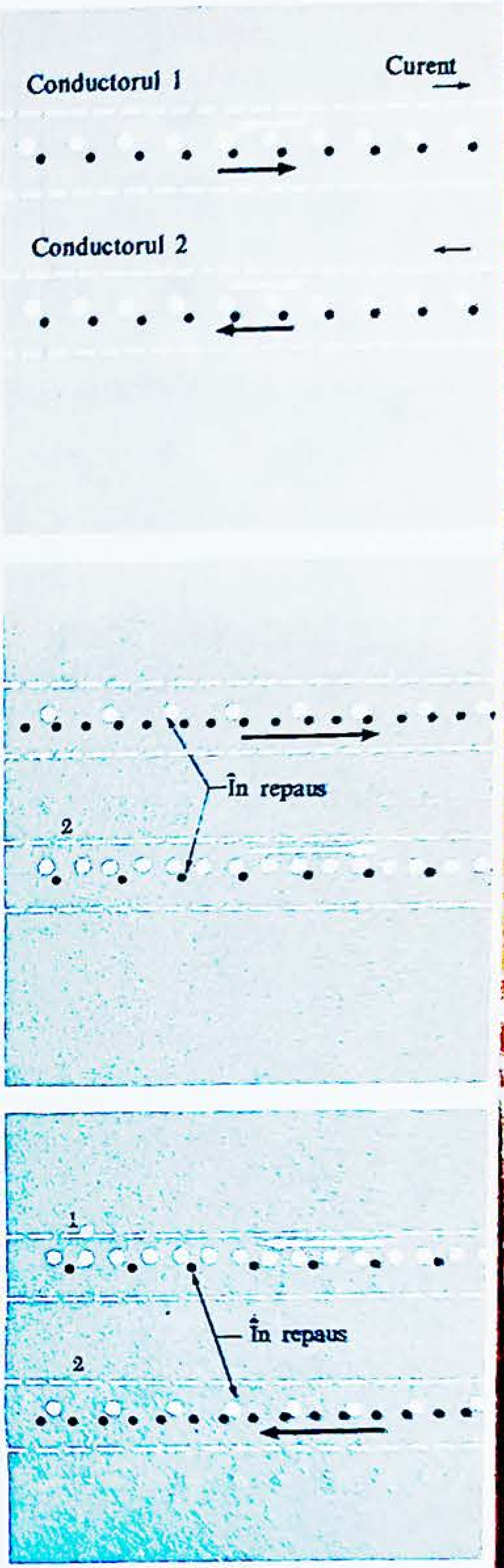


Fig. 5.22. *(a)* Doi conductori prin care trec curenți în sensuri opuse, în sistemul laboratorului. Curentul este dat de ionii pozitivi și negativi, ce se mișcă cu viteze egale.
(b) Sistemul de referință în repaus al ionilor negativi din conductorul 1 și al ionilor pozitivi din conductorul 2.
(c) Sistemul de referință în repaus al ionilor pozitivi din conductorul 1 și al ionilor negativi din conductorul 2.

mărimea curenţilor electrici nu şi de modul cum se face transportul de sarcină. (Problema 5.15 dă o demonstrare generală a acestei afirmaţii.)

În acest capitol am văzut cum invarianţa sarcinii implică existenţa forţelor dintre curenţii electrici. Asta nu înseamnă că una este cauza celeilalte. Ele sînt, pur şi simplu, două aspecte ale electromagnetismului, legătura dintre ele constituind o minunată ilustrare a unei legi mai generale: fizica este aceeaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.

Dacă pentru analiza fiecărui sistem de purtători de sarcină în mişcare, ar fi trebuit să facem transformările „directe şi inverse" între diferitele sisteme de coordonate, sarcina noastră ar fi fost plictisitoare şi confuză. Există o metodă mai bună. Acţiunea generală a unui curent asupra celuilalt, sau a unui curent asupra unui purtător de sarcină în mişcare, poate fi descrisă complet şi concis, introducînd un nou cîmp, *cîmpul magnetic.*

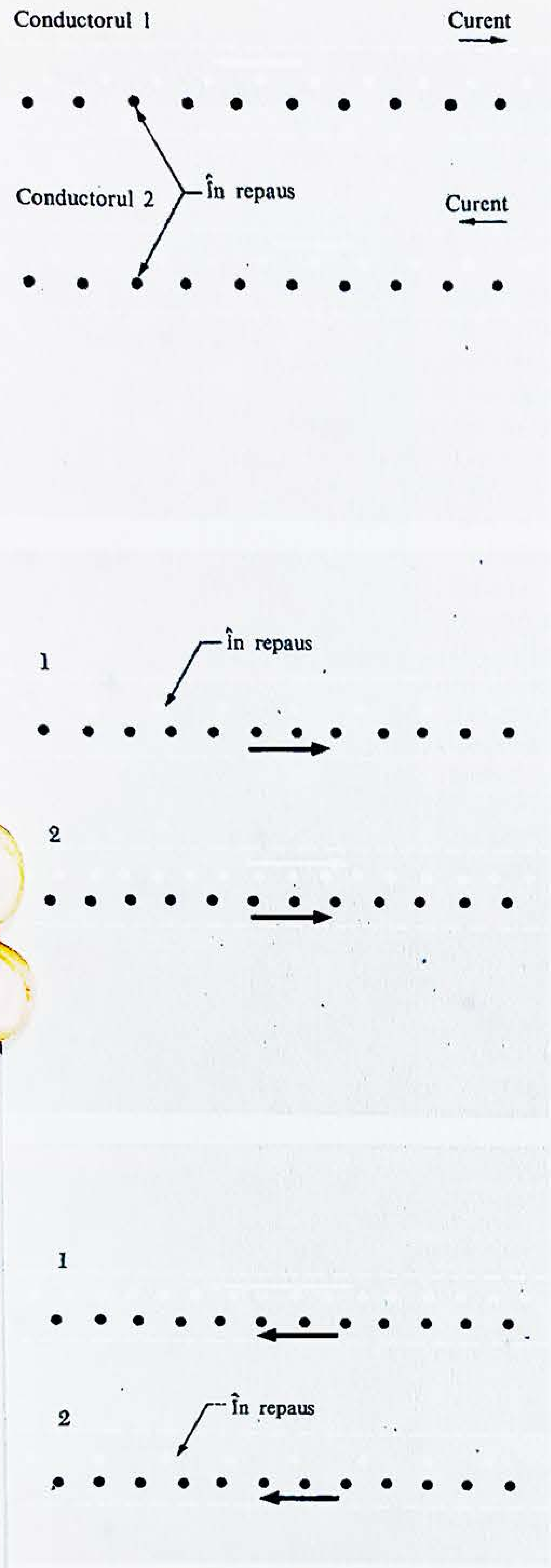


Fig. 5.23. *(a)* Doi conductori prin care trec curenţi în sensuri opuse, în sistemul laboratorului. Curentul este dat doar de mişcarea ionilor negativi (electroni), ca în firul metalic.

(b) Sistemul de referinţă în repaus al electronilor din firul 1. Observaţi că, în firul 2, ionii pozitivi sînt comprimaţi, iar distribuţia de electroni se contractă şi mai mult.

(c) Sistemul de referinţă în repaus al electronilor din firul 2. La fel ca în *(b)* celălalt fir apare, în raport cu aceşti electroni aflaţi în repaus, încărcat negativ.

Cîmpul electric în diferite sisteme de referință.

5.1. Un condensator este format din două plăci dreptunghiulare, paralele, cu distanța dintre ele de 2 cm. Dimensiunile plăcii: de la est la vest este de 20 cm, de la nord la sud — de 10 cm. Condensatorul se încarcă prin conectarea lui, pentru un timp scurt, la o baterie de 300 V. Care este numărul electronilor în exces de pe placa negativă? Care este intensitatea cîmpului electric dintre plăci? Determinați, acum, următoarele mărimi care se măsoară într-un sistem de referință ce se mișcă spre răsărit cu viteza de 0,6c în raport cu laboratorul, în care plăcile se găsesc în repaus: cele trei dimensiuni ale condensatorului, numărul electronilor în exces de pe placa negativă, intensitatea cîmpului electric dintre plăci. Răspundeți la aceleași întrebări pentru cazul unui sistem de referință ce se mișcă în sus cu viteza de 0,6c.

Cîmpul unei sarcini în mișcare la limita regimului extrem relativist.

5.2. Pentru o evaluare grosolană a „turtirii" relativiste a configurației liniilor de cîmp ale unui purtător de sarcină în mișcare, putem folosi unghiul α dintre două suprafețe conice ce includ jumătate din fluxul total al cîmpului electric. Înseamnă că jumătate din fluxul printr-o sferă va fi cuprins în zona ecuatorială dintre $\theta' = \pi/2 + \alpha/2$ și $\theta' = \pi/2 - \alpha/2$. Considerăm doar cazul regimului extrem relativist cînd $\gamma \gg 1$. În acest caz, vor fi luate în considerație doar unghiurile θ', astfel încît $\theta' = \pi/2 - \varepsilon$ cu $|\varepsilon| \ll 1$. Să arătăm, în primul rînd, că ec. (12), în acest caz, poate fi aproximată cu:

$$E' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Apoi vom integra după ε, pentru a obține fluxul prin cordonul ecuatorial îngust, între limitele $-\alpha/2$ și $+\alpha/2$.

R: $\alpha = 2/(\sqrt{3}\,\gamma)$.

Aplicarea rezultatelor problemei 5.2.

5.3. Un proton de 30 BeV trece la distanța de 10^{-7} cm de un atom de hidrogen. Evaluați maximul intensității cîmpului electric și aproximați durata impulsului cîmpului electric ce acționează asupra atomului. Faceți același lucru pentru un electron de 30 BeV, ce trece la o aceeași distanță. Folosiți următoarele valori echivalente pentru masele de repaus: 1 BeV pentru proton și 0,5 MeV pentru electron.

O scurtă problemă pentru discuție.

5.4. Considerăm traiectoria unei particule încărcate ce se mișcă în direcția x, cu viteza de 0,8 c, cînd intră într-un domeniu larg, în care există un cîmp electric

pe direcţia y. Arătaţi că viteza particulei pe direcţia x trebuie *să scadă*. Ce se întîmplă cu componenta pe axa x a impulsului?

Echivalenţa dintre descrierea în sistemul laboratorului şi sistemul de referinţă al particulei.

5.5. Plăcile de deflecţie într-un osciloscop catodic de înaltă frecvenţă, sînt două plăci dreptunghiulare de 4 cm lungime şi 1,5 cm lăţime, aşezate la distanţa de 0,8 cm una de alta. Diferenţa de potenţial dintre plăci este de 6000 V. Un electron, care a fost accelerat la o diferenţă de potenţial de 250 kV, intră între plăcile de de deflecţie dinspre stînga mişcîndu-se, iniţial, paralel cu ele şi aflîndu-se la jumătatea distanţei dintre ele. Vrem să găsim poziţia electronului şi direcţia mişcării sale cînd părăseşte cîmpul de deflecţie, la celălalt capăt al plăcilor.

Vom neglija cîmpul de la margini şi presupunem că cîmpul electric dintre plăci este uniform. Masa de repaus a electronului poate fi luată egală cu 500 keV. Vom analiza, întîi, ce se întîmplă în sistemul laboratorului, răspunzînd la următoarele întrebări: $\gamma = ?$; $\beta = ?$; p_x, în unităţi $mc = ?$; timpul petrecut între plăci (se neglijează variaţia vitezei orizontale, discutate în problema 5.4); componenta transversală a impulsului căpătat, în unităţi $mc = ?$; viteza transversală la ieşire $= ?$; poziţia pe verticală, la ieşire $= ?$; direcţia după care iese $= ?$ Descrieţi apoi întregul proces, aşa cum apare el, într-un sistem de referinţă inerţial ce se mişcă împreună cu electronul, în momentul în care intră în regiunea de deflecţie; cum arată plăcile? Care este cîmpul dintre ele? Ce se întîmplă cu electronul în acest sistem de coordonate? Important în acest exerciţiu este să ne convingem că cele două descrieri sînt complet echivalente.

Problemă pentru discuţie.

5.6. Observaţi ce reprezintă suprapunerea figurilor 5.16 şi 5.17. Cîmpurile, din regiunea de tranziţie, se adună sau se scad? Puteţi explica acest lucru în funcţie de natura mişcării purtătorilor de sarcină implicaţi?

5.7. Un purtător de sarcină se mişcă în lungul axei x pozitive, spre origine, cu viteza v. La momentul $t = 0$, ajunge în origine şi se opreşte instantaneu, apoi (ca şi cum ar fi fost respins elastic), se întoarce, mişcîndu-se cu aceeaşi viteză constantă în sensul pozitiv al axei x. Schiţaţi cîmpul, la un moment oarecare, după reflectarea particulei.

5.8. Figura reprezintă o particulă pozitivă, la o viteză apropiată de viteza luminii, ce se apropie de origine dinspre stînga şi o particulă negativă ce vine dinspre dreapta, cu aceeaşi viteză. Ele se ciocnesc în origine, la $t = 0$, îşi cheltuiesc într-un mod oarecare energia cinetică şi rămîn aici ca nişte entităţi neutre. Cum credeţi

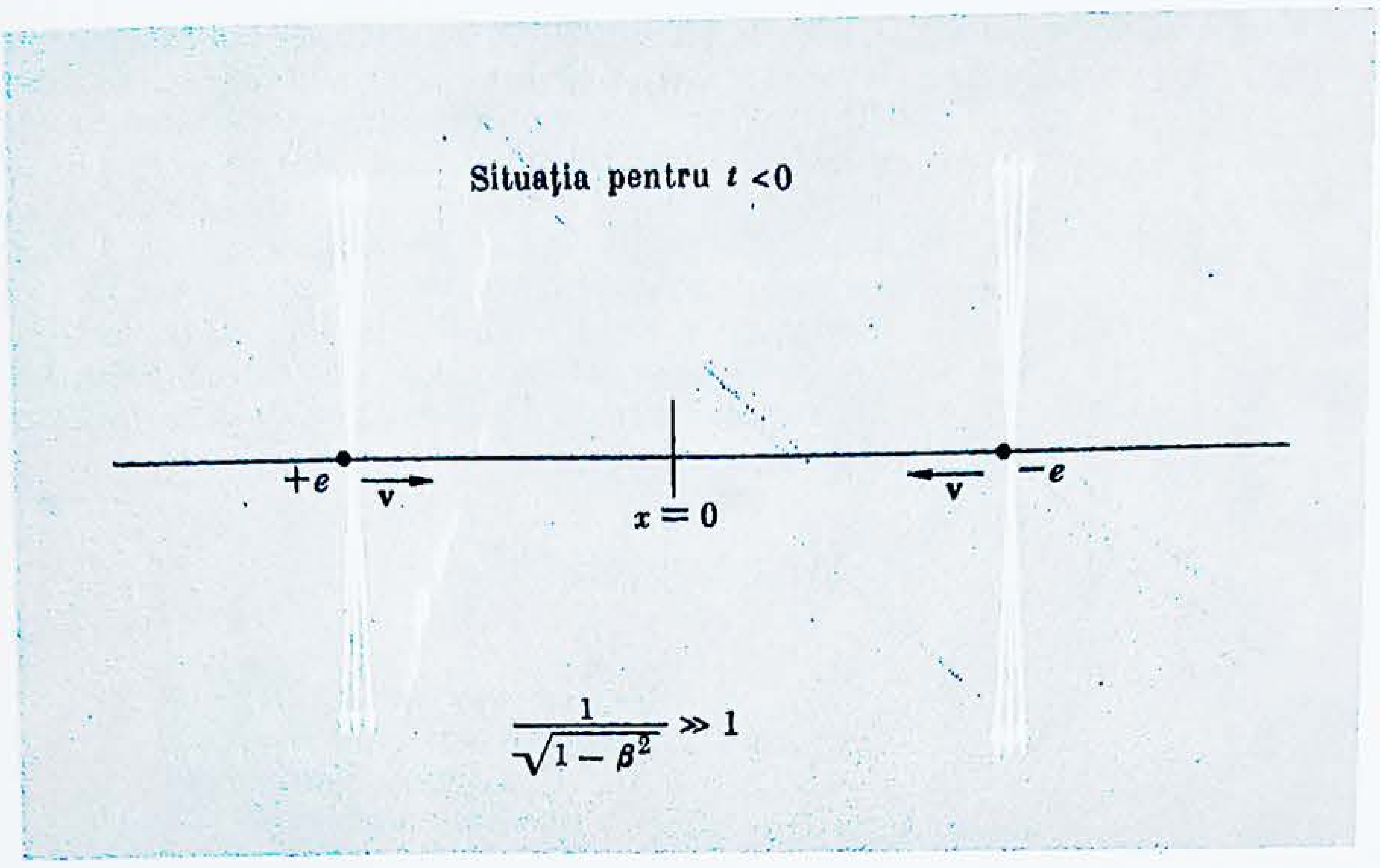


Fig. la problema 5.8.

că arată cîmpul electric la un moment oarecare $t > 0$? Desenați liniile de cîmp. Cum se schimbă cîmpul cu trecerea timpului?

O interacțiune a particulelor încărcate în „aproximația de impuls".

5.9. Particula *1*, cu sarcina q_1, se găsea în repaus. Particula *2*, cu sarcina q_2, trece pe lîngă ea, la distanța minimă b, mișcîndu-se cu viteza v. Prima particulă era atît de masivă, încît viteza imprimată de forța coulombiană îi permite în timpul trecerii o deplasare neglijabilă. A doua particulă era la fel de masivă, astfel încît orice variație în viteza ei sau deviație de la traiectoria rectilinie, este neglijabilă. Cît de mare este impulsul transversal căpătat de fiecare particulă în urma întîlnirii lor? (Aici, transversal înseamnă perpendicular pe direcția de mișcare a particulei *2*.) Răspundeți, întîi, pentru cazul particulei *2*, lucrînd în sistemul de referință în care particula *1* se află în repaus. Aplicînd legea lui Gauss unui cilindru, nu mai este necesară integrarea. Este exactă formula din punctul de vedere al teoriei relativiste? Studiați, acum, impulsul căpătat de particula *1*. Cîmpul ce acționează asupra ei este cel al unui purtător de sarcină în mișcare, dat de ecuația (12). Momentul transversal poate fi calculat cu ajutorul unor integrări aproximative. Totuși, în loc de asta puteți folosi legea lui Gauss sau puteți argumenta direct cu ajutorul primului rezultat obținut.
R: $2q_1q_2/vb$. (pentru fiecare particulă).

O problemă de conservare a sarcinii.

5.10. În paragraful 5.9, s-a subliniat deosebirea dintre invarianţa sarcinii şi conservarea sarcinii şi s-a remarcat că conservarea nu implică neapărat invarianţa. Totuşi, afirmaţia că teorema lui Gauss este valabilă într-un sistem de referinţă, pentru orice suprafaţă, împreună cu teoria relativităţii, implică conservarea sarcinii. Arătaţi aceasta, analizînd următoarea situaţie ipotetică: În origine, la $t = 0$, se *creează* dintr-odată o sarcină pozitivă. La un anumit moment $t = t_1$, observatorii determină integrala de suprafaţă din **E**, pe suprafeţe de raze diferite. Folosiţi-le.

Capitolul 6

Cîmpul magnetic

6.1. Definiția cîmpului magnetic 202
6.2. Unele proprietăți ale cîmpului magnetic 208
6.3. Vectorul potențial 213
6.4. Cîmpul unui conductor oarecare străbătut de curent 217
6.5. Cîmpul produs de spire și bobine 219
6.6. Variația lui B în apropierea unei foițe de curent 224
6.7. Cum se transformă cîmpurile 228
6.8. Experiența lui Rowland 233
6.9. Conductibilitatea electrică într-un cîmp magnetic: Efectul Hall. 234
Probleme 237

6.1. DEFINIȚIA CÎMPULUI MAGNETIC

Asupra unui purtător de sarcină, ce se mişcă paralel cu un curent de alţi purtători, se exercită o forţă perpendiculară pe viteza lui. Aceasta decurge din analiza situaţiei prezentate în figura 5.20 din capitolul precedent. Că aşa se întîmplă, putem vedea din devierea unui fascicul de electroni de către un curent aflat în apropierea sa (fig. 5.3). Vom arăta, acum, ce se întîmplă dacă sarcina de probă se va mişca în altă direcţie. Ştiţi, deja, că în jurul unui conductor străbătut de curent există un cîmp magnetic, ce exercită o forţă asupra unui purtător de sarcină în mişcare. La fel cum am definit vectorul intensitatea cîmpului electric **E**, ca fiind forţa ce acţionează asupra unităţii sarcinii de probă aflată în repaus, putem defini un *alt* cîmp, prin acea parte a forţei ce acţionează asupra sarcinii de probă în mişcare, fiind proporţional cu viteza. Pentru a fi mai precişi, să presupunem că într-un anumit punct din spaţiu, la un anumit moment, într-un sistem de coordonate oarecare, experienţele arată că forţa ce se exercită asupra unei sarcini de probă q, care se mişcă cu o viteză constantă **v**, este dată de:

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (1)$$

în care **E** şi **B**, sînt vectori ce nu depind de **v**. Dacă această relaţie este adevărată, *definim* **E** ca fiind intensitatea cîmpului electric în acel loc şi **B** ca fiind inducţia magnetică în acel loc.

Pentru a justifica această determinare trebuie să arătăm, experimental sau pe altă cale, că o asemenea relaţie poate fi găsită oricînd. N-am făcut acest lucru pînă acum dar am arătat că în unele cazuri importante şi instructive, această relaţie este valabilă. În paragr. 5.8, am arătat că forţa ce acţionează asupra sarcinii de probă, nu depinde de loc de viteza ei, dacă toate celelate sarcini se află în repaus. Asta înseamnă că pentru $\mathbf{B} = 0$, ec. (1) este valabilă peste tot. Ştim din capitolul precedent că asupra unei particule, ce se mişcă paralel cu curentul constant de purtători de sarcină din conductor, se exercită o forţă proporţională cu viteza şi perpendiculară pe ea aşa cum cere produsul vectorial din ec. (1). De fapt, noi putem spune exact cum trebuie să fie vectorul inducţia magnetică **B**, pentru ca să fie în concordanţă cu observaţiile noastre şi cu simetria sistemului. Va fi un vector perpendicular pe planul figurii, adică, perpendicular şi pe conductor şi pe viteza **v** a sarcinii de probă. Pentru ca ec. 5.45 să fie în concordanţă cu ec. (1), trebuie ca mărimea lui **B** să fie egală cu:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (2)$$

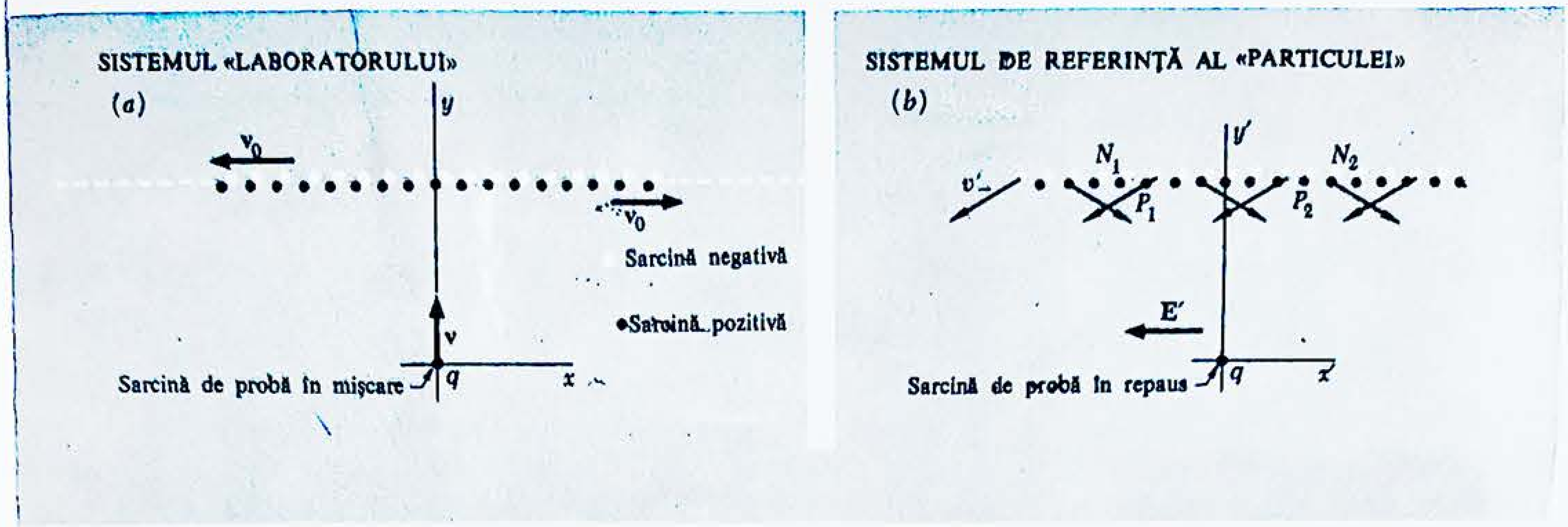


Fig. 6.1. (a) O sarcină de probă se mişcă, în sistemul laboratorului, perpendicular pe şirul de purtători de sarcină. (b) În sistemul de referinţă al „particulei", şirul de purtători de sarcină se mişcă în întîmpinarea sarcinii de probă.

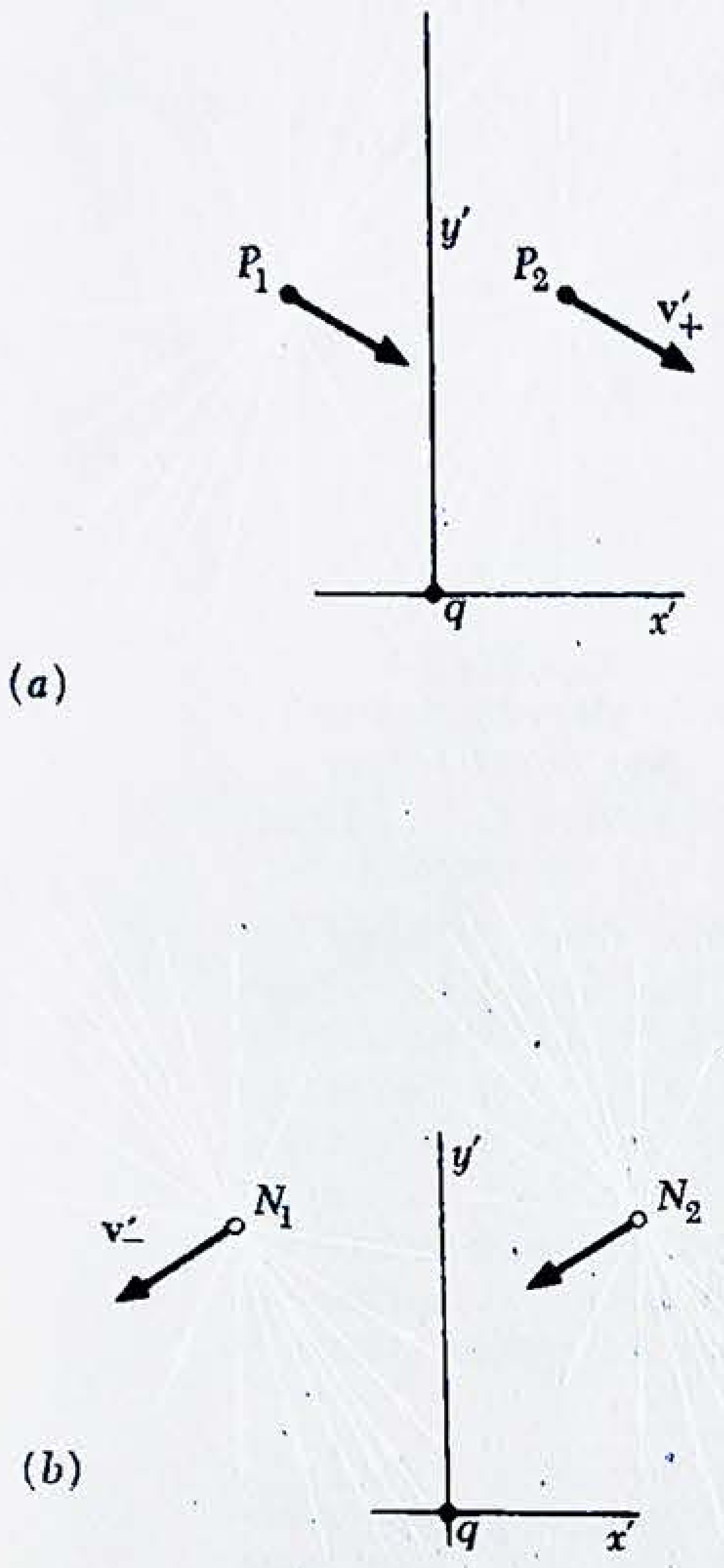
Am dedus cîmpul magnetic al unui curent rectiliniu, doar pe baza studiului cîmpului *electric* al purtătorilor de sarcină în mişcare. Doar cîteva puncte neesenţiale ale deducerii noastre sînt incomplete. Trebuie să arătăm că o forţă dependentă de viteză, de aceeaşi mărime şi direcţie corespunzătoare ia naştere şi în cazul cînd sarcina de probă se apropie sau se îndepărtează de conductor radial. Acest lucru îl putem face în acelaşi mod, numai că amănuntele matematice sînt puţin greoaie dacă încercăm să le rezolvăm riguros, fără aproximări. Interesante sînt nu transformările matematice de coordonate ci ceea ce determină existenţa forţei. Această cauză poate fi găsită fără nici un fel de calcule.

În figura 6.1, *a* am schiţat particula de probă, ce se mişcă spre conductor, în sistemul „laboratorului". În sistemul „particulei" (fig. 6.1, *b*), în care sarcina de probă este în repaus, observăm că şirul purtătorilor de sarcini pozitive şi negative se mişcă în jos, spre sarcina de probă, în timp ce unele particule se mişcă oblic, cele pozitive spre dreapta, în jos, cele negative în jos, spre stînga. Aceasta ne sugerează mişcarea unui grup de elevi în excursie. Sperăm să descoperim, în acest sistem, o intensitate a cîmpului electric $\mathbf{E}'$, îndreptat spre stînga.* Dar, atîta timp cît totul pare perfect simetric, cum poate să apară un asemenea cîmp?

Să considerăm un purtător de sarcină pozitivă P_1 din sistemul particulei şi un purtător de sarcină pozitivă P_2, simetric cu acesta. (Dacă ar fi trebuit să sumăm contribuţiile tuturor purtătorilor de sarcini pozitive, i-am fi putut

* Căutăm o forţă, care să apară unui observator, aflat în sistemul de referinţă al laboratorului, perpendiculară pe viteza particulei de probă, exact ca în primul caz, cînd forţa era perpendiculară pe viteză şi orientată spre stînga faţă de vectorul viteză.

Fig. 6.2. Se arată cum apare o forță în sistemul de referință al particulei în figura 6.1, *b*. Cîmpurile electrice (*a*) — a două sarcini pozitive, simetric dispuse și (*b*) a două sarcini negative, simetric dispuse.



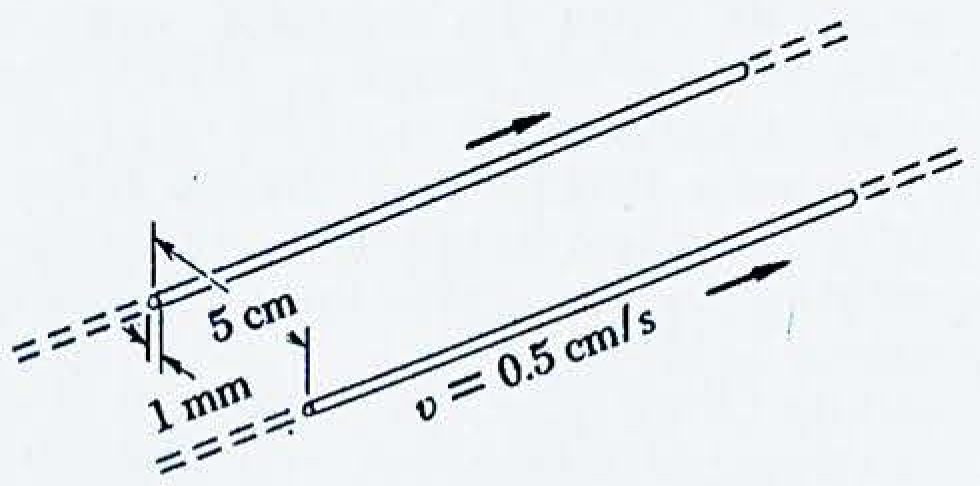
grupa în asemenea perechi simetrice — unul aflat în jumătatea din dreapta a șirului, celălalt în stînga). Cîmpurile electrice ale acestor doi purtători de sarcină sînt ilustrate în figura 6.2, *a*. Acum este clar de ce acțiunea lor asupra lui q este diferită. Ca urmare a contracției relativiste a cîmpului, dată de factorul $[1 - \beta^2 \sin^2 \theta']^{-3/2}$ în ec. 5.12, cîmpul purtătorului de sarcină P_2 în q este mai intens decît cîmpul purtătorului de sarcină P_1. Dacă cîmpurile ar fi avut simetrie sferică după direcția x', ele s-ar fi anulat reciproc. În loc de asta, cîmpul purtătorului de sarcină P_2 predomină, dînd naștere unei componente orientate spre stînga lui x'.

Să considerăm acum, doi purtători de sarcină negativă N_1 și N_2, dispuși simetric ca în figura 6.2, *b*. În acest caz, N_1 produce un cîmp mai intens și rezultă, de asemenea, o componentă a cîmpului electric în sensul negativ al lui x'. Pe de altă parte, este evident că componentele y' ale cîmpurilor purtătorilor de sarcină pozitive și negative se anulează reciproc. Rămîne o intensitate a cîmpului electric $\mathbf{E}'$ și, prin urmare, o forță ce acționează asupra lui q, paralelă la conductor și îndreptată în sensul negativ a lui x'.

Ne este clar acum că interacțiunea magnetică dintre doi purtători de sarcină în mișcare este un efect relativist. Acest lucru era indicat și de apariția factorului vv_0/c^2 în ec. (5.44). În lumea purtătorilor de sarcini electrice în mișcare, dacă c ar fi infinit de mare, magnetismul ar dispare. De aceea pare straniu că forțele magnetice sînt atît de mari încît pot pune în mișcare rotoarele motoarelor și ridica greutăți. Am remarcat, mai înainte, că forțele electrostatice ce se exercită între obiectele mari nu sînt prea semnificative. De ce nu sînt forțele magnetice mult mai mici? Explicația se află în neutralitatea electrică aproape completă a substanțelor de masă mare. Exemplul următor constituie o bună ilustrare a celor afirmate. Vom calcula forța ce apare între doi conductori paraleli străbătuți de curent.

Deoarece, în acest exemplu, ne întîlnim pentru prima oară cu cîmpul magnetic *din interiorul* substanței, ne vom întrerupe expunerea pentru a ne opri asupra acestei chestiuni. Majoritatea metalelor, inclusiv cuprul (dar

Fig. 6.3. Doi conductori în care se presupune că electronii de conducţie se mişcă cu viteza medie a mişcării ordonate de 0,5 cm/s.



nu şi fierul), şi majoritatea substanţelor în general, n-au aproape nici o influenţă asupra cîmpului magnetic. Putem presupune că inducţia magnetică **B** din interiorul cuprului este practic acelaşi ca în cazul în care curenţii ar trece prin vid. Asupra acestor chestiuni vom reveni mai amănunţit în cap. 10. Pînă atunci, vom evita să vorbim despre fier.

Considerăm doi conductori de cupru cu diametrul de 1 mm, cu distanţa dintre ei de 5 cm (fig. 6.3). Prin fiecare conductor trece un curent; să presupunem că viteza medie a electronilor de conducţie din fiecare conductor, este de 0,5 cm/s. După cum ştim, această viteză medie a mişcării ordonate este mult mai mică decît vitezele de mişcare dezordonată a electronilor. Dacă presupunem că la un atom de cupru revine un electron de conducţie, putem găsi uşor numărul electronilor de conducţie dintr-un conductor de 1 cm lungime şi diametru 1 mm. Este aproximativ egal cu $6 \cdot 10^{20}$. (Pentru această evaluare trebuie să cunoaştem densitatea cuprului — 8 g/cm^3, masa atomică a cuprului — 64 şi numărul lui Avogadro.) Atunci, densitatea liniară λ a purtătorilor de sarcini negative în mişcare este

$$\lambda = (6 \cdot 10^{20}) \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}) \approx 10^2 \frac{\text{C}}{\text{cm}} = 10^4 \frac{\text{C}}{\text{m}}. \tag{3}$$

Purtătorii de sarcini pozitive sînt în repaus. Produsul dintre λ şi viteza de drift este egal cu $10^2 \cdot 0{,}5$ ceea ce corespunde unei intensităţi a curentului de 50 A.

Să găsim forţa exercitată asupra unui electron din celălalt conductor, aflat la distanţa $r = 5$ cm. Acest electron se mişcă, de asemenea, cu viteza medie de 0,5 cm/s, dacă prin conductor trece acelaşi curent. Aplicînd ec. (5.45), obţinem:

$$F = \frac{q\lambda v v_0}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-25} \text{ N}. \tag{4}$$

Întrucît o asemenea forţă se exercită asupra fiecărui electron de conducţie din celălalt conductor, forţa totală ce acţionează asupra electronilor dintr-un conductor de lungime 1 cm este $(6 \cdot 10^{20})$ $(1{,}6 \cdot 10^{-25})$ sau aproximativ 10^{-3} N/m. Noi o observăm ca o forţă ce acţionează asupra conductorului; orice impuls primit de electroni se transmite reţelei în care sînt dispuşi. În ceea ce priveşte direcţia forţei, analiza situaţiei reprezentate în figura 5.20

arată că dacă purtătorii de sarcini de acelaşi semn se mişcă paralel unii faţă de alţii, interacţiunea magnetică tinde să apropie conductorii. Prin urmare, conductorii de cupru din exemplul nostru, dacă sînt străbătuţi de curenţi de acelaşi sens, se vor atrage cu o forţă egală cu 10^{-5} N pe centimetru de conductor. Aceasta va fi valabil pentru orice conductori rectilinii paraleli, aflaţi la aceeaşi distanţă şi străbătuţi de un curent cu intensitatea de 50 A.

10^{-5} N nu este o forţă prea mare, dar decelabilă. S-o comparăm cu forţa electrostatică care ar acţiona între doi conductori ce poartă sarcini statice necompensate de 10^4 C/m fiecare. Cîmpul electric al unui şir de purtători de sarcină de densitate λ fiind $\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ (ec. 1.26), forţa ce acţionează asupra unui centimetru dintr-un şir de purtători de sarcini similare, aflat la r cm, trebuie să fie $\lambda^2/2\pi\,\varepsilon_0 r$. Atribuind această densitate liniară de sarcină — 10^4 C/m — electronilor din conductor, obţinem o forţă de $(c/v)^2$ ori mai mare decît forţa magnetică de interacţiune de 10^{-3} N/m, ceea ce reprezintă $36\cdot 10^{14}$ N/m sau aproape $4\cdot 10^{13}$ t/cm! Fenomenele magnetice ar fi trecut neobservate, dacă natura n-ar fi conceput două feluri de sarcini capabile să anihileze interacţiunea electrostatică. Evident, o lume cu un singur fel de sarcini ar fi fost atît de diferită, încît nici nu ne-o putem imagina. La scară atomică, unde rolul primordial în interacţiunea dintre particulele elementare îl joacă forţele de tip coulombian, efectele magnetice trec pe locul al doilea în comparaţie cu interacţiunile electrice. În general vorbind, ele sînt mai slabe exact cu acel factor, care era de aşteptat, pătratul raportului dintre viteza particulei şi viteza luminii.

Interacţiunea magnetică dintre curenţii paraleli depinde doar de produsul dintre intensităţile curenţilor şi nu de densităţile de sarcină şi vitezele cu care se mişcă, luate în parte. În exemplul de mai sus, am introdus densitatea de sarcină şi viteza de mişcare pentru a compara interacţiunile electrostatice şi magnetice. De obicei, avem de-a face doar cu curentul total din fiecare conductor, iar mecanismul transportului de sarcină — dacă sînt mulţi purtători de sarcină ce se mişcă lent sau numai cîţiva care se mişcă rapid — nu ne interesează. Fie I_1 — intensitatea curentului din conductorul 1 (fig. 6.4). Presupunem că în conductorul 2, aflat la distanţa r, cantitatea de sarcină λ C/m se mişcă cu viteza v_2. Ştim că forţa exercitată pe unitatea de lungime a conductorului 2 trebuie să fie egală cu $I_1\lambda v_2/2\pi\varepsilon_0 rc^2$, ceea ce este echivalent cu:

$$\text{Forţă pe metru} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \qquad (5)$$

deoarece λv_2 reprezintă intensitatea curentului I_2 din conductorul al doilea.

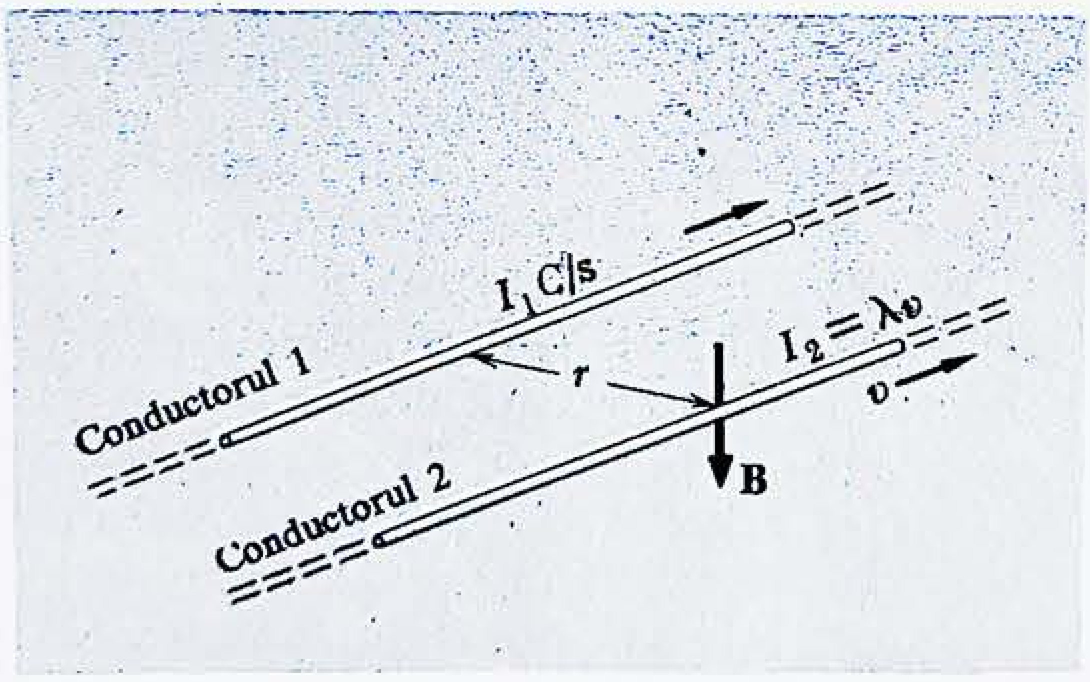


Fig. 6.4. Conductorul 1 produce o inducţie magnetică **B** în apropierea conductorului 2. Forţa exercitată asupra conductorului 2, pe lungimea de 1 cm, este dată de ec. 5.

Dacă exprimăm forţa exercitată asupra unui conductor, prin care trece un curent constant de intensitate I, aflat într-un cîmp de inducţie magnetică **B** produs de alţi curenţi, în funcţie de inducţia magnetică **B**, ea este egală cu IB pe lungimea de 1 cm a conductorului. Forţa este perpendiculară pe conductor şi pe cîmpul magnetic, putînd fi exprimată vectorial în modul următor:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{F} = I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}}\,. \tag{6}$$

În ecuaţia (6), d**F** este forţa exercitată asupra unei porţiuni mici de conductor, de lungime d**l**, străbătut de un curent constant I măsurat în amperi. Vectorul d**l** este îndreptat pe direcţia curentului de purtători de sarcini pozitive. Ecuaţia (6) decurge direct din definiţia lui **B** în ec. (1) şi din definiţia curentului în funcţie de transportul de sarcină. Ea este valabilă pentru o porţiune conductoare de orice formă; trebuie, doar, să cunoaştem vectorul inducţie magnetică **B** în orice punct al traiectoriei. Observaţi că ec. (6) poate fi obţinută, reamintindu-ne că forţa exercitată asupra unui element de sarcină dq, ce se mişcă cu viteza **v**, este $\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Cum $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{l}/\mathrm{d}t$ şi $\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t$, expresia pentru d**F** devine:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{7}$$

Unitatea practică pentru intensitatea curentului este amperul. Dacă intensitatea curentului dintr-un conductor rectiliniu este exprimată în amperi, inducţia magnetică la distanţa r m de conductor este

$$B(T) = \frac{\mu_0\left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right) I\,(\mathrm{A})}{2\pi r(\mathrm{m})}. \tag{8}$$

Analog, forţa ce se exercită asupra unui conductor străbătut de curentul de IA, într-un cîmp de inducţie magnetică de B tesla, este egală cu

$$\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{N}) = I(\mathrm{A})\mathrm{d}\mathbf{l}(\mathrm{m}) \times \mathbf{B}(\mathrm{T}). \tag{9}$$

Unitatea de măsură pentru **B**, care rezultă din aceste formule, dacă forţa este exprimată în N şi distanţa în m, se numeşte *tesla*. Ea este de multă vreme folosită de fizicieni şi ingineri şi deşi există şi alte sisteme de unităţi, ea este unitatea cel mai des utilizată pentru inducţia cîmpului magnetic. Inducţia cîmpului magnetic a Pămîntului, în apropierea suprafeţei sale, este în jur de aproximativ $5 \cdot 10^{-5}$ T. Cîmpul într-unul din conductorii din figura 6.3, produs de curentul din celălalt conductor, are intensitatea de $2 \cdot 10^{-4}$ T. Cîmpul dintre polii unui electromagnet mare se măsoară în zecimi de tesla. Sînt destul de uşor de atins valori de 1—2 tesla într-un magnet obişnuit şi 6—8 tesla într-un magnet industrial supraconductor. Obţinerea cîmpurilor de 10 tesla cer eforturi deosebite. Cîmpurile magnetice din petele solare sînt de ordinul sutimilor de tesla şi se cunosc cîteva stele la suprafaţa cărora cîmpurile sînt mai mari decît o zecime de tesla. În general, cîmpurile magnetice extinse în univers sînt relativ slabe. O măsurătoare

recentă (un tip special de măsurătoare spectroscopică) a unui cîmp magnetic interstelar dintr-o regiune mică a Galaxiei noastre, a dat o valoare în jur de 10^{-9} T. La scară galactică, o asemenea valoare a cîmpului nu este neglijabilă. De fapt, cîmpurile magnetice au un rol esențial, uneori determinant în dinamica galactică. Astfel, 10^{-4} T — valoare studiată de om de-a lungul secolelor, reprezintă acum, evaluat grosolan, media geometrică dintre cîmpurile magnetice importante în cosmologie și cele mai puternice cîmpuri obținute în laborator.

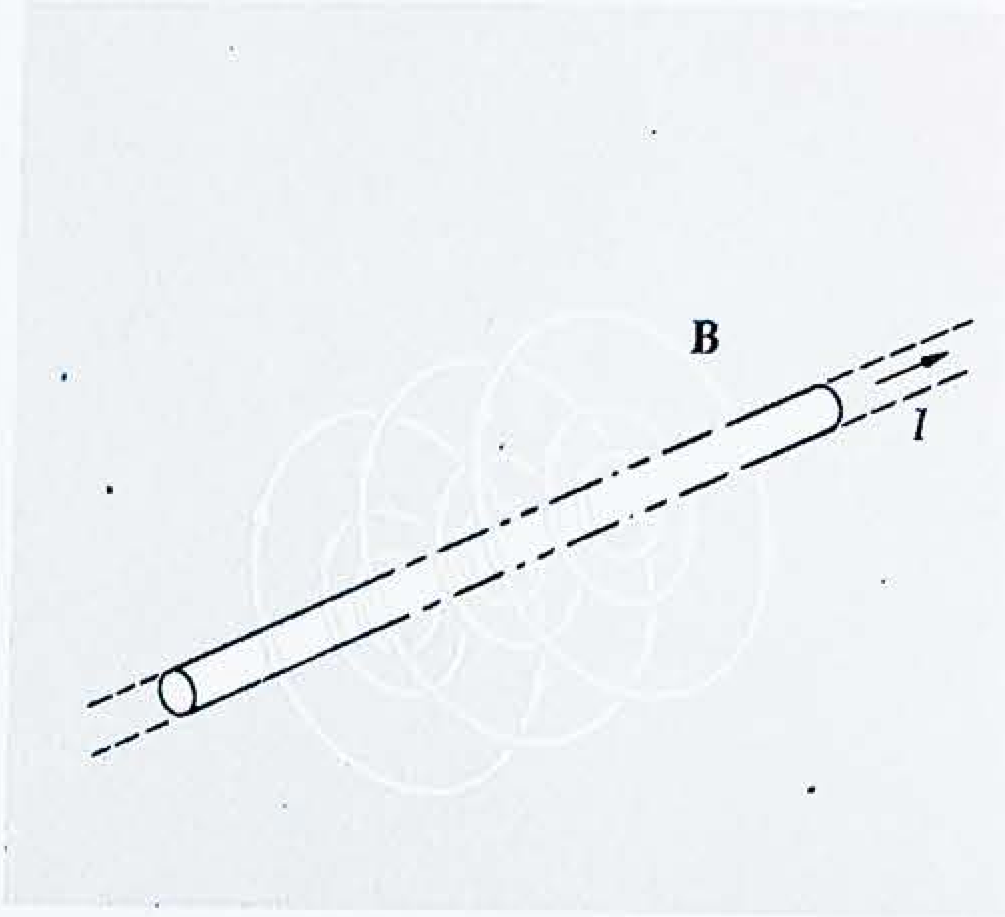
6.2. UNELE PROPRIETĂȚI ALE CÎMPULUI MAGNETIC

Cîmpul magnetic ca și cîmpul electric, ne ajută să descriem cum interacționează particulele încărcate unele cu altele. Dacă spunem că inducția magnetică în punctul (4,5; 3,2; 6,0) la orele 12^{00} este îndreptat orizontal, în sensul negativ al axei y și are valoarea de $5 \cdot 10^{-4}$ T, determinăm prin aceasta accelerația cu care se mișcă particula încărcată în acest punct de coordonate spațiu-timp. Remarcabil este faptul că o asemenea afirmație care determină, pur și simplu, mărimea vectorială **B**, epuizează tot ce se poate spune. Cunoscînd această mărime, se poate determina în mod univoc acea parte a forței care depinde de viteză și care acționează asupra unei particule încărcate *oarecare*, ce se mișcă cu o viteză *oarecare*. Aceasta face inutilă descrierea celorlalte particule încărcate care sînt surse ale cîmpului. Cu alte cuvinte, dacă două sisteme complet diferite de particule în mișcare produc, într-un punct oarecare, același **E** și **B**, atunci comportarea oricărei particule de probă în acel punct, în cele două sisteme, va fi exact aceeași. Acesta este și motivul pentru care, concepția de cîmp ca intermediar în interacțiunea particulelor, este utilă. Și tot din acest motiv, considerăm cîmpul ca o existență obiectivă, reală.

Ce este mai real, cîmpul sau particulele, a căror interacțiune o descriem cu ajutorul cîmpului? Aceasta este o chestiune mai profundă, pe care deocamdată o amînăm. Celor doi oameni, Faraday și Maxwell, cîmpul electric și magnetic le-au apărut cu desăvîrșire reale, permițîndu-le pătrunderea esenței fenomenelor și ducîndu-i, astfel, la mari descoperiri. Vom considera și noi cîmpul magnetic tot atît de real ca și ei și să studiem cîteva din proprietățile lui.

Pînă acum, am studiat doar cîmpul magnetic al unui conductor rectiliniu sau al unui filament, parcurse de un curent constant. Am găsit că direcția cîmpului este în orice punct perpendiculară pe planul ce conține filamentul și punctul în care se observă cîmpul. Mărimea cîmpului este proporțională cu $1/r$. Liniile de cîmp sînt cercuri ce înconjoară filamentul, așa cum este arătat în figura 6.5. Sensul lui **B** este dat de produsul vectorial definit mai înainte și de convenția, adoptată (arbitrar), de a scrie termenul al doilea din ecuația (1) sub forma $+q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, și din punct de vedere fizic, de faptul că o sarcină pozitivă ce se mișcă în direcția unui curent pozitiv, este atrasă

Fig. 6.5. Liniile cîmpului magnetic în jurul unui conductor rectiliniu străbătut de curent.



de acesta. Toate acestea sînt în concordanţă, dacă sensul lui **B** este raportat la sensul curentului, care este şi sursa lui, în modul indicat în figura 6.5. Dacă privim în sensul pozitiv a curentului, sensul liniilor de cîmp este în sensul acelor de ceasornic. Sau, dacă vreţi, o puteţi reţine ca regula burghiului drept.

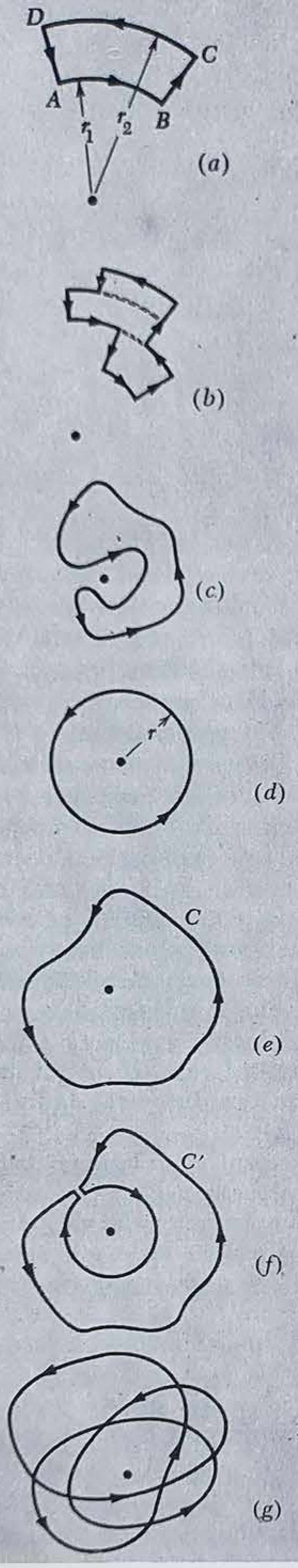
Să studiem integrala de linie din **B** de-a lungul unui contur închis din acest cîmp. (Să ne amintim că un studiu similar al cîmpului electric al unei sarcini punctiforme, ne-a dus la o proprietate simplă şi fundamentală a tuturor cîmpurilor electrostatice.) Să începem cu conturul $ABCD$ din figura 6.6, *a*. Acesta se găseşte într-un plan perpendicular pe conductor; de fapt, ne interesează doar acest plan întrucît **B** nu are componente paralele cu conductorul. Integrala de linie din **B** pe acest contur este nulă din următoarele motive. Porţiunile BC şi DA sînt perpendiculare pe **B** şi nu aduc nici o contribuţie. De-a lungul lui AB, **B** este mai mare cu r_2/r_1 decît de-a lungul lui CD; dar CD este mai lung decît AB cu acelaşi factor, întrucît aceste arce subîntind acelaşi unghi. Astfel, contribuţiile ambelor arce sînt egale şi de sens contrar şi integrala totală este nulă.

Rezultă că integrala de linie pe orice contur format din segmente radiale şi arce, ca în figura 6.6, *b*, este, de asemenea nulă. De aici şi pînă la a conchide că integrala de linie pe *orice* contur ce nu include conductorul este zero, nu e decît un pas. Pentru a clarifica totul, nu trebuie decît să arătăm că integrala pe un contur triunghiular mic tinde spre o valoare suficient de mică. În cazul cîmpului electric, ne-am folosit de acelaşi lucru.

Un contur ce nu include conductorul este arătat în figura 6.6, *c* şi care dacă ar fi din sfoară, ar putea fi îndepărtat de conductor. Integrala de linie pe orice contur asemănător este nulă.

Să considerăm, acum, un contur ce include conductorul, ca în figura 6.6, *d*. Circumferinţa este $2\pi r$, inducţia magnetică are valoarea $\mu_0 I/2\pi r$ şi este, peste tot, perpendiculară pe contur, astfel încît valoarea integralei de linie pe acest contur este $(2\pi r)$ $(\mu_0 I/2\pi r)$ sau $\mu_0 I$. Putem afirma acum că *orice* contur ce înconjoară o dată conductorul trebuie să dea aceeaşi valoare. Să considerăm, de exemplu, conturul curbiliniu C din figura 6.6, *e*. Să desenăm un contur C' (fig. 6.6, *f*), la fel cu C, dar care *nu* include conductorul. Integrala de linie pe C' este nulă şi prin urmare, integrala pe C trebuie să fie negativă faţă de integrala de pe cerc pe care am evaluat-o găsind valoarea $\mu_0 I$. Evident, semnul va depinde de sensul de parcurgere a conturului. În general, concluzia noastră poate fi scrisă sub forma:

$$\boxed{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \times \text{intensitatea curentului din interiorul conturului}} \qquad (10)$$



Ecuaţia (10) este valabilă numai în cazul în care conturul înconjoară filamentul doar o dată. Evident, pentru un contur ce-l înconjoară de N ori, ca cel din figura 6.6, g, integrala de linie va fi de N ori mai mare.

Inducţia magnetică, după cum am mai precizat, depinde doar de viteza de transport a sarcinilor, adică de numărul unităţilor de sarcină ce trec pe secundă printr-un punct dat al circuitului. În figura 6.7 este dat un circuit cu intensitatea curentului egală cu 5 mA. Viteza medie a purtătorilor de sarcină variază între 10^{-4} cm/s, în unele părţi ale circuitului şi 0,8 c, în alte părţi. Integrala de linie din **B** pe un contur închis are aceeaşi valoare pe fiecare parte a acestui contur şi anume:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = \\ = 6{,}28 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T \cdot m}. \quad (11)$$

Ceea ce am demonstrat pentru cazul unui fir lung străbătut de curent, este perfect valabil — pe baza principiului superpoziţiei — pentru cîmpul oricărui sistem de fire rectilinii. În figura 6.8, prin cîţiva conductori, curentul trece în direcţii diferite. Dacă ecuaţia (10) este valabilă pentru cîmpul magnetic al unuia din aceşti conductori, atunci ea este valabilă şi pentru cîmpul rezultant, care, în orice punct, este suma vectorială a cîmpurilor conductorilor individuali. Acesta este un cîmp destul de complicat. Cu atît

Fig. 6.6. Integrala de linie din inducţia magnetică **B** pe un contur închis depinde doar de curentul inclus.

a) Conturul se află într-un plan perpendicular pe conductor.
b) Contur format din segmente radiale şi arce.
c) Contur ce nu include conductorul.
d) Contur circular ce include conductorul.
e) Contur curbiliniu ce include conductorul.
f) Contur circular şi curbiliniu ce nu include conductorul.
g) Buclă din **n** ochiuri ce include conductorul.

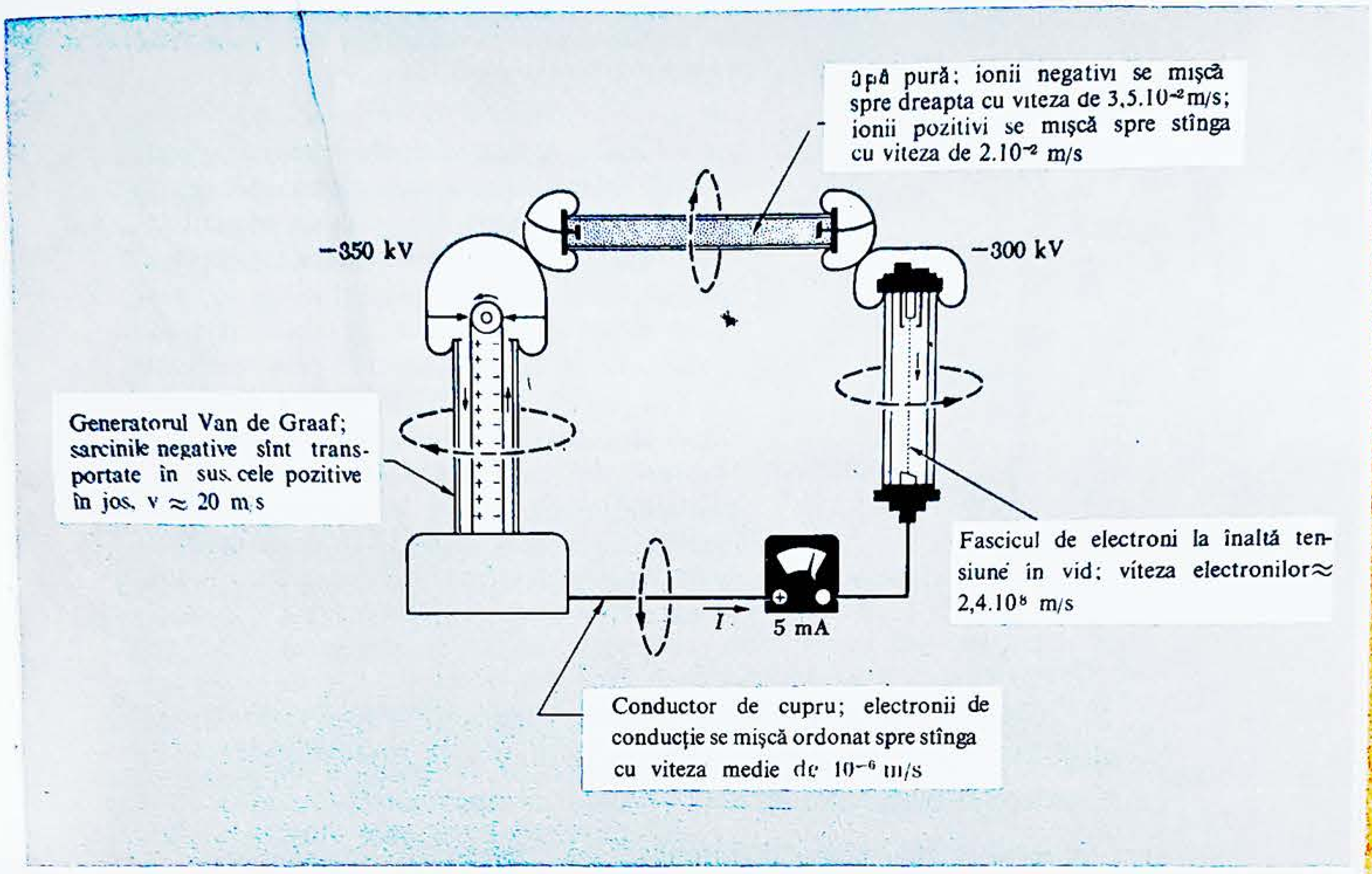


Fig. 6.7. Integrala de linie din B are exact aceeaşi valoare în jurul oricărei porţiuni din acest circuit, deşi viteza purtătorilor de sarcină, în fiecare porţiune, este diferită.

mai mult, putem găsi valoarea integralei de linie din **B**, pe conturul închis din figura 6.8, cunoscînd ce curenţi trec prin contur şi în ce sens.

Totuşi, pe noi ne interesează nu numai conductorii rectilinii lungi. Vrem să cunoaştem cîmpul magnetic al oricărei distribuţii de curenţi, de exemplu, cel al unui curent ce trece printr-o buclă. Se ajunge la concluzia că şi aceste cîmpuri mai complicate, *se supun exact aceleiaşi legi*, dată de ecuaţia (10). Integrala de linie din **B**, de-a lungul unui conductor curb este egală cu integrala de-a lungul unui conductor rectiliniu lung străbătut de acelaşi curent. Demonstrarea acestei afirmaţii depăşeşte cadrul demonstraţiilor făcute pînă acum, astfel încît, îl vom considera ca un postulat, confirmat experimental.

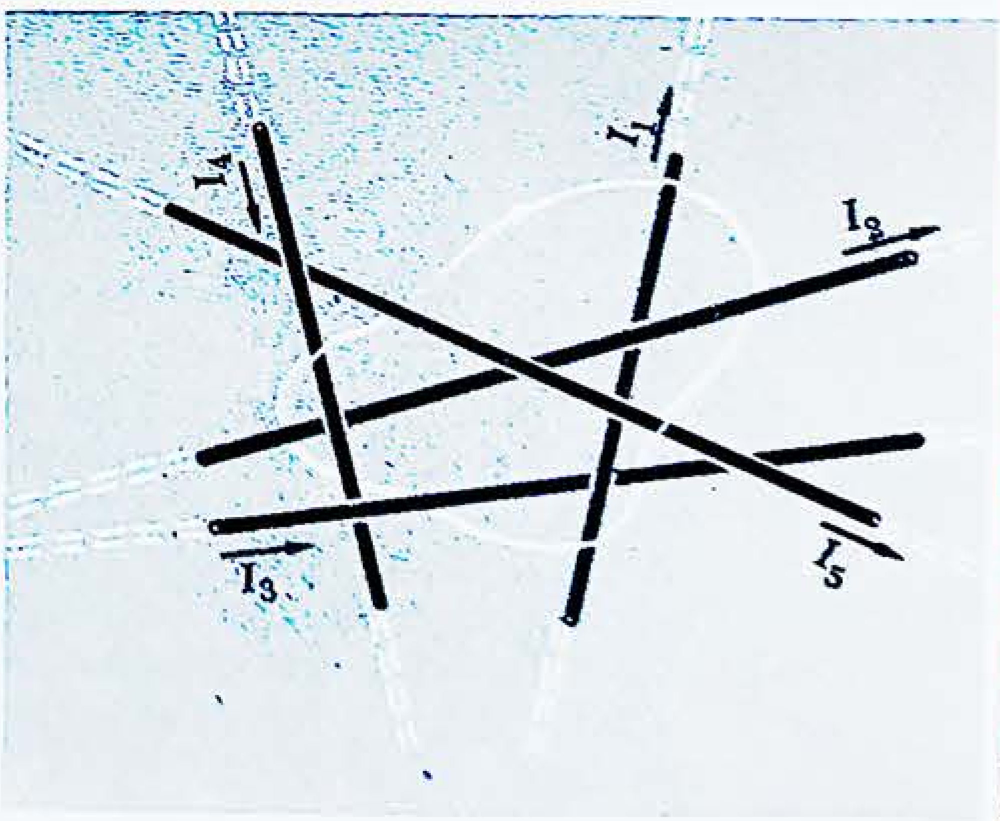


Fig. 6.8. O suprapunere de curenţi rectilinii. Integrala de linie din B de-a lungul traiectoriei închise, în sensul indicat de săgeată, este egală cu $(4\pi/c)\,(-I_4 + I_5)$.

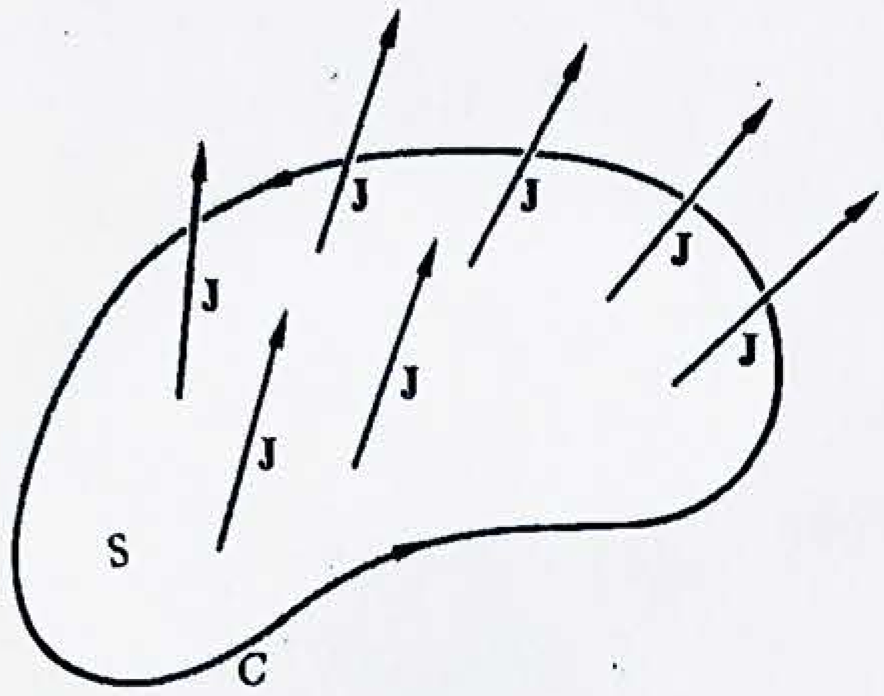


Fig. 6.9. J este densitatea de curent locală. Integrala de suprafață din J, pe suprafața S, este egală cu curentul cuprins în curba C.

Pentru a formula o lege mai generală, trebuie să vorbim despre distribuția în volum a curentului. În general, distribuția unui curent constant este caracterizată de densitatea de curent de volum $\mathbf{J}(x, y, z)$ — care diferă de la punct la punct, dar este constantă în timp. Curentul prin conductor — este un caz special în care $\mathbf{J}$ are valori mari în interiorul conductorului și este zero în rest. În capitolul 4 am vorbit despre distribuția curentului în volum și am remarcat că pentru curenții independenți de timp, $\mathbf{J}$ trebuie să satisfacă ecuația de continuitate sau condiția de conservare a sarcinii,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \tag{12}$$

Să considerăm o curbă închisă C într-o regiune prin care trec curenți. Curentul total inclus de curba C este fluxul lui $\mathbf{J}$ prin suprafața subîntinsă de C, adică integrala de suprafață $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ pe suprafața S (fig. 6.9). Prin urmare, ecuația (10) poate fi formulată mai general

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \tag{13}$$

Să comparăm această relație cu teorema lui Stokes, pe care am introdus-o în cap. 2:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{14}$$

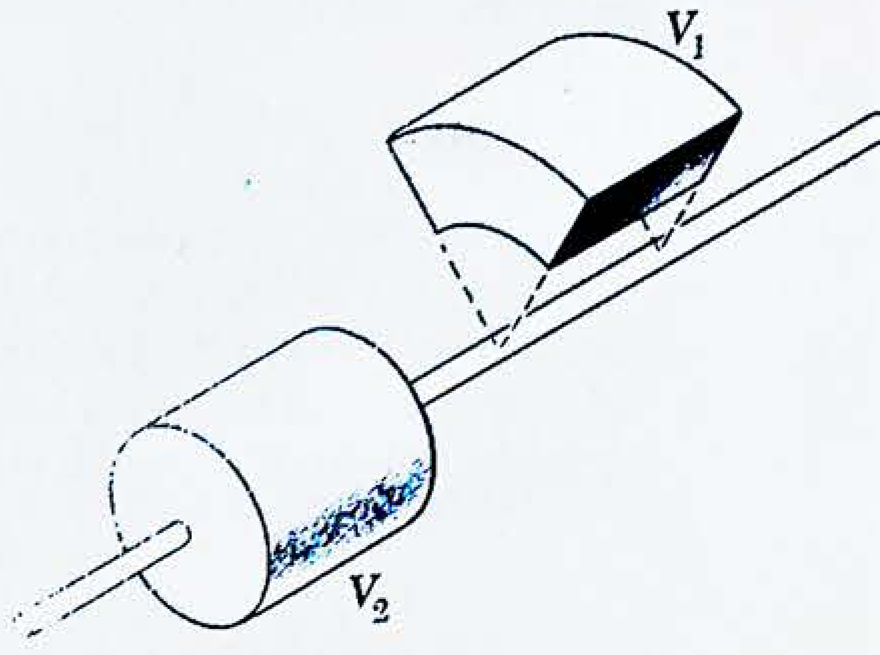
Observăm că ecuația (13) este chivalentă cu:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}\,. \tag{15}$$

Aceasta este cea mai simplă și cea mai generală expresie ce leagă cîmpul magnetic de purtătorii de sarcină în mișcare, care constituie sursele lui.

Totuși, ecuația (15) nu este suficientă pentru determinarea lui $\mathbf{B}(x, y, z)$ cînd $\mathbf{J}(x, y, z)$ este dat, întrucît cîmpuri vectoriale diferite pot avea același rotor. Trebuie s-o mai completăm cu o condiție. Să ne gîndim la divergența lui $\mathbf{B}$. Întorcîndu-ne la cîmpul magnetic al unui conductor singular liniar, observăm că divergența unui asemenea cîmp este zero. Oriunde am așeza o cutie (chiar în așa fel încît să cuprindă conductorul) nu putem sesiza vreo diferență între fluxul ce iese și cel care intră. Este suficient să observăm că în cutiile V_1 și V_2 din figura 6.10, fluxul total este zero și că dimensiunile lor

Fig. 6.10. Fluxul total al lui **B** prin fiecare cutie este nul.



pot fi reduse la zero, fără să se obţină vreun flux. Pentru un asemenea cîmp div $\mathbf{B} = 0$ şi de asemenea, pentru orice superpoziţii de asemenea cîmpuri. Din nou, vom postula că principiul poate fi extins la cîmpul dat de orice distribuţie de curenţi şi astfel condiţia complementară ecuaţiei (12) este

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \tag{16}$$

Ecuaţiile (15) şi (16), luate împreună, determină în mod univoc pe **B**, dacă **J** este dat. Dacă există două cîmpuri diferite $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ şi $\mathbf{B}_2(x, y, z)$, ambele satisfăcînd ecuaţiile (15) şi (16), diferenţa lor $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ ar fi un cîmp cu divergenţa şi rotorul egale cu zero în orice punct. Un asemenea cîmp este, pur şi simplu, un vector constant $\mathbf{B}_0$, acelaşi în toate punctele spaţiului. În acest fel, cu excepţia unei posibile adăugiri ale unui cîmp constant ce umple tot spaţiul, condiţiile rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ şi div $\mathbf{B} = 0$ determină în mod univoc cîmpul magnetic al unei distribuţii date de curenţi. Este interesant de comparat aceste condiţii cu cazurile analoge ale cîmpului electrostatic. Acolo condiţiile erau următoarele:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ şi rot } \mathbf{E} = 0. \tag{17}$$

Totuşi, în cazul cîmpului electric, porneam de la legea lui Coulomb, care dă direct contribuţia fiecărei sarcini la cîmpul electric din orice punct. Va trebui să obţinem şi aici cîteva relaţii de acelaşi tip.* Vom face asta cu ajutorul *funcţiei potenţiale.*

6.3. POTENŢIAL VECTORIAL

Am văzut că funcţia potenţială scalară $\varphi(x, y, z)$ permitea calcularea, printr-o metodă simplă, a cîmpului electrostatic a unei distribuţii de sarcini. Pentru o distribuţie oarecare de sarcini $\rho(x, y, z)$, potenţialul într-un punct oarecare (x_1, y_1, z_1) este dat de integrala de volum

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} \, dv_2. \tag{18}$$

* Vă puteţi întreba, de ce n-am pornit de la ceva echivalent cu legea lui Coulomb pentru interacţiunea curenţilor. Răspunsul e dat de faptul că spre deosebire de sarcina electrică, o porţiune de fir parcursă de curent nu este un obiect independent, care poate fi izolat fizic. Nu se poate face o experienţă pentru determinarea cîmpului unei *porţiuni* de circuit; dacă restul circuitului nu există, curentul nu poate fi constant fără a încălca condiţia de continuitate.

Integrarea se face pe toată distribuţia de sarcini şi r_{12} este distanţa de la (x_2, y_2, z_2) la (x_1, y_1, z_1). Intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ este egal cu minus gradient din φ:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \tag{19}$$

Această metodă nu se poate aplica aici, întrucît inducţia $\mathbf{B}$ este esenţial diferită. Rotorul lui $\mathbf{B}$ nu este obligatoriu egal cu zero şi prin urmare, în cazul general, $\mathbf{B}$ nu poate fi gradientul unui potenţial scalar. Cunoaştem, totuşi, un alt tip de vector — vectorul rotor. Rezultă că $\mathbf{B}$ poate fi reprezentat nu ca gradientul unei funcţii scalare ci ca rotorul unei funcţii *vectoriale:*

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}}. \tag{20}$$

După aparenta analogie, numim $\mathbf{A}$ *potenţial vectorial.* În acest caz, nu este evidentă utilitatea unui asemenea procedeu. Aceasta va ieşi în evidenţă mai tîrziu. Este încurajator faptul că ec. (16) este automat satisfăcută întrucît div rot $\mathbf{A} = 0$ pentru orice $\mathbf{A}$.* Sau cu alte cuvinte, faptul că div $\mathbf{B}=0$, dă posibilitatea exprimării lui $\mathbf{B}$ ca rotorul unei alte funcţii vectoriale. Sarcina noastră este acum să vedem cum putem calcula pe $\mathbf{A}$, cînd distribuţia de curent $\mathbf{J}$ este dată, pentru ca ec. (20) să descrie corect cîmpul magnetic. Pe baza ec. (15), relaţia dintre $\mathbf{J}$ şi $\mathbf{A}$ este

$$\text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{21}$$

Ecuaţia (21), fiind o ecuaţie vectorială, reprezintă, de fapt, trei ecuaţii. Vom scrie una din ele, de exemplu componenta x. Componenta x a rotorului $\mathbf{B}$ este $\partial B_z/\partial y - \partial B_y/\partial z$. Componentele z şi y ale lui $\mathbf{B}$ sînt, respectiv:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{22}$$

Prin urmare, componenta x a ec. (21) se scrie:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \mu_0 \mathbf{J}_x. \tag{23}$$

Presupunem că în cazul funcţiilor noastre ordinea derivării parţiale poate fi schimbată. Folosind această proprietate şi după cîteva transformări, ecuaţia (23) poate fi scrisă sub forma:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \mu_0 \mathbf{J}_x. \tag{24}$$

Pentru mai multă simetrie, să adunăm şi să scădem în partea stîngă a ecuaţiei acelaşi termen, $\partial^2 A_x/\partial x^2$:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \mu_0 J_x. \tag{25}$$

* Dacă acest lucru nu vă este cunoscut, revedeţi problema 2.15.

În primii trei termeni, recunoaştem laplaceanul lui A_x cu semnul minus. Expresia din paranteză este divergenta lui **A**. Acum construirea lui **A** este la latitudinea noastră. Trebuie să fim atenţi doar la rotor, divergenţa o putem alege oricum. Trebuie să impunem doar condiţia ca*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{26}$$

Cu alte cuvinte, dintre diferitele funcţii care ar satisface condiţia ca rot **A** = **B**, le alegem doar pe acelea care au şi divergenţa zero. Atunci din ecuaţia (25) rămîne doar

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 J_x. \tag{27}$$

$\mathbf{J}_x$ este o cunoscută funcţie scalară de x, y, z. Să comparăm ecuaţia (27) cu ecuaţia lui Poisson (2.70), care se scrie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{28}$$

Cele două ecuaţii sînt identice ca formă. Noi ştim deja cum să găsim soluţia ecuaţiei (28). Soluţia este integrala de volum (18). Prin urmare, o soluţie a ecuaţiei (27) trebuie să fie

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x(x_2, y_2, z_2)\mathrm{d}v_2}{r_{12}}. \tag{29}$$

Celelalte componente trebuie să satisfacă relaţii similare. Toate pot fi reunite într-o relaţie vectorială:

$$\boxed{\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2)\mathrm{d}v_2}{r_{12}}}. \tag{30}$$

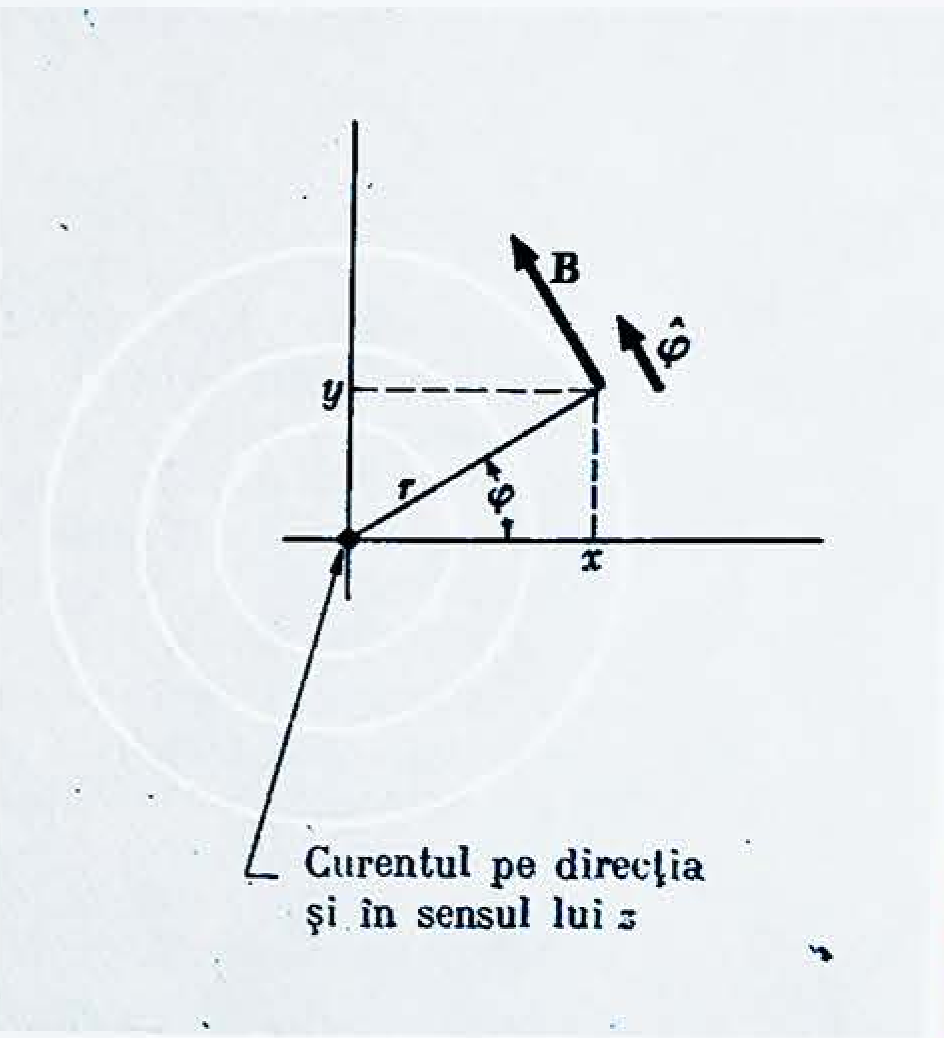


Fig. 6.11. Cîteva linii de forţă în jurul unui filament străbătut de curent (iese din planul figurii spre noi).

Există doar o singură piedică: pentru a obţine ecuaţia (27) am presupus că div **A** = 0. De unde ştim că **A** dat de ecuaţia (30) va avea această proprietate? Din fericire, se poate demonstra că este aşa.

Ca exemplu de potenţial vectorial să considerăm un conductor liniar lung străbătut de un curent de intensitate I. În figura 6.11 curentul iese din planul figurii spre noi, fiind îndreptat de-a lungul axei pozitive z. Noi ştim cum

---

* Să vedem de ce putem proceda aşa. Presupunem că **A** este astfel încît rot **A** = **B**, dar div **A** = $f(x, y, z) \neq 0$. Considerîndu-l pe f ca densitatea de sarcină ρ într-un cîmp electrostatic, este evident că putem găsi un cîmp **F**, analogul cîmpului electrostatic **E**, astfel încît div **F** = f. Dar noi ştim că rotorul unui asemenea cîmp va fi zero. Prin urmare, putem aduna **F** cu **A** obţinînd un nou cîmp cu rotorul căutat şi divergenţa zero.

cîmpul magnetic al unui conductor liniar. Liniile de cîmp sînt circulare, aşa cum s-a mai arătat în figura 6.5. În figura 6.11 sînt arătate cîteva. Mărimea inducţiei **B** este $\mu_0 I/2\pi r$. Folosind un vector unitar îndreptat pe „circumferinţă", putem scrie vectorul **B** sub forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \hat{\varphi}}{2\pi r}. \tag{31}$$

Observînd că vectorul unitar $\hat{\varphi}$ este $-\sin\varphi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\, \hat{\mathbf{y}}$, îl putem exprima pe **B** în funcţie de x şi y în modul următor:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I(-\sin\varphi \hat{x} + \cos\varphi \hat{y})}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2+y^2}\right). \tag{32}$$

Funcţia vectorială **A** (x, y, z) care satisface condiţia $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ este următoarea:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}\, \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2). \tag{33}$$

Pentru a verifica, să calculăm componentele lui $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-\mu_0 I y}{2\pi(x^2+y^2)} \ (= B_x)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{+\mu_0 I x}{2\pi(x^2+y^2)} \ (= B_y) \tag{34}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \ (= B_z).$$

Bineînţeles, aceasta nu este singura funcţie care poate servi ca potenţial vectorial în cazul cîmpului dat **B**. Funcţiei **A** din ecuaţia (33) i se poate adăuga orice funcţie vectorială cu rotorul nul. Toate acestea sînt valabile în regiunea din exteriorul conductorului. În interiorul conductorului **B** este altul şi prin urmare şi funcţia **A** trebuie să difere. Nu este greu de găsit o funcţie vectorială potenţială corespunzătoare interiorului unui conductor solid rotund (v. problema 6.13).

Întîmplător, pentru cazul particular de mai sus, **A** n-a putut fi obţinut din ecuaţia 30. Datorită faptului că conductorul este infinit lung integrala va fi divergentă. Aceasta ne aminteşte de dificultăţile întîlnite în cap. 2, obţinînd un potenţial scalar pentru cîmpul electric al unui conductor încărcat. Într-adevăr, cele două probleme sînt foarte asemănătoare, aşa cum ne şi aşteptam datorită geometriilor identice şi similaritatea ec. 30 şi 18. Am găsit (ec. 2.19) că potenţialul scalar potrivit pentru o sarcină liniară este $-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln(x^2+y^2) + o$ *constantă arbitrară*. Asta înseamnă că potenţialul zero se atribuie unui punct arbitrar care nu se găseşte nici pe conductor, nici la o distanţă infinit de mare de el. Ambele potenţiale — cel scalar şi cel vectorial (din ec. 33) au singularităţi în sursă şi la infinit.

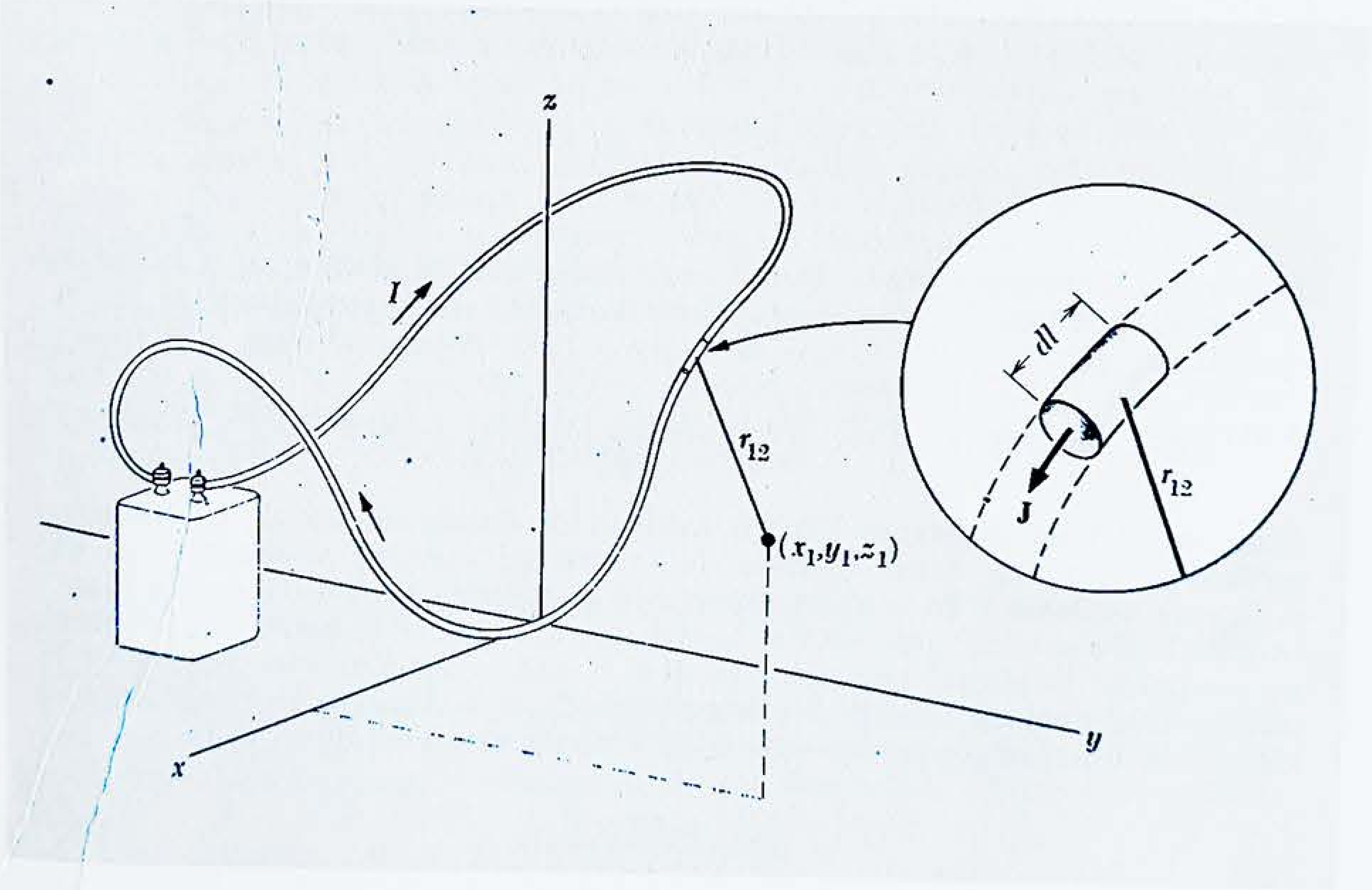
6.4. CÎMPUL UNUI CONDUCTOR OARECARE STRĂBĂTUT DE CURENT

Figura 6.12 reprezintă bucla unui conductor străbătut de curentul I. Potențialul vectorial **A** în punctul (x_1, y_1, z_1) este dat, conform ecuației 30, de integrala de-a lungul buclei. Dacă curentul trece printr-un conductor subțire, putem lua ca element de volum dv_2 o porțiune scurtă din conductor de lungime dl. Densitatea de curent J este I/a, unde a este aria secțiunii transversale și $dv_2 = a dl$. Prin urmare $\mathbf{J} dv_2 = I d\mathbf{l}$, și dacă vectorul $d\mathbf{l}$ îl alegem în sensul pozitiv al curentului, putem înlocui, pur și simplu, $\mathbf{J} dv_2$ cu $I d\mathbf{l}$. Astfel, pentru un conductor subțire sau un filament, putem scrie ecuația (30) sub forma unei integrale de linie de-a lungul circuitului:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}}{r_{12}}. \tag{35}$$

Calculul lui **A** în fiecare punct și apoi găsirea lui **B** din rotorul lui **A** ar fi o cale prea lungă. Va fi mai util să separăm o contribuție la integrala de linie a lui **A** și anume contribuția din partea elementului de conductor din originea axelor de coordonate, unde curentul curge în direcția lui x (fig. 6.13). Vom nota lungimea acestui segment cu dl. Fie $d\mathbf{A}$ contribuția acestui element în integrala lui **A**. Atunci în punctul (x, y, 0), care se găsește în

Fig. 6.12. Fiecare element al buclei parcurse de curent contribuie la potențialul vector A din punctul (x_1, y_1, z_1).



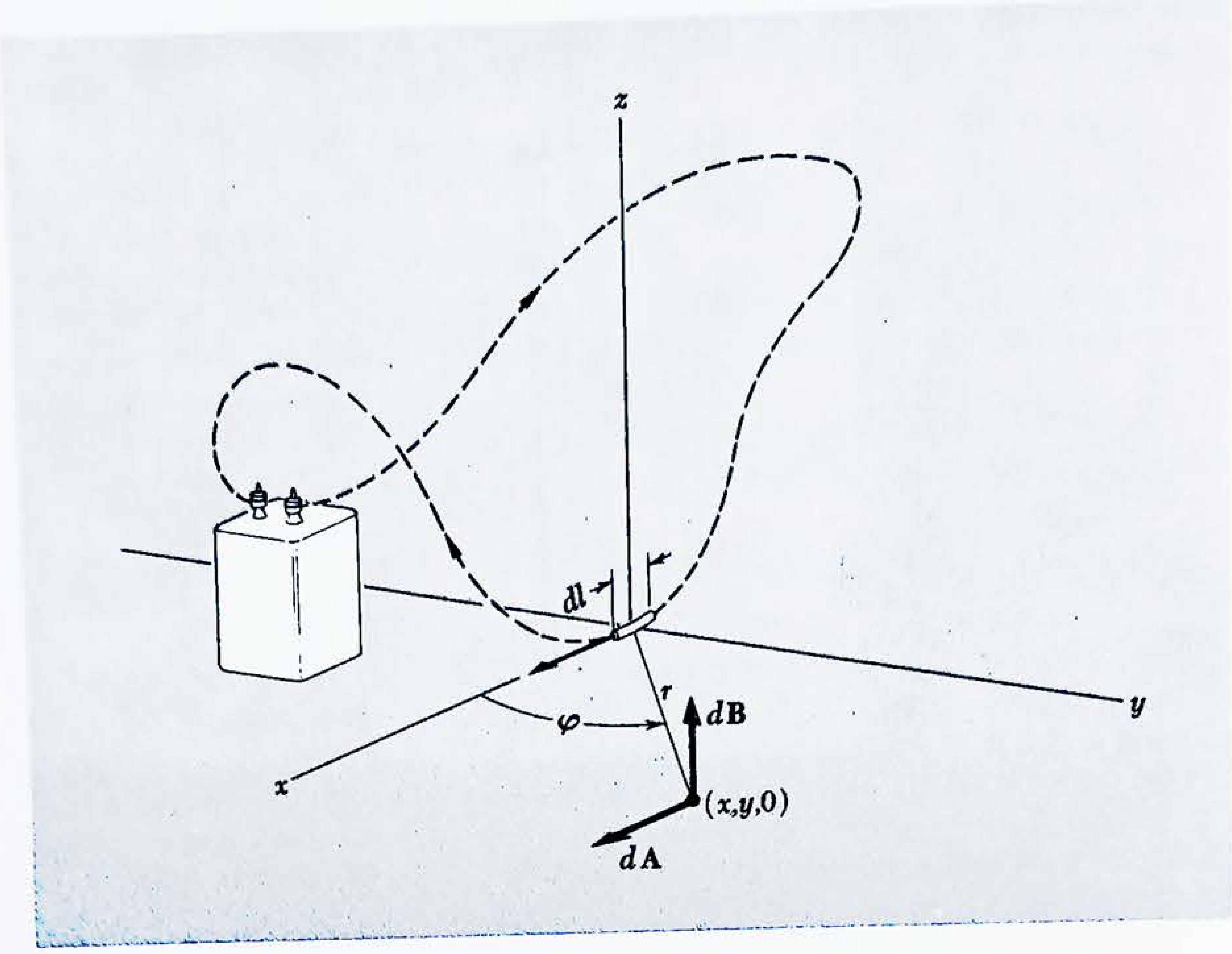


Fig. 6.13. Dacă putem găsi contribuţia dA, a elementului considerat, la A, putem calcula contribuţia acestui element la B, folosind formula B = rot A.

planul xy, vectorul **dA**, a cărui direcţie coincide cu sensul pozitiv al axei x, este egal cu

$$\mathbf{dA} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{36}$$

Din motive de simetrie, este clar că contribuţia acestei părţi a lui **A** la rot **A** va fi perpendicular la planul xy. Notînd partea corespunzătoare a lui **B** cu **dB**, avem

$$\mathbf{dB} = \mathrm{rot}\ (\mathbf{dA}) = \hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l \cdot y}{4\pi(x^2+y^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l \sin \varphi}{4\pi r^2} \tag{37}$$

Acest rezultat ne eliberează dintr-o dată de un sistem de axe de coordonate particular. Evident, totul depinde de orientarea relativă a elementului **dl** şi de raza vectoare **r** de la acest element la locul unde se află cîmpul **B**. Contribuţia la **B** a oricărui element **dl** al conductorului poate fi luată ca un vector perpendicular pe planul ce conţine pe **dl** şi **r**, a cărui mărime este $I\mathrm{d}l \sin \varphi/r^2$, unde φ este unghiul format de direcţia lui **dl** cu **r**. Aceasta se poate exprima concis folosind produsul vectorial şi este ilustrată de figura 6.14.

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 I \mathbf{dl} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}. \tag{38}$$

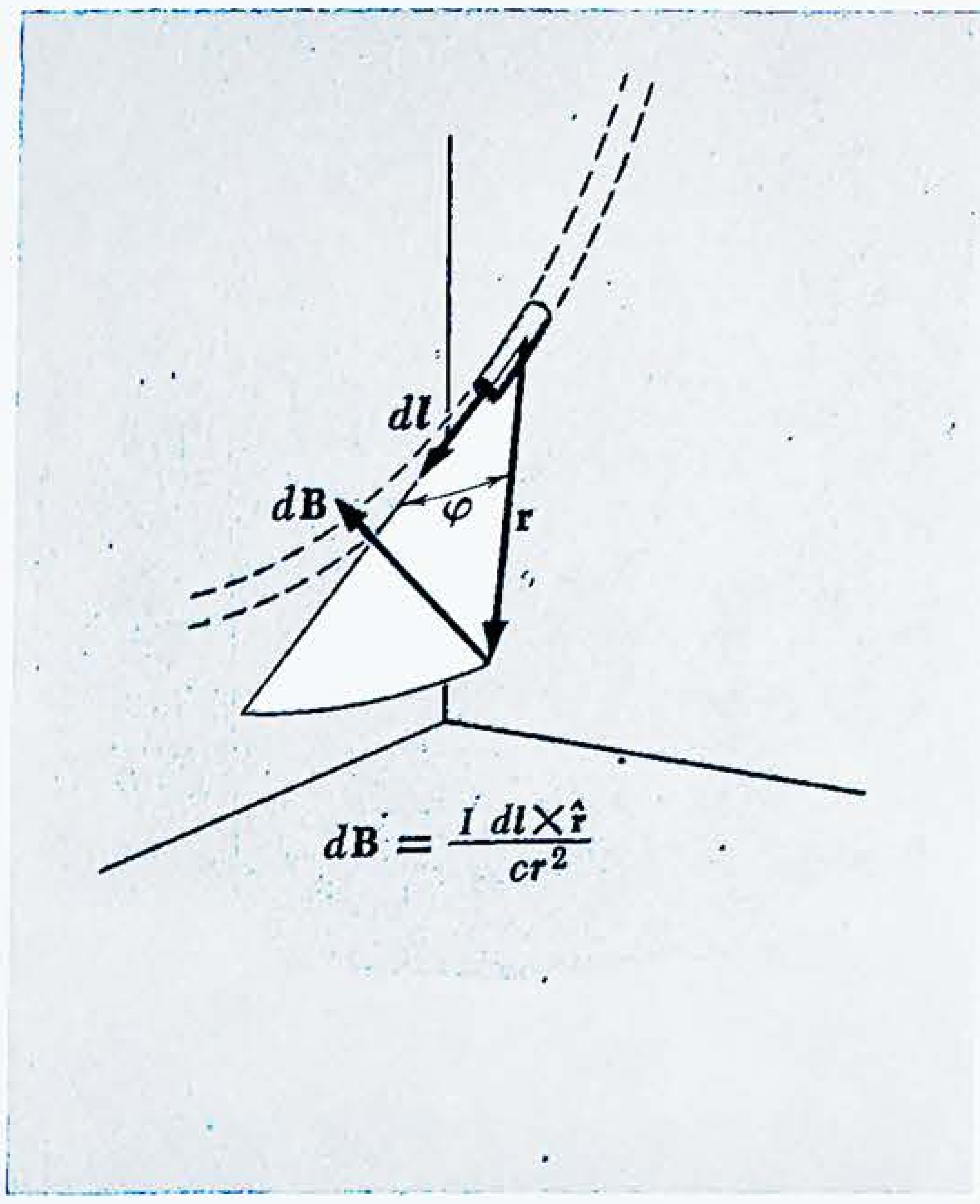


Fig. 6.14. Cîmpul oricărui circuit poate fi calculat folosind relația $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ pentru contribuția fiecărui element de circuit.

Dacă sînteți familiarizați cu calculul vectorial, puteți trece ușor de la ecuația (35) la ecuația (38). Scriind $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$, unde $d\mathbf{A} = I d\mathbf{l}/r$, îl considerăm pe ∇ un vector, inversînd produsul vectorial și schimbînd semnul. Aici, $d\mathbf{l}$ este constant, ∇ operînd numai asupra lui $1/r$, neputîndu-ne descurca altfel! Ne reamintim că $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$ (ca în trecerea de la potențialul lui Coulomb la cîmpul lui Coulomb). Astfel:

$$d\mathbf{B} = \nabla \times \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{\mathbf{l}} \times \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}. \quad (39)$$

Ecuația (38) este cunoscută în istoria fizicii ca legea lui Biot-Savart. Esența ei constă în aceea că dacă **B** este calculat integrînd pe tot conturul, luînd în considerare contribuțiile tuturor elementelor date de această formulă — atunci obținem valoarea corectă pentru **B** rezultant. Așa cum am remarcat și la nota din josul paginii de la paragraful 6.2, fizic nu poate fi determinată contribuția unei porțiuni de circuit. De fapt, ecuația (38) nu este singura formulă care poate da rezultatul corect pentru **B**, ei i se poate adăuga orice funcție care să fie nulă în urma integrării pe conturul închis.

Se pare că ne putem lipsi de potențialul vectorial, după ce ne-a fost atît de util. Într-adevăr, adeseori din punct de vedere practic, este mai ușor de calculat cîmpul unui sistem de curenți direct, decît să găsim mai înainte potențialul vectorial. Vom da cîteva exemple în paragraful următor. Potențialul vectorial este totuși important, din motive mai profunde. În primul rînd, el ne-a pus în evidență surprinzătorul paralelism dintre relațiile intensității cîmpului electrostatic **E** și sursele sale — sarcinile electrice și ale inducției magnetice **B** și sursele sale — curenții staționari. Utilitatea noțiunii de potențial vectorial ne va fi relevată mai tîrziu la studiul cîmpurilor nestaționare și a radiației electromagnetice.

6.5. CÎMPUL PRODUS DE SPIRE ȘI BOBINE

În figura 6.15, *a* este reprezentat un filament, în formă de inel circular de rază *b*, străbătut de curent. Fără nici un calcul, putem spune că cîmpul magnetic al acestei surse va arăta ca cel din figura 6.15, *b*, în care am trasat

citeva linii de cîmp în planul ce trece prin axa de simetrie. Întreg cîmpul trebuie să aibă o simetrie sferică în jurul acestei axe (axa z în fig. 6.15, *a*) şi chiar liniile trebuie să fie simetrice faţă de inel — planul xy. Foarte aproape de filament cîmpul va semăna cu cel din apropierea unui conductor rectiliniu lung, întrucît în acest caz porţiunile îndepărtate ale spirei sînt relativ neimportante.

Folosind ecuaţia (38), este uşor de calculat intensitatea cîmpului pe axă. Fiecare element al spirei, de lungime dl, dă un $\mathbf{dB}$ perpendicular pe $\mathbf{r}$. Ne trebuie doar componenta z a lui $\mathbf{dB}$, deoarece ştim că intensitatea totală a cîmpului pe axă trebuie să fie pe direcţia ei:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}\,\frac{b}{r}. \qquad (40)$$

Integrînd pe toată lungimea spirei, obţinem $\int dl = 2\pi b$, astfel încît intensitatea cîmpului pe axă în orice punct z este

$$B_z = \frac{\mu_0 b^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0 b^2 I}{2(b^2 + z^2)^{3/2}} \text{ (intensitatea cîmpului pe axă).} \qquad (41)$$

În centrul spirei, $z = 0$, valoarea intensităţii cîmpului este

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2b} \text{ (intensitatea cîmpului în centru).} \qquad (42)$$

Bobina cilindrică din figura 6.16, *a* este numită de obicei solenoid. Presupunem că firul este înfăşurat strîns şi uniform astfel încît numărul de spire pe unitatea de lungime este constant pe toată lungimea cilindrului şi egal cu n. În realitate curentul circulă helicoidal, dar dacă spirele sînt numeroase

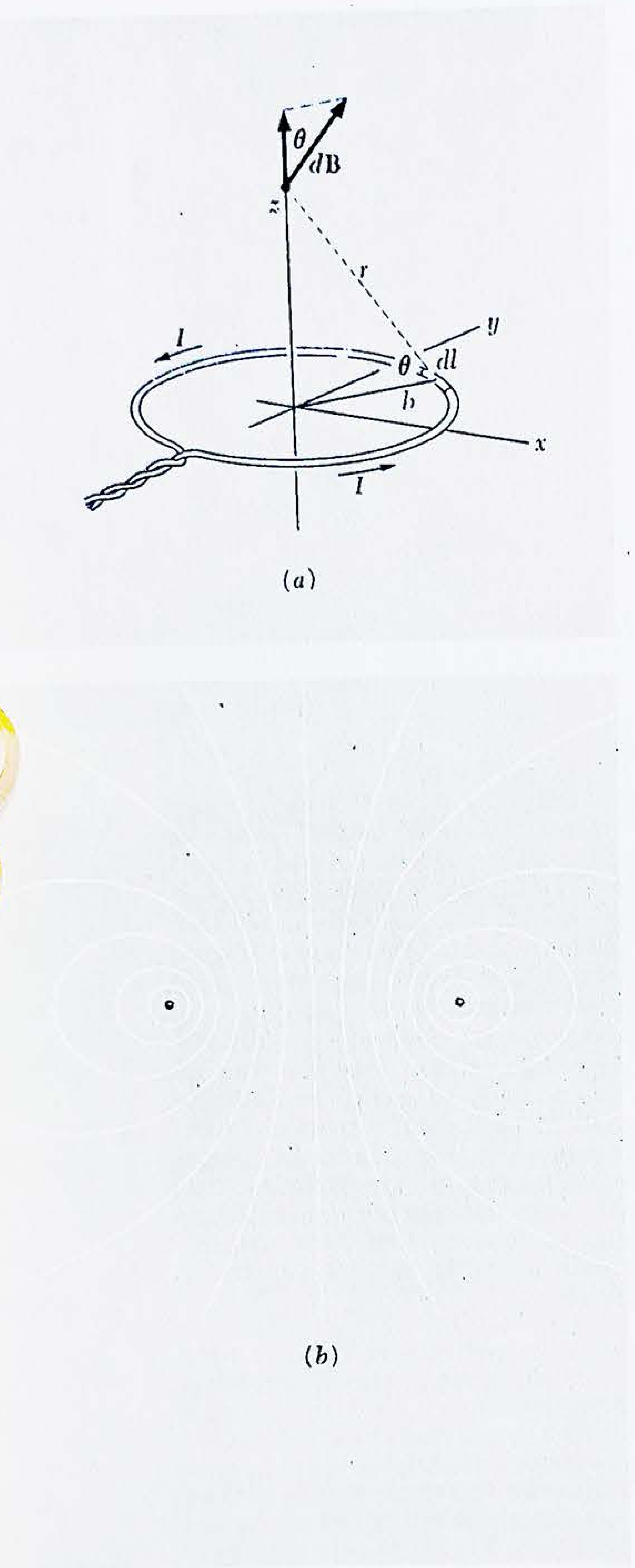


Fig. 6.15. Cîmpul magnetic al unui inel parcurs de curent. *(a)* Calculul cîmpului pe axă; *(b)* cîteva linii de cîmp.

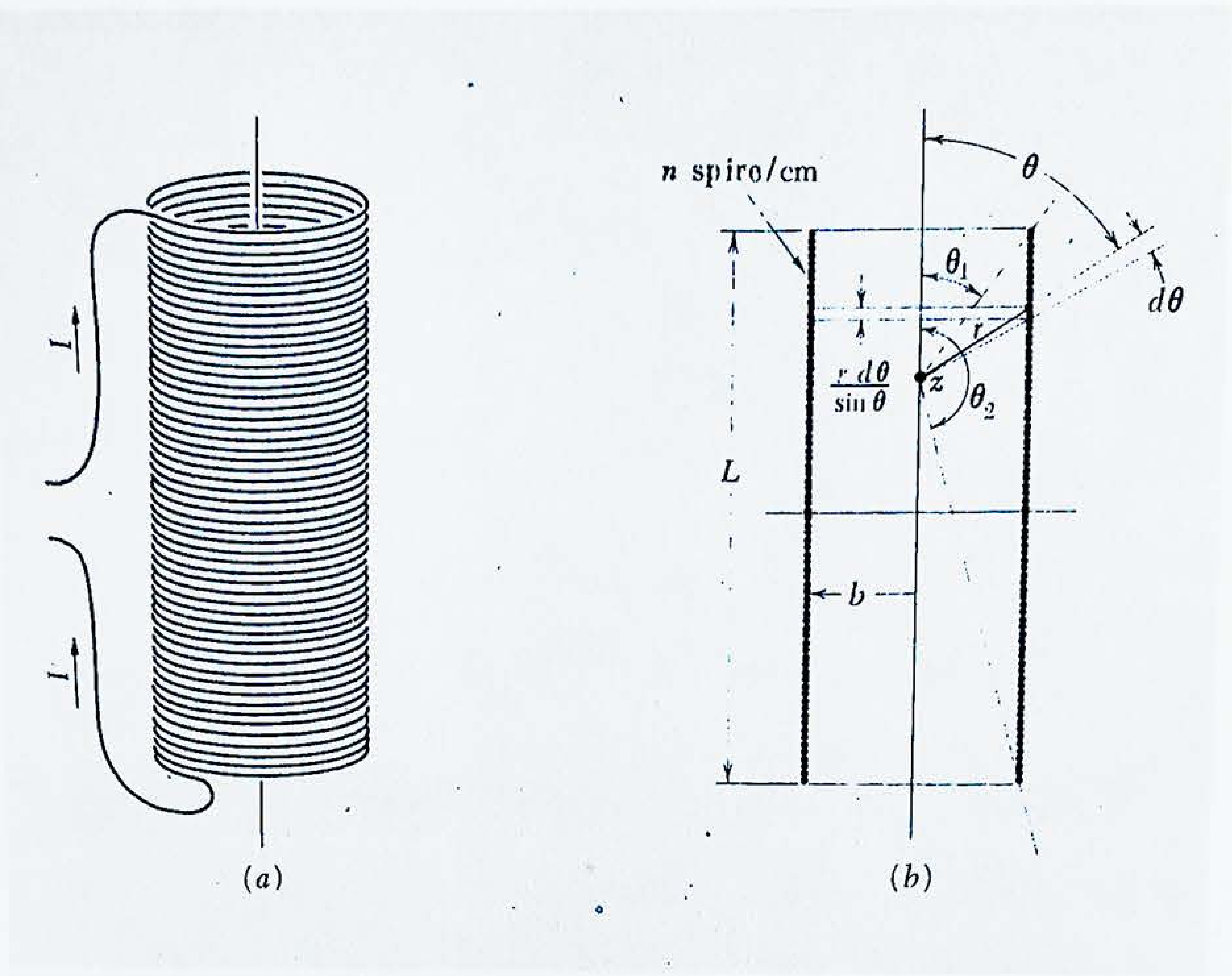


Fig. 6.16. *(a)* Solenoid. *(b)* Calculul cîmpului pe axa unui solenoid.

şi înfăşurate una lîngă alta, putem neglija acest lucru şi putem considera solenoidul ca un mănunchi de spire parcurse de curent. Prin urmare, ca punct de plecare pentru calculul intensităţii cîmpului, într-un punct oarecare z de pe axa solenoidului, putem lua ecuaţia (41). Să considerăm la început contribuţia spirei străbătute de curent aflată între razele duse din punctul z şi care formează cu axa unghiurile θ şi $\theta + \mathrm{d}\theta$. Lungimea acestui segment de solenoid, conturat în figura 6.16, *b*, este $r\mathrm{d}\theta/\sin\theta$ şi, prin urmare, solenoidul este echivalent cu o spiră străbătută de un curent de intensitate $Inr\mathrm{d}\theta/\sin\theta$. Întrucît $r = b/\sin\theta$, contribuţia acestei spire la intensitatea cîmpului axial este

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 b^2}{2r^3}\,\frac{Inr\,\mathrm{d}\theta}{\sin\,\theta} = \frac{\mu_0 In}{2}\sin\,\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{43}$$

Integrînd între limitele θ_1 şi θ_2, obţinem:

$$B_z = \frac{\mu_0 In}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 In}{2}(\cos\,\theta_1 - \cos\,\theta_2). \tag{44}$$

În reprezentarea grafică din figura 6.17, *a* intensităţii cîmpului pe axa unei bobine a cărei lungime este de patru ori diametrul ei, am folosit ecuaţia (44). În ordonată este inducţia magnetică B_z raportată la inducţia magnetică într-o bobină de lungime infinită, cu acelaşi număr de spire pe

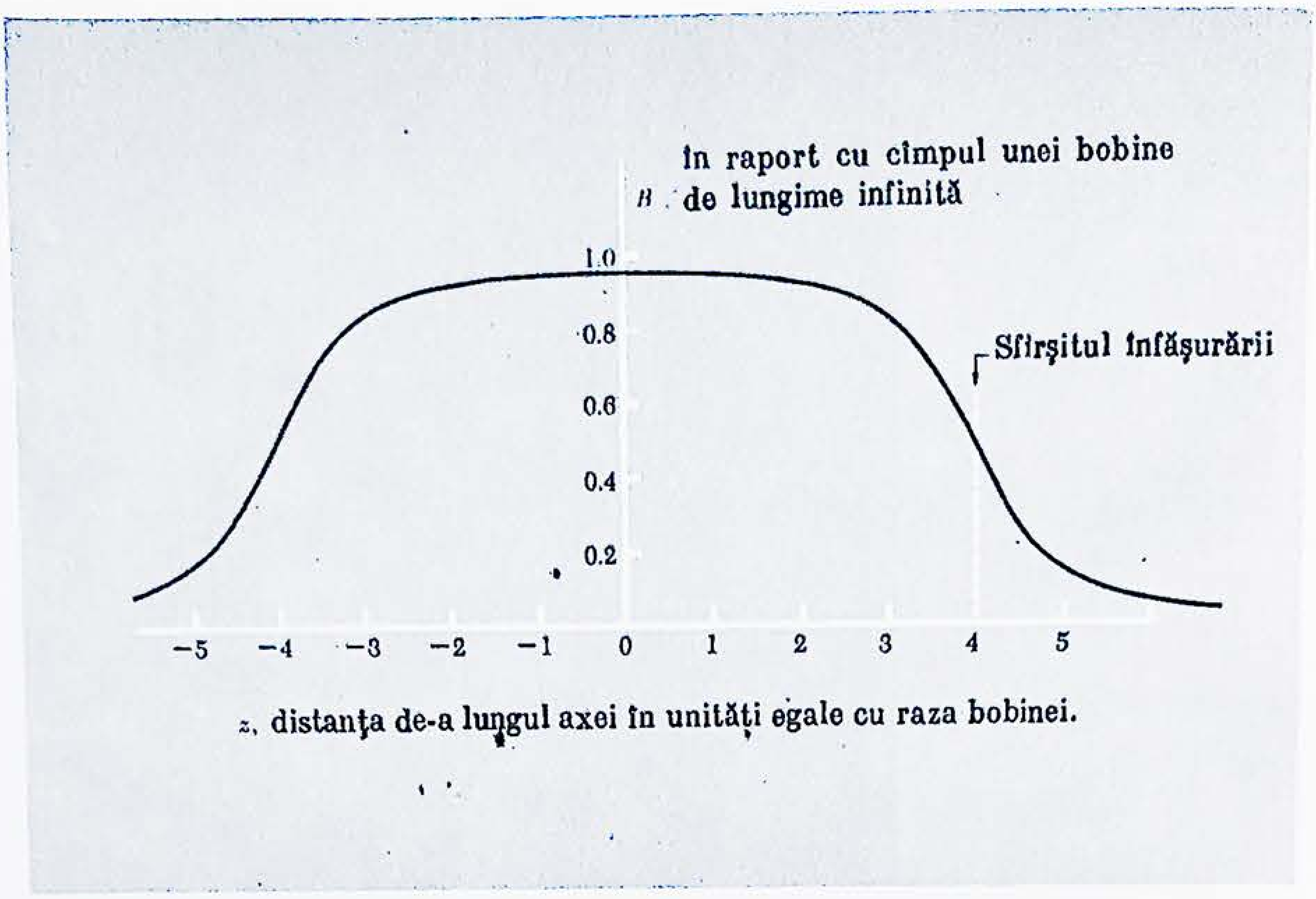


Fig. 6.17. Inducţia magnetică B_z pe axa solenoidului din fig. 6.18.

unitatea de lungime şi străbătute de acelaşi curent. Pentru o bobină infinită $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = \pi$, astfel încît

$$B_z = \mu_0 In \text{ (solenoid infinit lung).} \tag{45}$$

În centrul bobinei „patru pe unu" inducţia magnetică este foarte apropiată de această valoare şi rămîne aproape constantă pînă cînd nu ne apropiem de unul din capete.

Figura 6.18 ilustrează liniile cîmpului magnetic în interiorul şi în jurul unei bobine de asemenea dimensiuni. Observaţi că unele linii de cîmp trec efectiv prin înfăşurare. Stratul cilindric de curent constituie o suprafaţă de discontinuitate pentru cîmpul magnetic. Dacă am fi examinat cîmpul în imediata apropiere a conductorilor, n-am fi găsit, bineînţeles, nişte inflexiuni bruşte ci nişte căi foarte complicat vălurite ale liniilor de cîmp în jurul şi prin fiecare conductor în parte.

Este foarte posibilă realizarea unui solenoid a cărui înfăşurare să constea dintr-o *singură* spiră dintr-un conductor subţire lat ca banda din figura 6.19. Şi aici pot fi aplicate calculele noastre şi diagrama din figura 6.18, dacă se înlocuieşte nI cu curentul ce trece prin unitatea de lungime a benzii. În ce priveşte schimbarea direcţiei liniei de cîmp ce pătrunde prin perete, are loc numai în secţiunea benzii aşa cum apare în detaliul din figura 6.19.

Am fi putut găsi cîmpul unui solenoid infinit lung fără a mai face calculele ce ne-au dus la ec. (45). Este evident că într-un solenoid infinit lung în direcţia axei z nu se schimbă nimic. Cîmpul trebuie să fie peste tot paralel

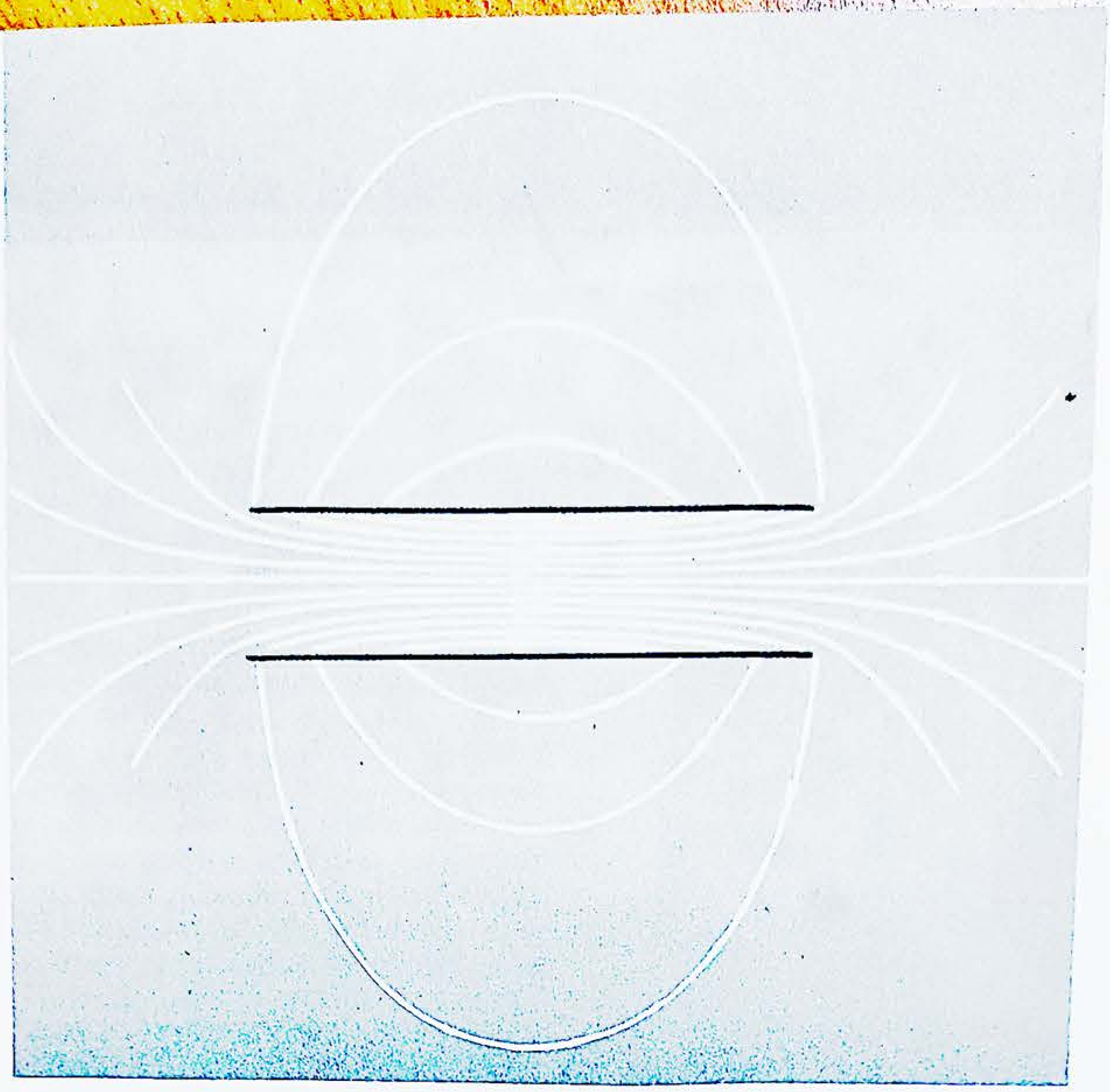
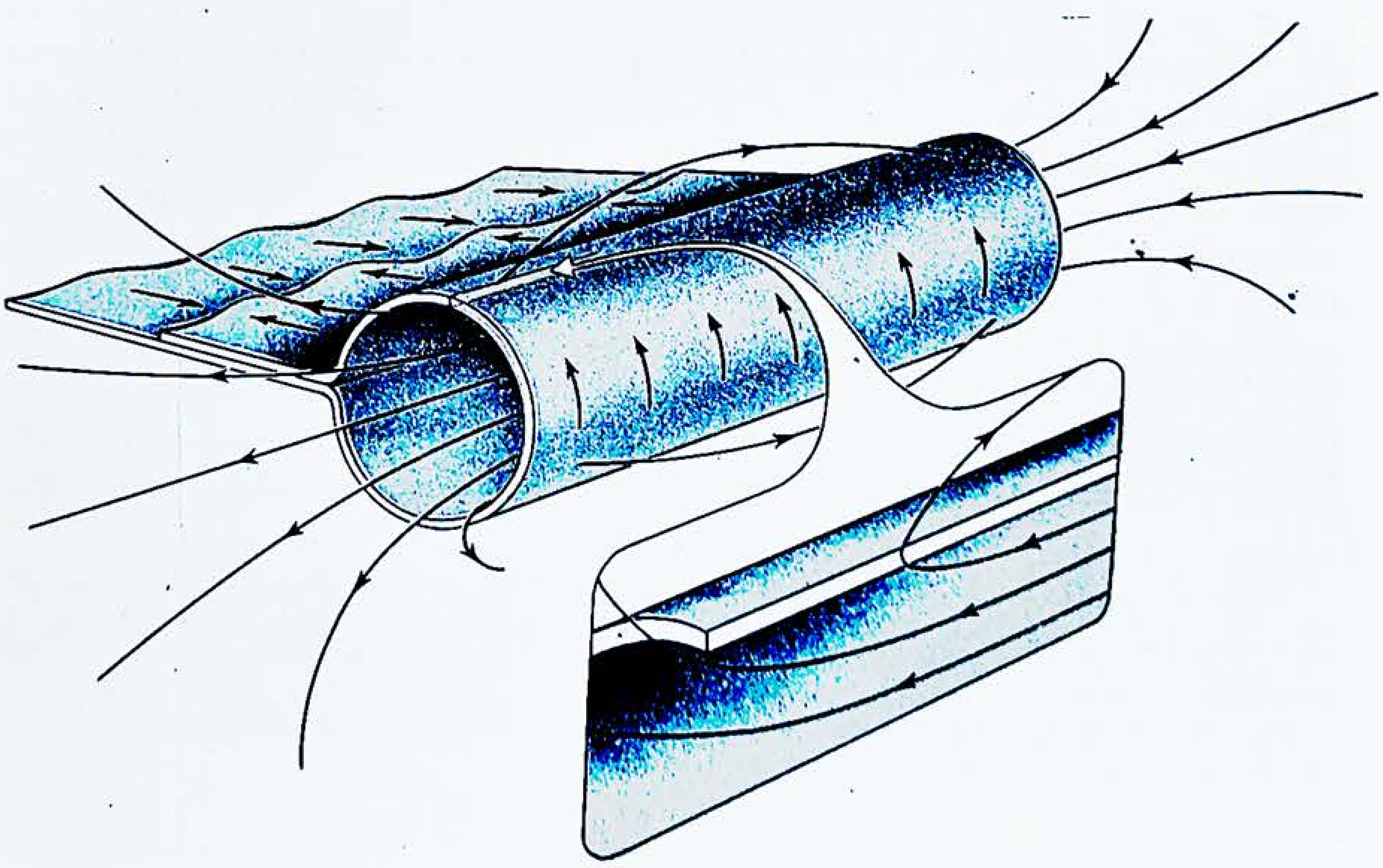


Fig. 6.18. Linii de cîmp în interiorul și în jurul solenoidului.

Fig. 6.19. Un solenoid format dintr-o singură pătură conductoare cilindrică. Secțiunea arată cum se schimbă direcția liniilor de cîmp în interiorul conductorului purtător de curent.



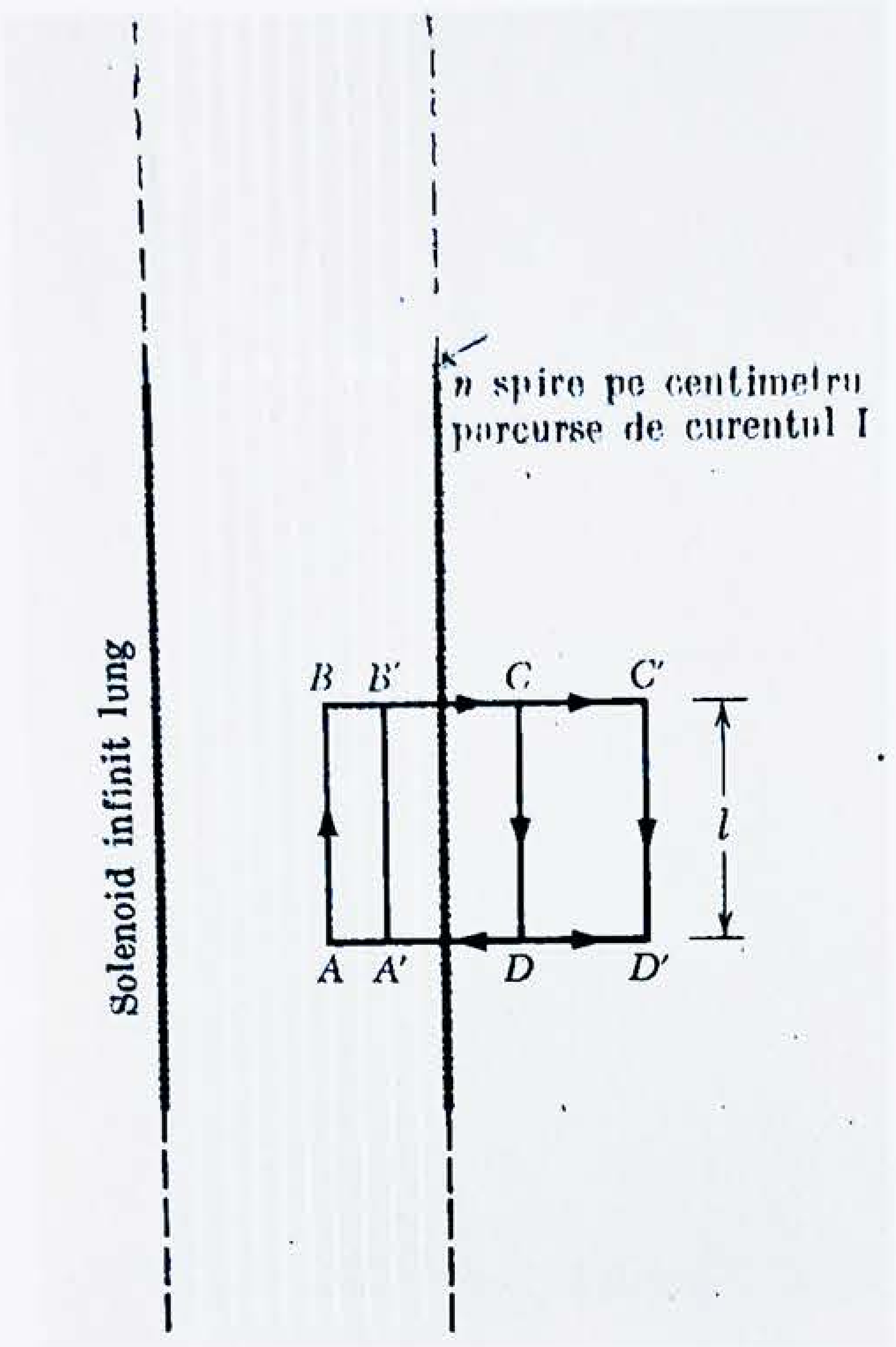


Fig. 6.20. Se arată de ce inducţia, în afara unui solenoid infinit lung, trebuie să fie zero.

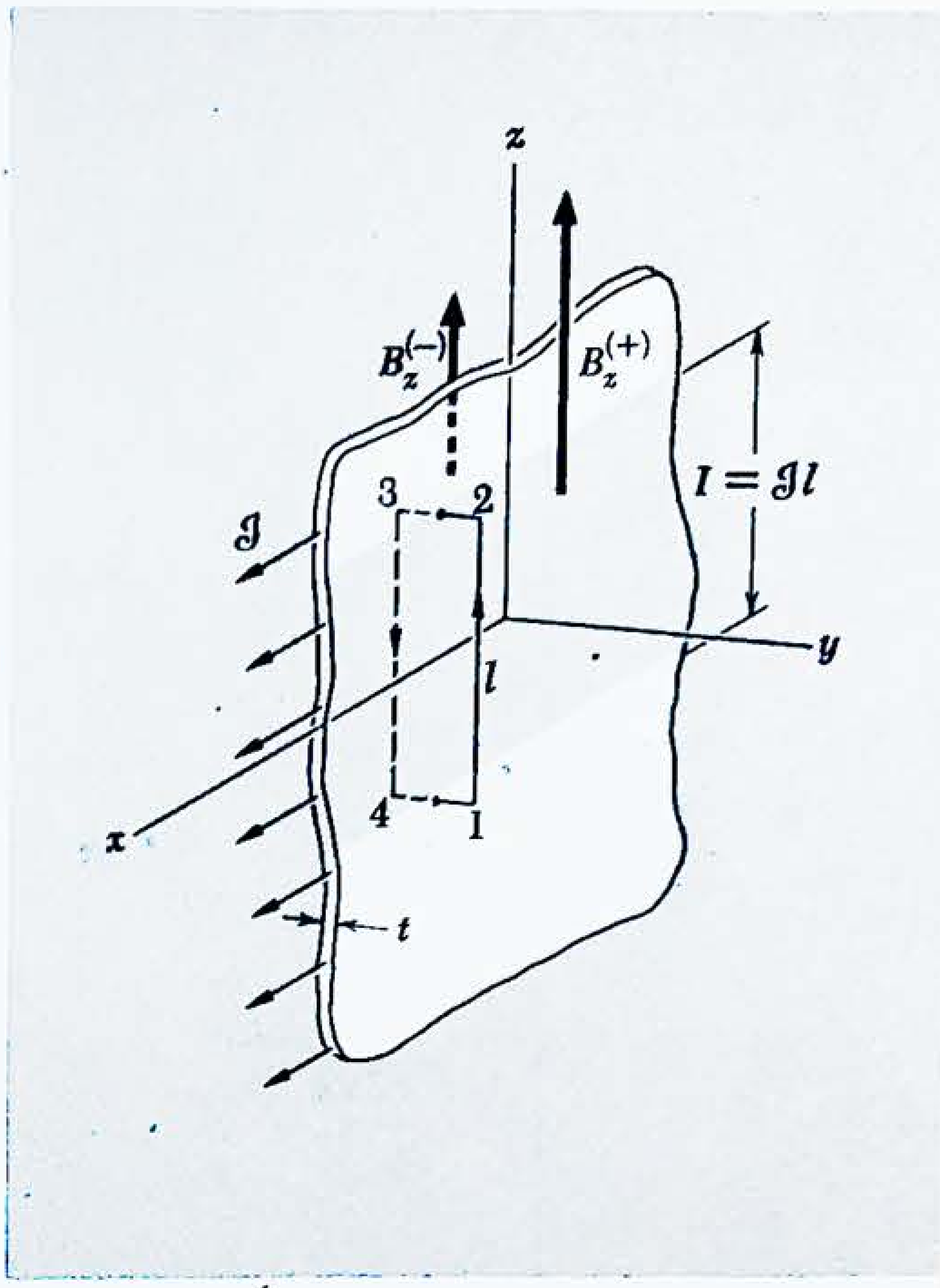
cu $\hat{\mathbf{z}}$. Să studiem integrala de linie a lui $\mathbf{B}$ pe conturul dreptunghiular $ABCDA$ din figura 6.20. Laturile orizontale nu aduc nici o contribuţie. Contribuţia laturii CD poate fi, de asemenea, nulă întrucît dacă integrala de linie pe CD ar avea o valoare finită, ar trebui ca integrala pe oricare asemenea porţiune ca $C'D'$, de exemplu, să aibă aceeaşi valoare şi am fi putut obţine cîmp magnetic de inducţie constantă ce ar ocupa tot spaţiul din exteriorul solenoidului. Ajungem la concluzia că cîmpul în exteriorul solenoidului trebuie să fie zero*. Rămîne doar integrala de linie a lui $\mathbf{B}$ în lungul lui AB care este $B_z l$ şi trebuie să fie egală cu μ_0 înmulţit cu intensitatea curentului ce străbate conturul. Prin urmare, $B_z l = \mu_0 n I l$ sau $B_z = \mu_0 n I$, în concordanţă cu ecuaţia (45).

6.6. VARIAŢIA LUI B ÎN APROPIEREA UNEI FOIŢE DE CURENT

În figura 6.19 am reprezentat un solenoid format dintr-o singură bandă străbătută de curent. Să considerăm ceva mai simplu chiar şi anume, o foiţă plană nelimitată, străbătută de curent. V-o puteţi imagina ca o foiţă de cupru de grosime uniformă prin care, în toate punctele, trece un curent de densitate şi direcţie constantă. Pentru a stabili direcţiile, aşezăm foiţa în planul xz şi curentul pe direcţia x. Întrucît am presupus că foiţa este infinită şi nelimitată este destul de greu s-o reprezentăm! În figura 6.21 este desenat doar un fragment din foiţă, urmînd ca restul să vi-l imaginaţi extinzîndu-l în tot planul. La urma urmei grosimea foiţei nu prezintă prea mare importanţă, dar putem presupune că ea are o grosime oarecare, finită, t. Dacă den-

* De ce nu poate produce un asemenea solenoid un cîmp uniform în întreg spaţiul din exterior? În definitiv, o bandă infinit lungă străbătută de curent, despre care vom vorbi, are un cîmp uniform ce ocupă jumătatea de spaţiu de pe fiecare parte a ei. Şi solenoidul poate fi făcut oricît de subţire şi ar fi fost cu adevărat straniu dacă un solenoid de diametru neglijabil de mic ar fi putut da naştere unui cîmp finit peste tot. Poate puteţi găsi un argument mai plauzibil.

Fig. 6.21. Pe o foiță cu curent superficial, prin trecerea de pe o față pe alta, trebuie ca componenta paralelă a lui B să se schimbe.



sitatea curentului în interiorul metalului este J, atunci fiecare centimetru de înălțime — pe direcția z — este parcurs de o bandă de curent Jt. O numim „densitate superficială de curent" sau „densitatea de curent a foiței" și vom folosi notația $\mathcal{J}$ pentru a o deosebi de densitatea de curent de volum J. Unitatea de măsură pentru $\mathcal{J}$ este A/m. Dacă nu ne interesează ce se întîmplă de fapt în interiorul forței, $\mathcal{J}$ ne este o mărime utilă. Așa cum vom vedea, ea este aceea care determină *variația* cîmpului magnetic între cele două fețe ale foiței. Cîmpul reprezentat în figura 6.21 nu este produs numai de foiță. Mai există un alt cîmp, pe direcția lui z, produs de o altă sursă. Cîmpul total, care include și efectul foiței de curent, este reprezentat de vectorii **B** din fața și spatele foiței.

Să luăm integrala de linie a lui **B** pe dreptunghiul *12341* din figura 6.21. Una din laturile mari este pe fața anterioară a foiței, cealaltă pe fața posterioară, iar laturile mici intersectează foița. Fie B_z^+ componenta z a cîmpului magnetic chiar pe fața anterioară a foiței și corespunzător B_z^-, pe fața posterioară. Avem în vedere cîmpul *tuturor* surselor ce s-ar afla prin apropiere, inclusiv cel al foiței. Integrala de linie a lui **B**, de-a lungul dreptunghiului, este pur și simplu egală cu $(B_z^+ - B_z^-$. (Chiar dacă ar exista un alt izvor care ar da naștere unei componente a cîmpului, paralelă cu laturile mici ale dreptunghiului, aceste laturi pot fi micșorate oricît — întrucît am presupus foița subțire — și în orice caz, ele sînt mult mai mici decît orice variație a cîmpului.) Curentul în dreptunghi este $l\mathcal{J}$. Obținem, astfel, relația $l(B_z^+ - B_z^-) = \mu_0 \mathcal{J} l$ sau

$$B_z^+ - B_z^- = \mu_0 \mathcal{J}. \tag{46}$$

O foiță de curent de densitate $\mathcal{J}$ determină o variație bruscă în acea componentă a lui **B** care este paralelă cu suprafața și perpendiculară pe $\mathcal{J}$. Aceasta vă poate reaminti de variația cîmpului electric al unei sarcini superficiale. În acest caz, componenta *perpendiculară* a lui **E** este discontinuă, iar mărimea discontinuității depinde de densitatea sarcinii superficiale.

Dacă foița este singura sursă pe care o avem, atunci, bineînțeles, cîmpul este simetric în raport cu foița. B_z^+ este $\mu_0\mathcal{J}/2$ și B_z^- este $-\mu_0\mathcal{J}/2$. Figura 6.22, *a* ilustrează acest lucru. Alte situații, cînd efectul foiței de curent se suprapune peste un cîmp creat de o altă sursă, sînt arătate în figurile 6.22, *b* și *c*. Presupunem două foițe cu curenți de suprafață egali și de sens contrar,

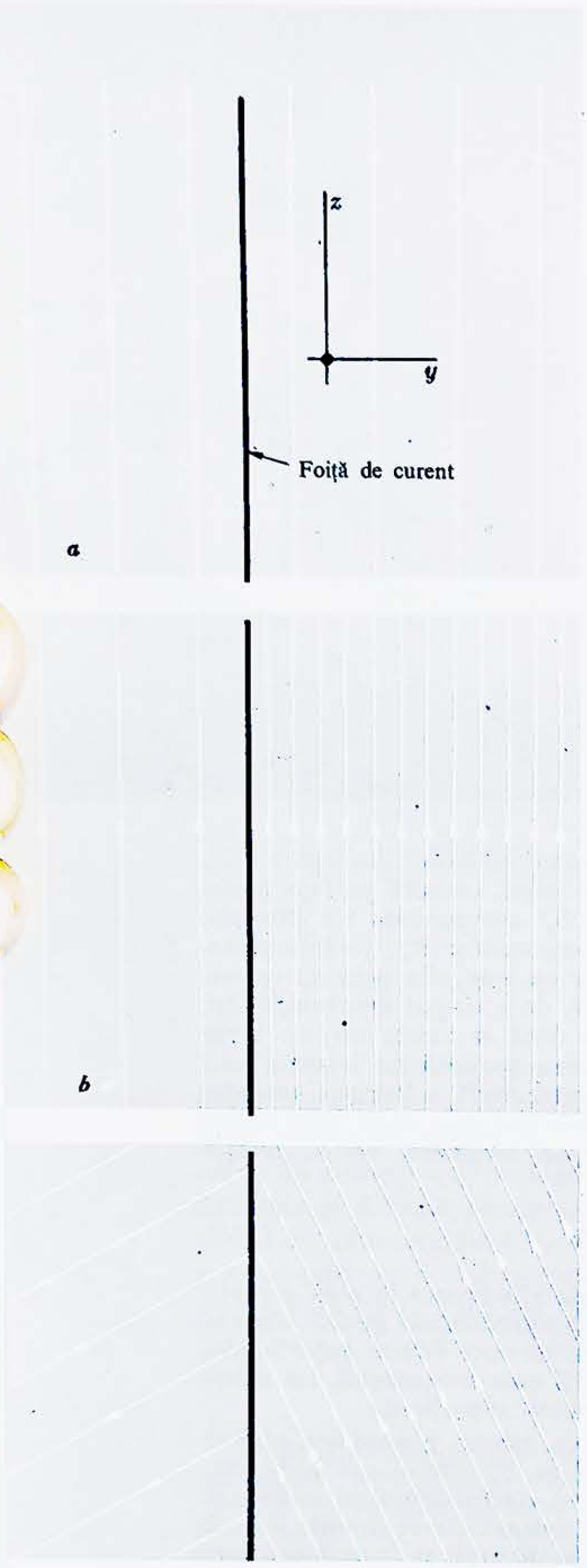


Fig. 6.22. Cîteva tipuri posibile de cîmp magnetic total în apropierea unei foiţe străbătute de curent. Curentul este de-a lungul axei x (iese din planul figurii). *(a)* Cîmpul propriu al foiţei; *(b)* cîmpul foiţei suprapus peste un cîmp uniform, pe direcţia lui z (analog situaţiei din figura 6.21); *(c)* cîmpul foiţei suprapus peste un cîmp uniform, avînd o altă orientare. În fiecare din cazuri, componenta B_z se schimbă cu $\mu_0 I$, la trecerea prin foiţă; componenta B_y nu se schimbă.

ca în desenul în secţiune din figura 6.23, fără alte surse în apropiere. Direcţia curentului este perpendiculară pe planul figurii, ieşind din pagină în stînga şi intrînd în pagină în dreapta. Cîmpul dintre foiţe este $\mu_0 \mathcal{J}$, iar în afara lor nu există. Ceva asemănător întîlnim în două benzi sau plăci paralele parcurse de curent, aflate la o distanţă mică una de alta, comparativ cu lăţimea lor (fig. 6.24). Deseori, liniile folosite în distribuirea curenţilor de intensitate mare la staţiile de putere, au această formă.

Aşa cum am remarcat şi în figura 6.19, **B** variază în secţiunea foiţei. Pentru una şi aceeaşi densitate superficială de curent $\mathcal{J}$, variaţia va fi cu atît mai bruscă cu cît foiţa este mai subţire. În capitolele *1* şi *2*, am întîlnit o situaţie foarte asemănătoare, atunci cînd am studiat discontinuitatea ce apare în componenta perpendiculară a lui **E** în cazul unei distribuţii superficiale de sarcină. A prezentat interes, atunci, problema forţei ce acţionează asupra sarcinii superficiale şi o chestiune similară o ridicăm aici.

Considerăm o porţiune din foiţă de forma unui pătrat cu latura de 1 m. Curentul în această porţiune este $\mathcal{J}$ şi drumul parcurs de el este de 1 m, iar inducţia *medie* a cîmpului ce acţionează asupra acestui curent — presupunînd că este uniform distribuit în toată grosimea foiţei — este $\frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)$. Prin urmare, forţa ce acţionează asupra acestei distribuţii de curent este:

$$\text{Forţa exercitată pe unitatea de suprafaţă a foiţei} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\mathcal{J}. \qquad (47)$$

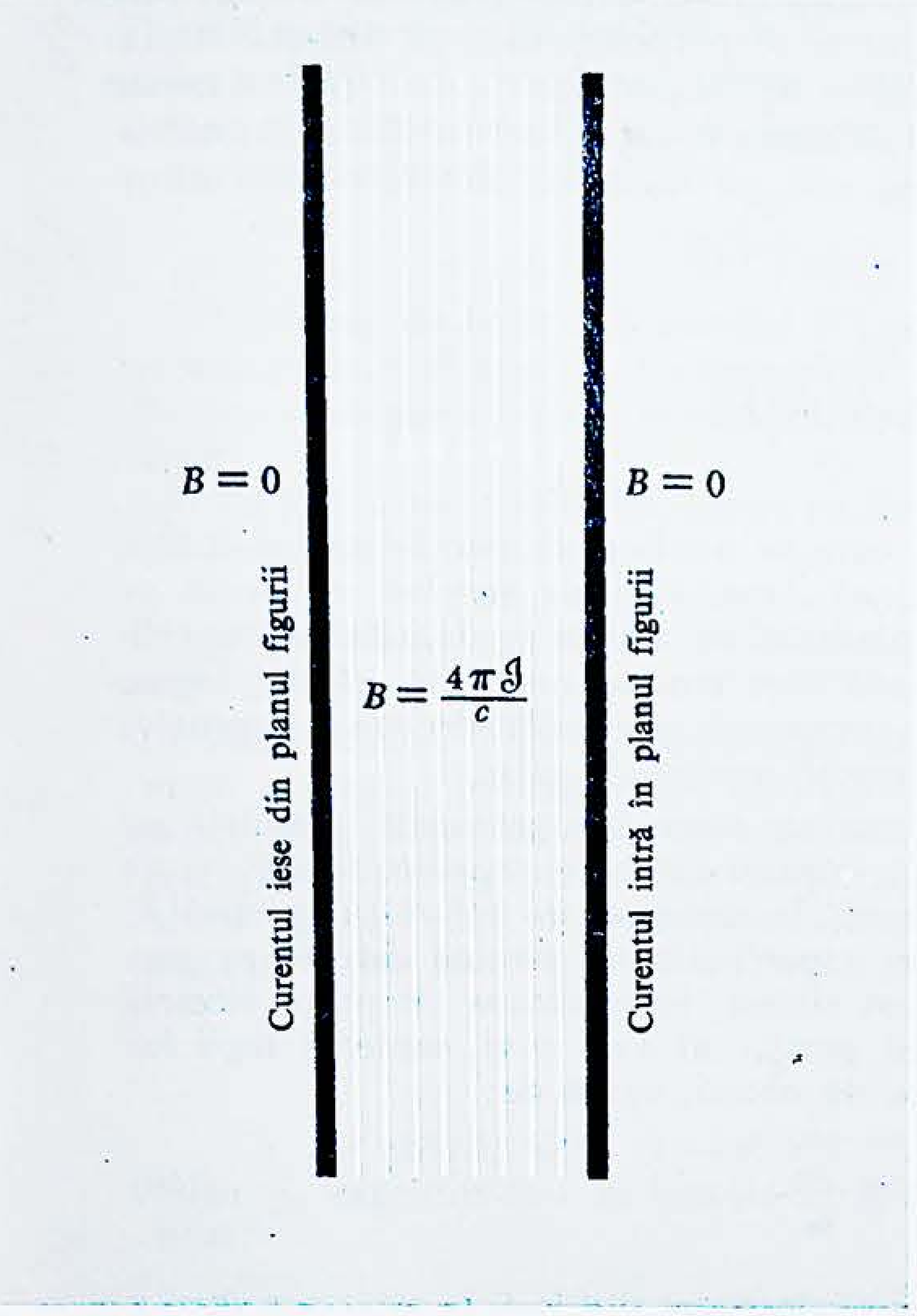


Fig. 6.23. Cîmpul magnetic dintre două foițe paralele, străbătute de curent.

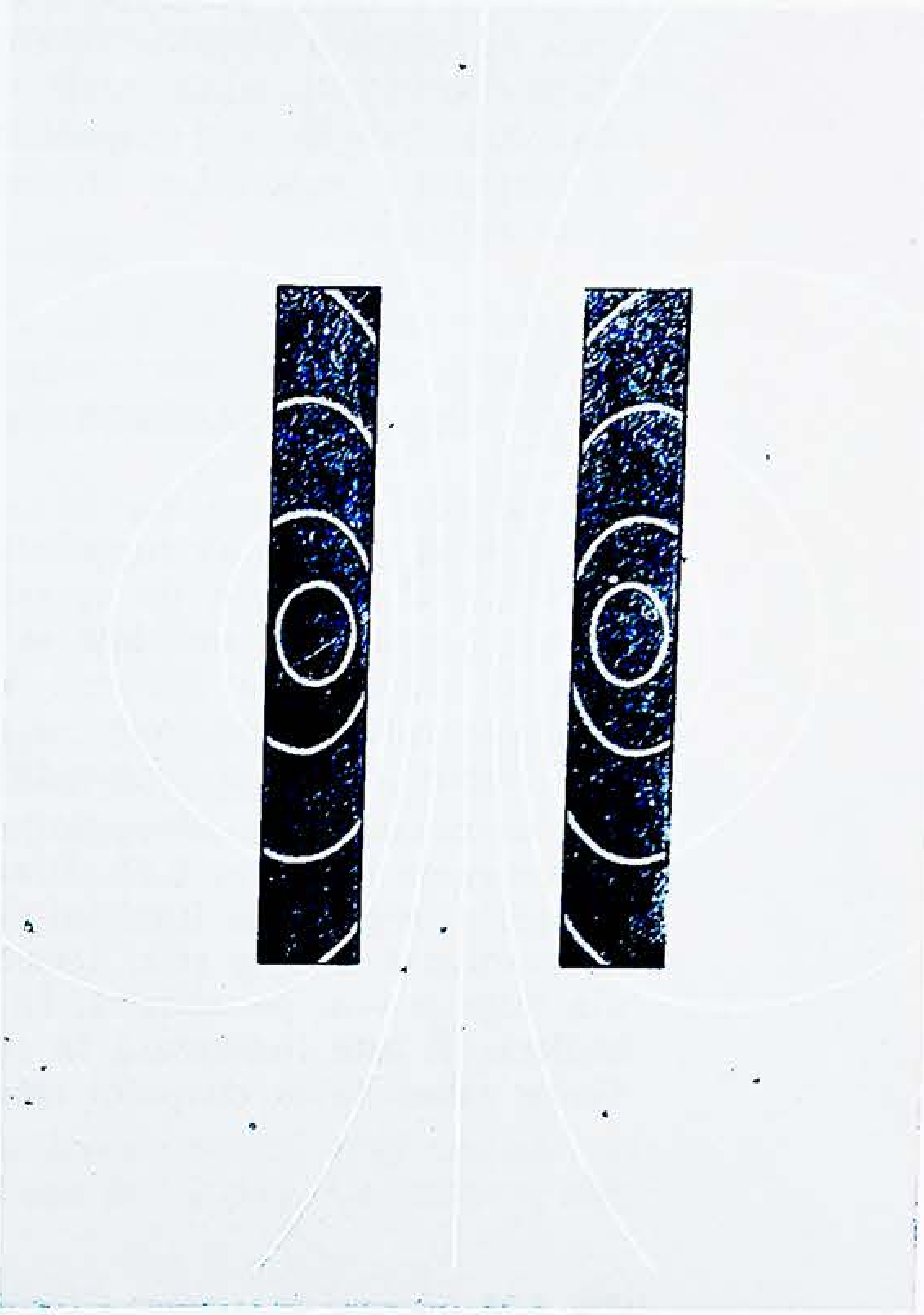


Fig. 6.24. Cîmpul magnetic al unei perechi de bare de cupru, străbătute de curenți de sensuri contrare, reprezentate în secțiune transversală.

Pe baza ecuației (46), putem înlocui $\mathcal{J}$ cu $(B_z^+ - B_z^-)/\mu_0$, astfel încît forța exercitată pe unitatea de suprafață poate fi exprimată sub forma:

$$\text{Forță pe m}^2 = \left(\frac{B_z^+ + B_z^-}{2}\right)\left(\frac{B_z^+ - B_z^-}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2\mu_0}\left[(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2\right]. \quad (48)$$

Forța este perpendiculară la suprafață și proporțională cu aria, ca și în cazul tensiunii produse de presiunea hidrostatică. Pentru a fi siguri de semn, putem să reprezentăm direcția forței într-un caz particular ca cel din figura 6.23, de exemplu. Forța ce acționează asupra fiecărui conductor este îndreptată *spre exterior*. Este ca și cum regiunea de inducție mare a cîmpului ar fi o regiune cu presiune ridicată. Trebuie să avem în vedere că în determinarea acestei forțe, contează doar componenta lui **B** paralelă cu suprafața.

Am considerat o foiță infinită plană, dar lucrurile se petrec la fel și în imediata apropiere a oricărei suprafețe curbe. Oriunde vom întîlni o variație a componentei paralele cu suprafața lui **B**, de la B_1 la B_2, prin trece-

rea de pe o parte pe cealaltă a suprafeței, vom putea trage nu numai concluzia că există o foiță de curent, dar şi că perpendicular pe această suprafață se exercită o presiune egală cu $(B_1^2 - B_2^2)/2\mu_0$, măsurată în N/m². Aceasta este o regulă de bază în magnetohidrodinamică, care studiază fluidele electroconductoare — subiect ce interesează atît pe inginerii electrotehnişti cît şi pe astrofizicieni.

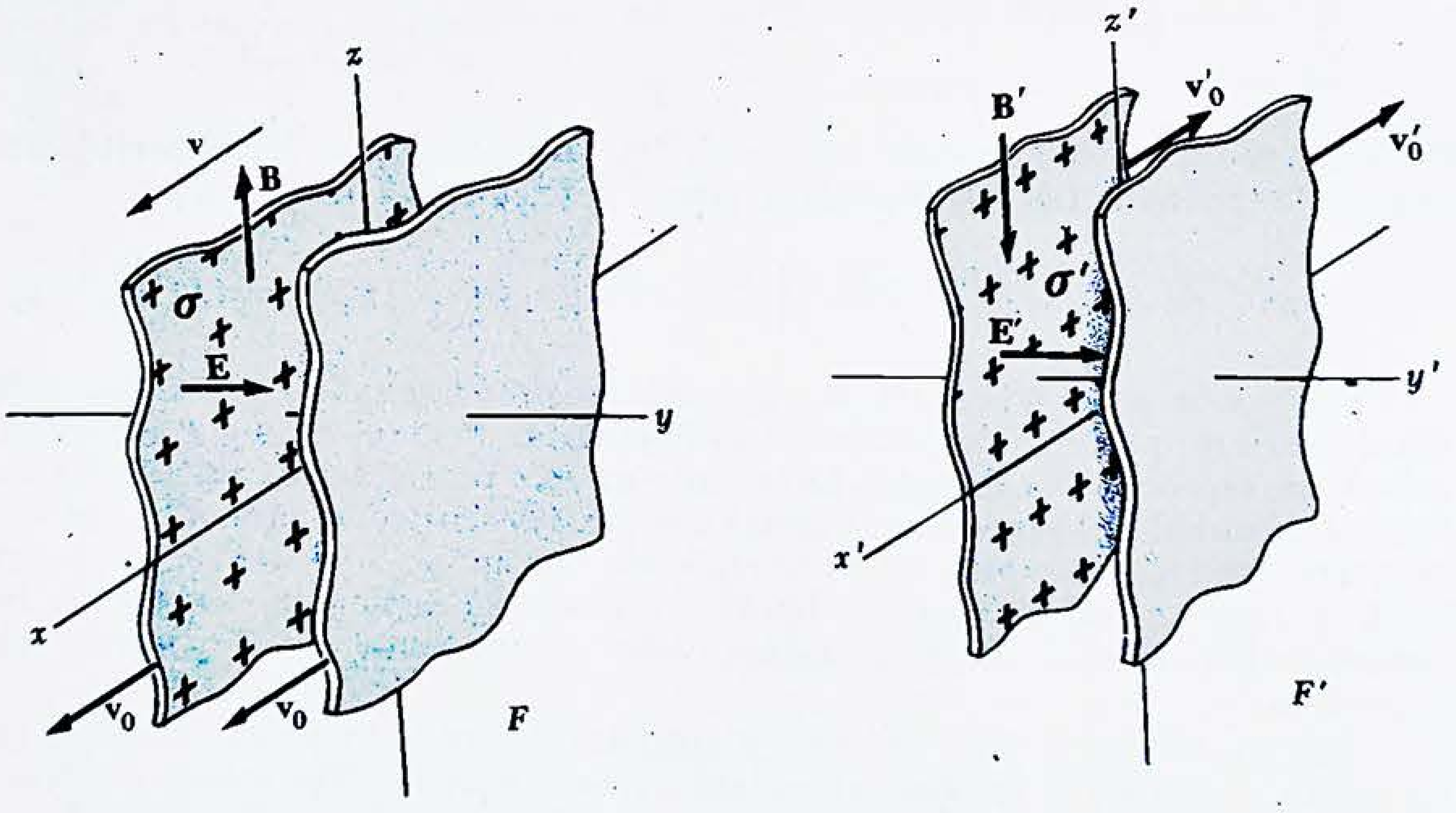
6.7. CUM SE TRANSFORMĂ CÎMPURILE

O foiță cu sarcină superficială, care se deplasează paralel cu ea însăşi, constituie o suprafață de curent. Dacă densitatea de sarcină uniformă pe suprafață este σ şi suprafața se deplasează cu viteza v, densitatea superficială de curent este $\mathcal{J} = \sigma v$. Această idee simplă ne ajută să înțelegem cum se transformă mărimile ce caracterizează cîmpurile electric şi magnetic cînd trecem de la un sistem de referință inerțial la altul.

Să ne imaginăm două foițe plane cu sarcină superficială, paralele cu planul xz ca în figura 6.25. Din nou, reprezentăm doar porțiuni din aceste suprafețe, suprafețele fiind infinit mari. În sistemul de referință inerțial F, cu coordonatele x, y şi z, densitatea superficială de sarcină este σ, pe una din foițe şi $-\sigma$, pe cealaltă. În acest sistem, intensitatea cîmpului electric uniform **E** este îndreptată în sensul pozitiv al axei y şi, conform legii lui Gauss intensitatea cîmpului este, ca de obicei, egală cu:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{49}$$

Fig. 6.25. Sistemul de referință F', văzut de un observator aflat în F, se mişcă cu o viteză v în sensul pozitiv al axei x. Foițele încărcate se mişcă cu viteza v_0, pentru un observator aflat în F.



În acest sistem de referință F, ambele foițe se mișcă în sensul pozitiv al axei x cu viteza v_0, astfel încît avem o pereche de foițe de curent. Densitatea superficială de curent într-o foiță este $\mathcal{J}_x = \sigma v_0$ și în cealaltă, egală și de semn contrar. Ca și în cazul reprezentat în figura 6.21, inducția între două asemenea foițe de curent este

$$B_z = \mu_0 \mathcal{J}_x = \mu_0 \sigma v_0. \tag{50}$$

Sistemul de referință inerțial F', privit din F, se mișcă cu viteza v în sensul pozitiv al axei x. *Ce intensități va măsura un observator aflat în F'?* Pentru a răspunde, trebuie să știm doar cum arată sursele acestor cîmpuri în F'.

În F' viteza foițelor încărcate pe direcția x' este v_0' și este dată de regula de compunere a vitezelor

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c\,\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}. \tag{51}$$

În acest sistem apare o contracție Lorentz a densității de sarcină, exact ca în exemplul întîlnit în paragraful 5.9, *a* distribuțiilor liniare de sarcină în mișcare. Repetînd aceleași raționamente, obținem că densitatea în sistemul de referință legat de purtătorii de sarcini, aflat în repaus, este $\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ sau σ/γ_0 și prin urmare, densitatea în sistemul de referință F' este

$$\sigma' = \sigma\,\frac{\gamma_0'}{\gamma_0}. \tag{52}$$

Ca de obicei, $\gamma_0' = (1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2}$. Pe baza ecuației (51) putem elimina γ_0', exprimîndu-l în funcție de β_0 și β sau de γ_0 și γ. Ca urmare, obținem:

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta) \tag{53}$$

Densitatea superficială de curent în sistemul de referință F' este, prin urmare,

$$\mathcal{J} = \sigma' v_0' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta)c\,\frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0\beta} = \sigma\gamma(v_0 - v). \tag{54}$$

Știm, acum, cum arată sursele în sistemul F' și deci știm cum trebuie să fie cîmpurile în acest sistem. Afirmînd aceasta, apelăm din nou la postulatul teoriei relativității. Legile fizicii sînt echivalente în toate sistemele de referință inerțiale și aceasta se referă și la formulele ce leagă intensitatea cîmpului electric de densitatea de sarcină superficială și inducția magnetică de densitatea superficială de curent. Rezultă că:

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma\left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - (\mu_0\sigma v_0)\left(\frac{v}{c}\right)c\right] \tag{55}$$

$$B_z' = \mu_0\mathcal{J}' = \gamma\left[\mu_0\sigma v_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{v}{c}\right)\frac{1}{c}\right]. \tag{56}$$

Revenind la valorile lui E_y și B_z din ecuațiile (49) și (50), observăm că rezultatele noastre pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned} E_y' &= \gamma(E_y - c\beta B_z) \\ B_z' &= \gamma\left(B_z - \frac{1}{c}\beta E_y\right). \end{aligned} \tag{57}$$

Dacă „sandwich"-ul foiţelor de curent ar fi fost orientat paralel cu planul xy, în loc de xz, am fi obţinut relaţiile ce leagă E'_z cu E_z şi B_y şi pe B'_y cu B_y şi E_z. Forma relaţiilor este, bineînţeles, aceeaşi ca mai sus, dar dacă am urmări direcţiile, am găsi diferenţe în semne ce decurg din regulile pentru aflarea sensului lui **B**.

Mai rămîne să găsim cum se schimbă componentele cîmpului pe direcţia mişcării. În paragraful 5.5 am văzut că componenta longitudinală a lui **E** are aceeaşi valoare în ambele sisteme de referinţă. Dacă acest lucru este valabil şi pentru componenta longitudinală a lui **B**, se poate arăta în felul următor. Presupunem că componenta longitudinală a lui **B** şi anume B_x (fig. 6.25) este produsă de solenoidul din jurul axei x, în sistemul de referinţă F. Inducţia cîmpului în interiorul solenoidului depinde, după cum ştim, numai de intensitatea curentului I din conductor, care reprezintă numărul de purtători de sarcină pe secundă, şi de n — numărul înfăşurărilor pe unitatea de lungime. În sistemul de referinţă F', solenoidul va suferi contracţia Lorentz, astfel încît numărul înfăşurărilor pe unitatea de lungime va fi mai mare în acest sistem. Intensitatea curentului, în schimb, pentru observatorul din sistemul F', va fi mai mică întrucît, din punctul său de vedere, observatorul din F a măsurat intensitatea curentului numărînd electronii ce treceau printr-un punct al conductorului într-o secundă, folosind un ceas ce mergea mai încet. Astfel, dilatarea timpului anulează contracţia lungimii în produsul $\mu_0 nI$. Într-adevăr, orice mărime avînd dimensiunile $(lungime)^{-1} \times$ $\times$ $(timp)^{-1}$ rămîne neschimbată în transformarea Lorentz. Astfel, $B'_x = B_x$.

Să ne amintim discuţiile făcute la ecuaţia (5.6) din capitolul 5. Proprietăţile cîmpului, exprimate în legile de transformare, sînt proprietăţi *locale*. Valorile lui **E** şi **B**, într-un punct din sistemul de coordonate spaţiu-timp, într-un sistem de referinţă trebuie să determine în mod univoc componentele intensităţii cîmpului, observate într-un alt sistem de referinţă, într-un punct de aceleaşi coordonate spaţiu-timp. Prin urmare, faptul că în demonstraţia noastră am folosit un tip de sursă deosebit de simplu (foiţe paralele uniform încărcate) nu compromite în nici un fel generalitatea rezultatelor noastre. Am ajuns, de fapt, la legile generale de transformare pentru toate componentele intensităţii cîmpului electric şi ale inducţiei magnetice, indiferent de natura sau configuraţia lor.

Dăm mai jos toate formulele de transformare. Toate mărimile notate cu prim sînt măsurate în sistemul F', care se deplasează în sensul pozitiv al axei x, cu viteza v faţă de sistemul F. Mărimile fără prim sînt rezultatele măsurătorilor făcute în sistemul F. Ca de obicei, $\beta = v/c$ şi $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - c\beta B_z) & E'_z = \gamma(E_z + c\beta B_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{1}{c}\beta E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{1}{c}\beta E_y\right) \end{array}} \qquad (58)$$

Ecuaţiile încadrate ne relevă un fapt uluitor — simetria relaţiilor lui **E** şi **B**. Dacă tipograful ar fi înlocuit din greşeală peste tot pe E' cu B' şi pe y' cu z', s-ar fi obţinut exact aceleaşi ecuaţii! Pînă acum am considerat că magnetismul este un fel de efect „de ordinul doi" al schimbărilor relativiste în cîmpurile electrice ale purtătorilor de sarcină în mişcare. Evident, fenomenele magnetice pe care le întîlnim în natură sînt net diferite de fenomenele electrice. Lumea înconjurătoare nu este nici pe departe simetrică în ceea ce priveşte electricitatea şi magnetismul. Şi cu toate acestea, excluzînd sursele,

găsim că cîmpurile caracterizate prin **E** şi **B** sînt legate între ele într-un mod cît se poate de simetric.

Se pare de asemenea că cîmpul electric şi magnetic sînt, într-o oarecare măsură, aspecte sau componente diferite ale aceleiaşi entităţi. Putem vorbi despre cîmpul *electromagnetic* şi să considerăm că E_x, E_y, E_z, B_x, B_y şi B_z sînt şase componente ale acestui cîmp. *Acelaşi* cîmp, studiat în diferite sisteme de referinţă inerţiale, va fi reprezentat de diferite grupuri de valori ale acestor componente, la fel cum un vector este dat de componente diferite în diferitele sisteme de coordonate ce se rotesc unele faţă de altele. Totuşi, din punct de vedere matematic, cîmpul electromagnetic nu este un vector ci mai curînd ceva numit *tensor*. Totalitatea ecuaţiilor încadrate reprezintă relaţiile de transformare ale componentelor unui asemenea tensor cînd trecem de la un sistem de referinţă la altul. Nu vom dezvolta aici limbajul matematic. De fapt, ne vom întoarce acum la vechiul nostru mod de a considera cîmpul electric ca un cîmp vectorial şi cîmpul magnetic un alt cîmp vectorial cuplat cu primul — chestiune pe care o vom studia în capitolul 7. Pentru a dezvolta scurta remarcă făcută asupra entităţii cîmp electromagnetic, care poate fi reprezentat în spaţiul cvadridimensional spaţiu-timp, trebuie să acumulăm cunoştinţe mai aprofundate.

Transformările date de ecuaţiile (58) duc la relaţii uluitor de simple într-o serie întreagă de cazuri. Să presupunem că într-un sistem de referinţă, să spunem cel cu coordonate „fără prim", inducţia magnetică **B** este zero peste tot. Atunci cîmpurile, observate în celălalt sistem de coordonate, au componentele:

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x \quad && E'_y = \gamma E_y \quad && E'_z = \gamma E_z \\ &B'_x = 0 \quad && B'_y = \frac{1}{c}\beta\gamma E_z \quad && B'_z = -\frac{1}{c}\beta\gamma E'_y. \end{aligned} \tag{59}$$

Aceasta implică o anumită relaţie între intensitatea cîmpului electric şi inducţia magnetică, valabilă în orice punct al sistemului de coordonate „cu prim", şi anume:

$$B'_x = 0 \quad B'_y = \frac{1}{c}\beta E'_z \quad B'_z = -\frac{1}{c}\beta E'_y. \tag{60}$$

Reamintindu-ne că, în acest caz, viteza sistemului „fără prim", văzut din sistemul de coordonate „cu prim", este un vector orientat în sensul negativ al axei x', putem scrie relaţia de mai sus ca un produs vectorial, obţinînd astfel o regulă mult mai generală:

$$\boxed{\mathbf{B}' = \left(\frac{\mathbf{v}'}{c^2}\right) \times \mathbf{E}' \quad \text{(dacă } \mathbf{B} = 0 \text{ în oricare punct al unui sistem de referinţă)}} \tag{61}$$

$\mathbf{v}'$ reprezintă aici viteza, observată din sistemul „cu prim", a acelui sistem de referinţă în care **B** este zero.

Exact în acelaşi mod, deducem din ecuaţia (58) că dacă $\mathbf{E} = 0$ în orice punct al unui sistem de referinţă, pe care îl vom numi „fără prim", atunci în celălalt sistem de referinţă

$$\boxed{\mathbf{E}' = -c\left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \times \mathbf{B}' \quad \text{(dacă } \mathbf{E} = 0 \text{ în oricare punct al unui sistem de referinţă)}} \tag{62}$$

Aici, ca şi în ecuaţia (61), $\mathbf{v}'$ este viteza sistemului „fără prim" (în acest caz, cel în care **E** este peste tot zero) văzută din sistemul „cu prim". Restricţiile ecuaţiilor încadrate (61) şi (62) sînt, desigur, destul de severe. De cele mai multe ori *nu există* asemenea sisteme de referinţă în care **B** să fie zero peste tot şi nici asemenea sisteme în care densitatea de sarcină electrică şi prin urmare şi **E**, să fie nulă peste tot.

Întrucît ecuaţia (61) conţine numai mărimi măsurate în acelaşi sistem de referinţă, este uşor de aplicat la cîmpurile ce variază în spaţiu*, fără a ţine seama de restricţii.

Un exemplu bun îl constituie cîmpul unei sarcini punctiforme q ce se mişcă cu viteză constantă, problemă studiată în capitolul 5. Să luăm sistemul de referinţă în care sarcina este în repaus ca sistemul „fără prim". În acest sistem, bineînţeles, nu există cîmp magnetic. Ecuaţia (61) ne spune că, în sistemul „laboratorului" în care sarcina se mişcă cu viteza v, trebuie să existe un cîmp magnetic perpendicular pe cîmpul electric şi pe direcţia de mişcare. Noi am găsit forma exactă a cîmpului electric în acest sistem. Ştim că cîmpul porneşte radial de la poziţia instantanee a sarcinii şi valoarea intensităţii lui este dată de ecuaţia (5.12). Liniile cîmpului magnetic trebuie să fie cercuri în jurul direcţiei de mişcare, aşa cum sînt schematic reprezentate în figura 6.26. Cînd viteza sarcinii este mare, astfel încît $\gamma \gg 1$, „spiţele" radiale care sînt liniile cîmpului electric se strîng într-un disc subţire. Liniile circulare ale cîmpului magnetic se concentrează de asemenea în acest disc.

Pornind de la legea lui Coulomb, în ultimele două capitole am parcurs un drum lung. Am urmărit, totuşi, pas cu pas cerinţele teoriei relativităţii şi ale invarianţei de sarcină. Începem să înţelegem că existenţa cîmpului magnetic şi curioasa sa relaţie simetrică cu cîmpul electric este o consecinţă

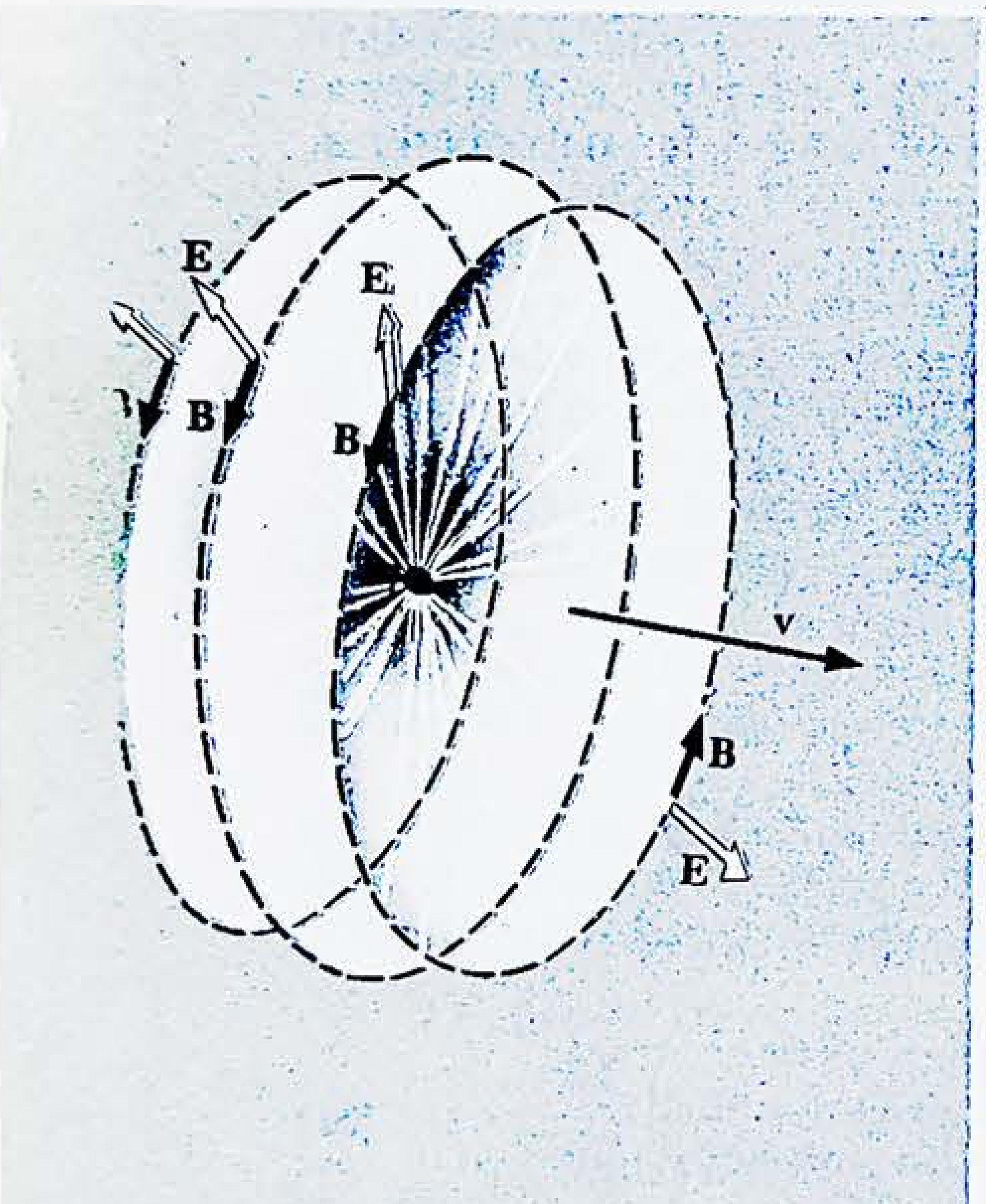


Fig. 6.26. Cîmpurile electrice şi magnetice ale unui purtător de sarcină aflat în mişcare uniformă, la un moment dat.

---

* Pentru cîmpurile variabile în spaţiu, sensul ec. (58) este următorul: $E'(x', y', z', t') = E(x, y, z, t)$ etc. Prin urmare, dacă vrem să calculăm cîmpurile, observate într-un punct oarecare al sistemului de referinţă „cu prim" la momentul t', trebuie să luăm pentru fiecare punct (x', y', z') timpul t care depinde de x', y', z', t' şi coordonatele x, y, z care sînt legate de x', y', z', t'. Astfel sînt, de exemplu, valorile lui B_z şi B_y, în acel moment t, în acel punct (x, y, z) care se mişcă spre dreapta în ultima ecuaţie încadrată.

necesară a acestor principii generale. Reamintim din nou cititorului că n-am urmărit deloc în expunere ordinea cronologică a descoperirii şi explicării legilor electromagnetismului. Unul din aspectele legăturii dintre cîmpurile electrice şi magnetice, care este prezentat în ecuaţia (58), a fost pus în evidenţă în experienţele lui Michael Faraday cu curenţii electrici variabili. Aceasta s-a întîmplat cu 75 de ani înainte ca cineva să se fi gîndit să scrie ecuaţii analoge celor încadrate.

Despre efectul magnetic al convecţiei electrice*

(American Journal of Science (3), XV, 30–38, 1878)

Experienţele descrise în acest articol au fost făcute cu scopul de a stabili, dacă un corp electrizat în mişcare produce efecte magnetice. Se pare că nu există o bază teoretică pe care să putem fundamenta problema, întrucît acţiunea magnetică a unui curent electric de conducţie poate fi atribuită unei interacţiuni dintre conductor şi curent. Deci o experienţă este binevenită. Profesorul Maxwell, în lucrarea sa „Tratat asupra electricităţii", punctul 770, a calculat acţiunea magnetică a unei suprafeţe electrizate în mişcare, dar că acţiunea există nu a fost încă verificat experimental sau teoretic.

Aparatura folosită consta dintr-un disc de ebonită cu diametrul de 21,1 cm şi grosimea de 0,5 cm, care putea fi rotit în jurul unui ax vertical cu o viteză de 61 rotaţii pe secundă. Pe ambele părţi ale discului, la distanţe de 0,6 cm s-au fixat plăci de sticlă cu diametrul de 38,9 cm şi cu un orificiu în centru de diametru 7,8 cm. Discul de ebonită a fost aurit pe ambele părţi, iar plăcile de sticlă aveau pe o parte inele aurite cu diametrele exterior şi interior 24,0 cm, respectiv 8,9 cm. Părţile aurite puteau fi apropiate sau îndepărtate de discul ce se rotea dar, de obicei, erau apropiate astfel încît calculele să se simplifice şi să nu existe incertitudini cu privire la electrizare. Plăcile exterioare erau, în mod obişnuit, legate la pămînt şi discul interior la o baterie electrică, cu ajutorul unui ac care se găsea la distanţa de 1/30 cm de margine şi era îndreptat spre ea. Întrucît marginea era lată, acul nu se descărca deşi între el şi margine exista o diferenţă de potenţial. Între bateria electrică şi disc...

6.8. EXPERIENŢA LUI ROWLAND

Aşa cum am remarcat în paragraful 5.9, cu o sută de ani în urmă, nu era evident că un curent ce trece printr-un conductor şi un **purtător de sarcină** electrică în mişcare sînt în esenţă surse identice ale cîmpului magnetic. Ideea unităţii dintre electricitate şi magnetism, care decurgea din lucrarea lui Maxwell, sugera că orice purtător de sarcină în mişcare trebuie să creeze un cîmp magnetic, dar era greu de dovedit experimental.

---

* Experienţele descrise au fost făcute în laboratorul Universităţii din Berlin, prin amabilitatea profesorului Helmholtz, desăvîrşirea lor datorîndu-se în mare măsură sfaturilor sale. Ideea experienţei mi-a apărut pentru prima oară în 1868, notînd-o cu această dată într-un carnet de note.

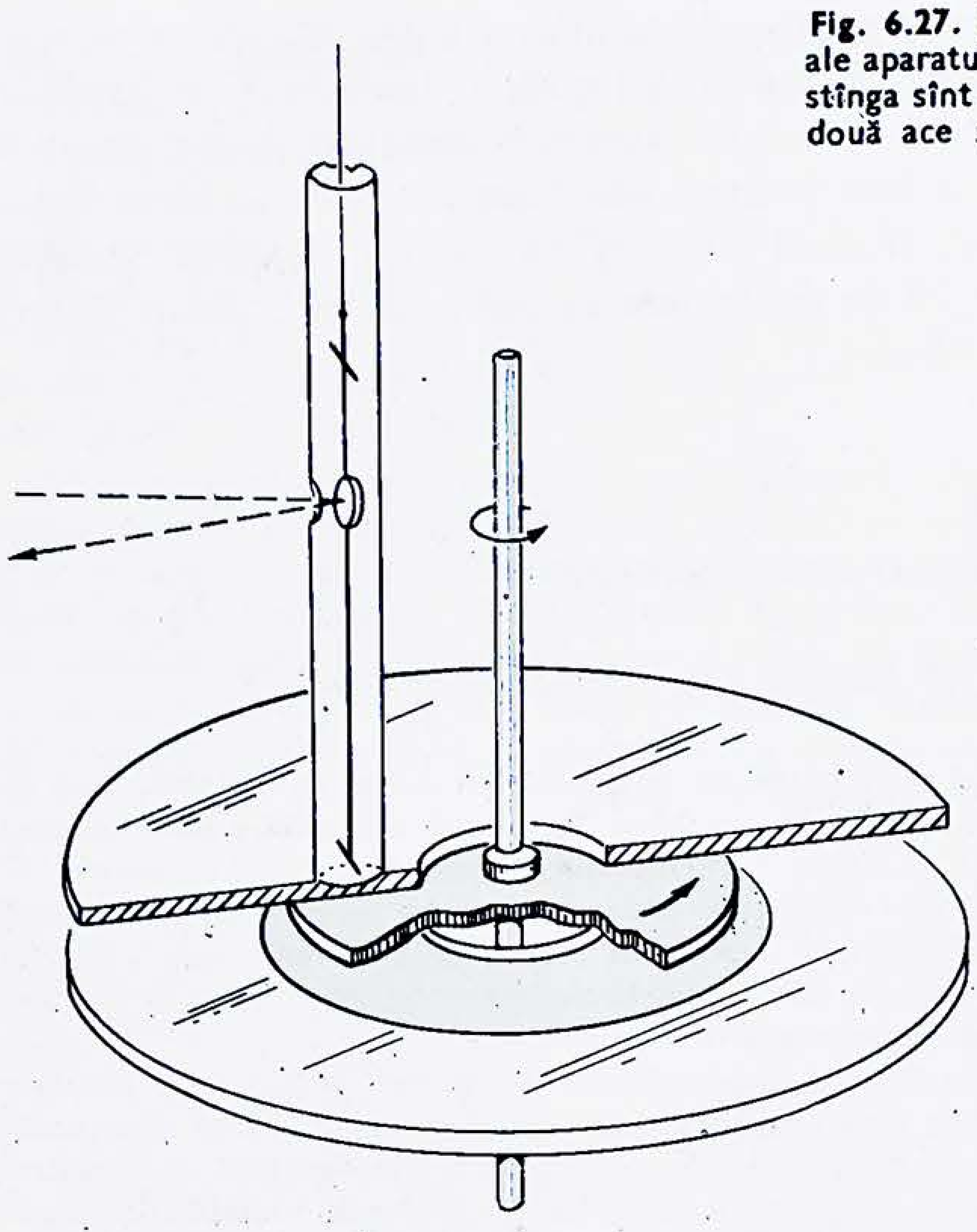


Fig. 6.27. Părţile componente esenţiale ale aparatului lui Rowland. În tubul din stînga sînt atîrnate în poziţie orizontală două ace magnetice scurte.

Faptul că o foiţă încărcată electrostatic, aflată în mişcare, produce un cîmp magnetic a fost demonstrat pentru prima oară de Henry Rowland, marele fizician american recunoscut pentru perfecţiunea reţelei sale de difracţie. Rowland a făcut multe măsurători electrice ingenioase şi precise, dar nici una nu i-a încercat atît de dur virtuozitatea experimentală ca detectarea şi măsurarea cîmpului magnetic a unui disc încărcat ce se rotea. Cîmpul ce trebuia detectat era aproximativ de ordinul 10^{-5} din valoarea cîmpului pămîntesc — o experienţă formidabilă chiar cu aparatura actuală! În figura 6.27 este redată o schiţă a aparaturii lui Rowland şi este reprodusă prima pagină a articolului în care-şi descrie experienţa. Cu zece ani înaintea descoperirii undelor electromagnetice de către Hertz, rezultatele lui Rowland au constituit o bază, deşi mai puţin dramatică, pentru teoria cîmpului electromagnetic a lui Maxwell.

6.9. CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ ÎNTR-UN CÎMP MAGNETIC: EFECTUL HALL

Dacă printr-un conductor, aflat în cîmp magnetic, trece un curent electric, asupra purtătorilor de sarcină în mişcare acţionează direct forţa $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Noi observăm, totuşi, o forţă ce acţionează asupra conductorului ca un întreg. Să vedem de ce se întîmplă aşa. În figura 6.28, *a* este reprezentată o secţiune

printr-o bară metalică străbătută de un curent continuu. Sub acţiunea unui cîmp de intensitate **E**, electronii se îndreaptă spre stînga cu o viteză medie $\bar{v}$, care are aceeaşi semnificaţie ca $\bar{u}$ în discuţia noastră din capitolul 4. Electronii de conducţie sînt reprezentaţi, foarte schematizat, prin puncte albe. Punctele negre sînt ionii pozitivi ce formează reţeaua cristalină rigidă a barei metalice solide. Întrucît electronii sînt negativi, curentul este pe direcţia axei y. Ca de obicei, densitatea de curent **J** şi intensitatea cîmpului **E** sînt legate prin conductivitatea σ a metalului: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. În figura 6.28, *a* nu există alt cîmp magnetic în afara celui creat de curentul însuşi şi pe care-l vom neglija. Acum conectăm un cîmp extern **B** pe direcţia axei x. Starea de mişcare imediat după asta este arătată în figura 6.28, *b*. Electronii sînt deviaţi în jos. Dar întrucît ei nu pot trece dincolo de marginea barei, ei se strîng, pur şi simplu, acolo pînă cînd excesul de sarcini negative de pe marginea inferioară a barei şi excesul corespunzător de sarcini pozitive de pe marginea superioară a barei creează un cîmp electric $\mathbf{E}_t$, în care forţa de mărime eE_t, îndreptată în sus, echilibrează forţa $e\bar{v}B$, îndreptată în jos. În starea staţionară (care se atinge foarte repede!) mişcarea, în medie, este din nou orizontală şi în interiorul metalului există acest cîmp electric transversal $\mathbf{E}_t$, aşa cum se observă în sistemul de coordonate legat de reţeaua cristalină a metalului (fig. 6.28, *c*). Acest cîmp determină acţiunea unei forţe, îndreptate în jos, asupra ionilor pozitivi. Iată cum forţa $(-e\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, ce acţionează asupra electronilor, trece asupra barei solide. Bara, bineînţeles, se sprijină de suportul ei — dacă acesta există, şi dacă nu, se deplasează accelerat în jos.

Existenţa cîmpului transversal $\mathbf{E}_t$ poate fi demonstrată direct prin metode electrice (fig. 6.29). Firele se conectează la punctele P_1 şi P_2 de pe

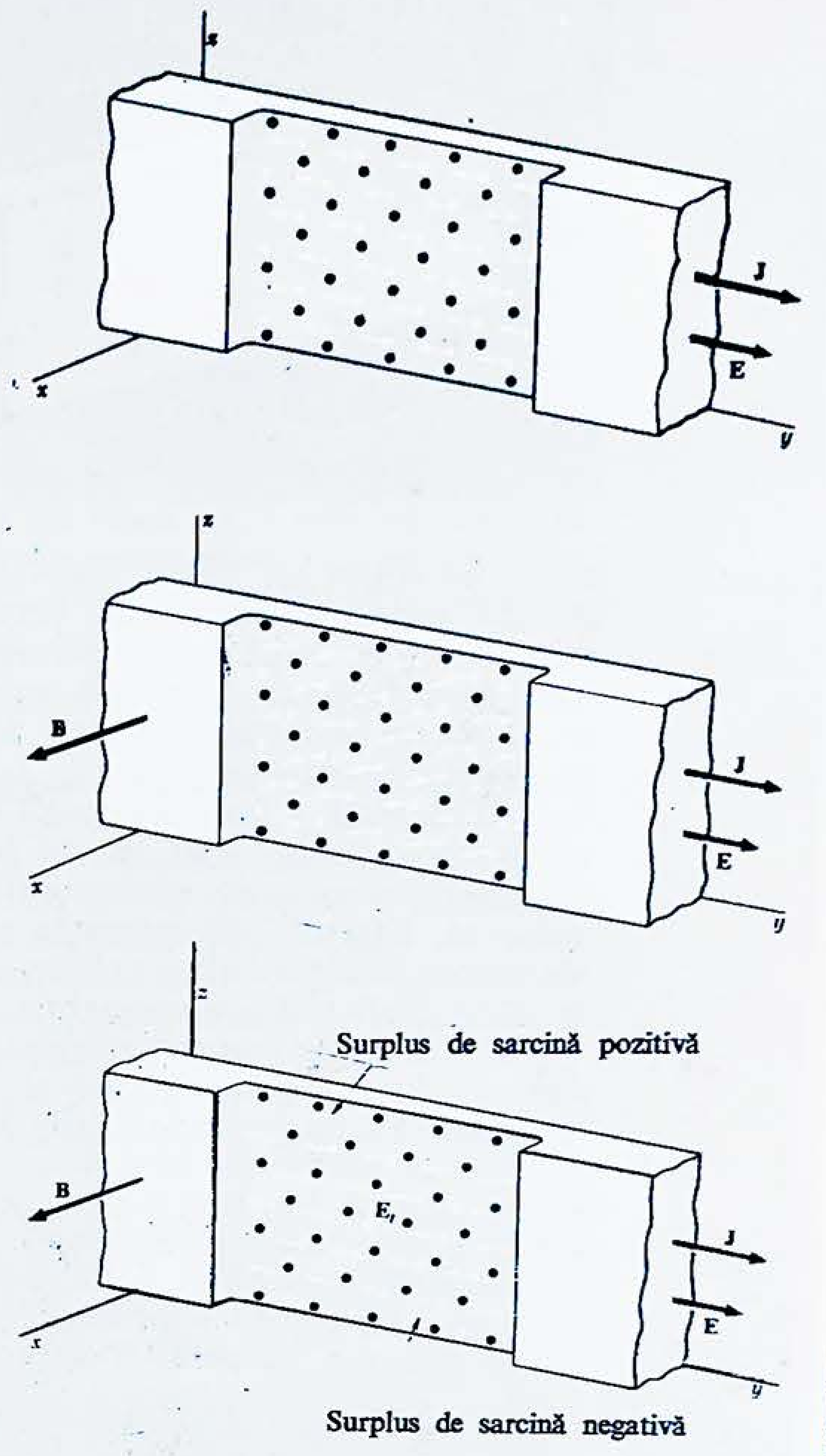


Fig. 6.28. (*a*) Printr-o bară metalică trece un curent. Este arătată doar o porţiune mică din bară. Electronii de conducţie sînt reprezentaţi (bineînţeles, nu în mărime naturală şi nici numărul real) prin puncte albe, ionii pozitivi ai reţelei cristaline — prin puncte negre. Săgeţile indică viteza medie $\bar{v}$ de mişcare a electronilor.
(*b*) În direcţia lui x, se aplică un cîmp magnetic, deviind (la început) electronii în jos.
(*c*) Perturbarea distribuţiei de sarcini dă naştere unui cîmp electric transversal $\mathbf{E}_t$. În acest cîmp, ionii pozitivi aflaţi în repaus, sînt supuşi acţiunii unei forţe îndreptate în jos.

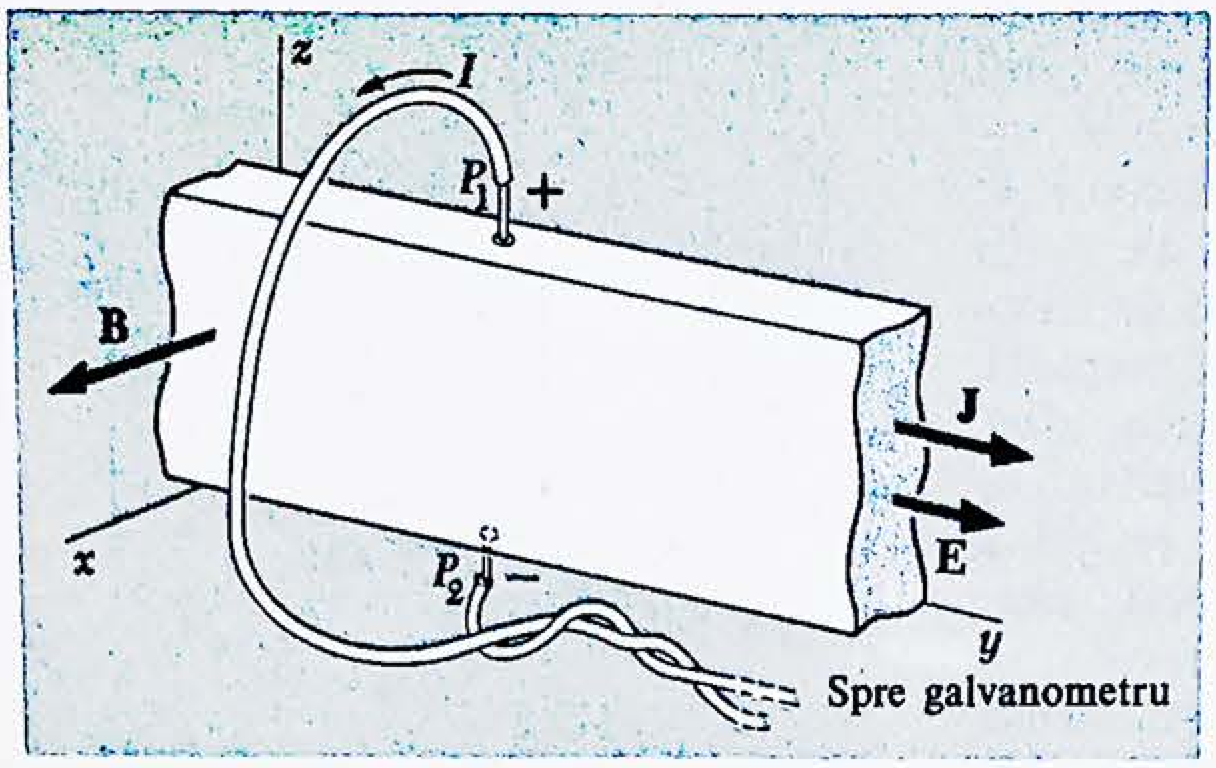


Fig. 6.29. Efectul Hall. Cînd unui conductor străbătut de curent, i se aplică un cîmp magnetic perpendicular, între punctele aflate la extremitățile barei ia naștere o diferență de potențial; în absența cîmpului, aceste puncte se găsesc la același potențial. Aceasta corespunde existenței cîmpului E_t în interiorul barei. Măsurînd tensiunea Hall, se poate determina numărul purtătorilor de sarcină dintr-un cm^3 și semnul lor.

marginile opuse ale barei; punctele de contact se aleg cu grijă astfel încît să aibă același potențial cînd prin bară trece un curent și inducția **B** este zero. Firele se leagă la un galvanometru. După conectarea cîmpului magnetic de inducție **B**, în circuit apare un curent continuu indicînd faptul că P_1 și P_2 nu mai sînt la același potențial. De fapt, în sistemul descris, P_1 se găsește la potențial pozitiv față de P_2.

Acest efect a fost descoperit în 1879 de E.H. Hall, care a fost elevul lui Rowland la Universitatea lui John Hopkins. În vremea aceea nimeni nu înțelegea mecanismul conductibilității în metale. Nici electronul nu era cunoscut. Efectul Hall apărea ca un fenomen foarte util. În cercetările actuale asupra conductibilității electrice, mai ales în semiconductori, măsurătorile de efect Hall sînt indispensabile.

Am văzut că cîmpul magnetic al unui curent ca și forța ce acționează asupra unui conductor străbătut de curent aflat într-un cîmp extern, sînt independente de particularitățile procesului de conductibilitate. Totuși, efectul Hall ne relevă cîte ceva despre natura purtătorilor de sarcină. Observați că dacă curentul în bara din figura 6.28 s-ar fi datorat purtătorilor de sarcină pozitivi ce se mișcă spre dreapta, atunci ar fi luat naștere un cîmp transversal $\mathbf{E}_t$ de sens opus. Astfel, *semnul* „diferenței de potențial Hall" dintre P_1 și P_2 ne spune dacă purtătorii de sarcină sînt pozitivi sau negativi. Cantitativ, mărimea cîmpului transversal E_t este dată de egalitatea

$$qE_t = q\bar{v}B \text{ sau } E_t = \bar{v}B. \tag{63}$$

Pe de altă parte, viteza medie a purtătorului $\bar{v}$ este legată de densitatea de curent J prin ecuația

$$J = nq\bar{v}, \tag{64}$$

unde n — este numărul purtătorilor de sarcină din unitatea de volum, fiecare avînd sarcina q. Combinînd ecuațiile (63) și (64), îl putem elimina pe $\bar{v}$.

$$E_t = \left(\frac{1}{nq}\right) JB. \tag{65}$$

E_t, J și B pot fi măsurați cu ajutorul unei scheme ca cea din figura 6.29. E_t este chiar diferența de potențial dintre P_1 și P_2 împărțită la înălțimea barei. J este intensitatea totală a curentului împărțită la aria secțiunii transversale. În acest fel putem obține $(1/nq)$. Acest factor este numit „coeficientul Hall" al substanței. Pentru multe metale coeficientul Hall are apro-

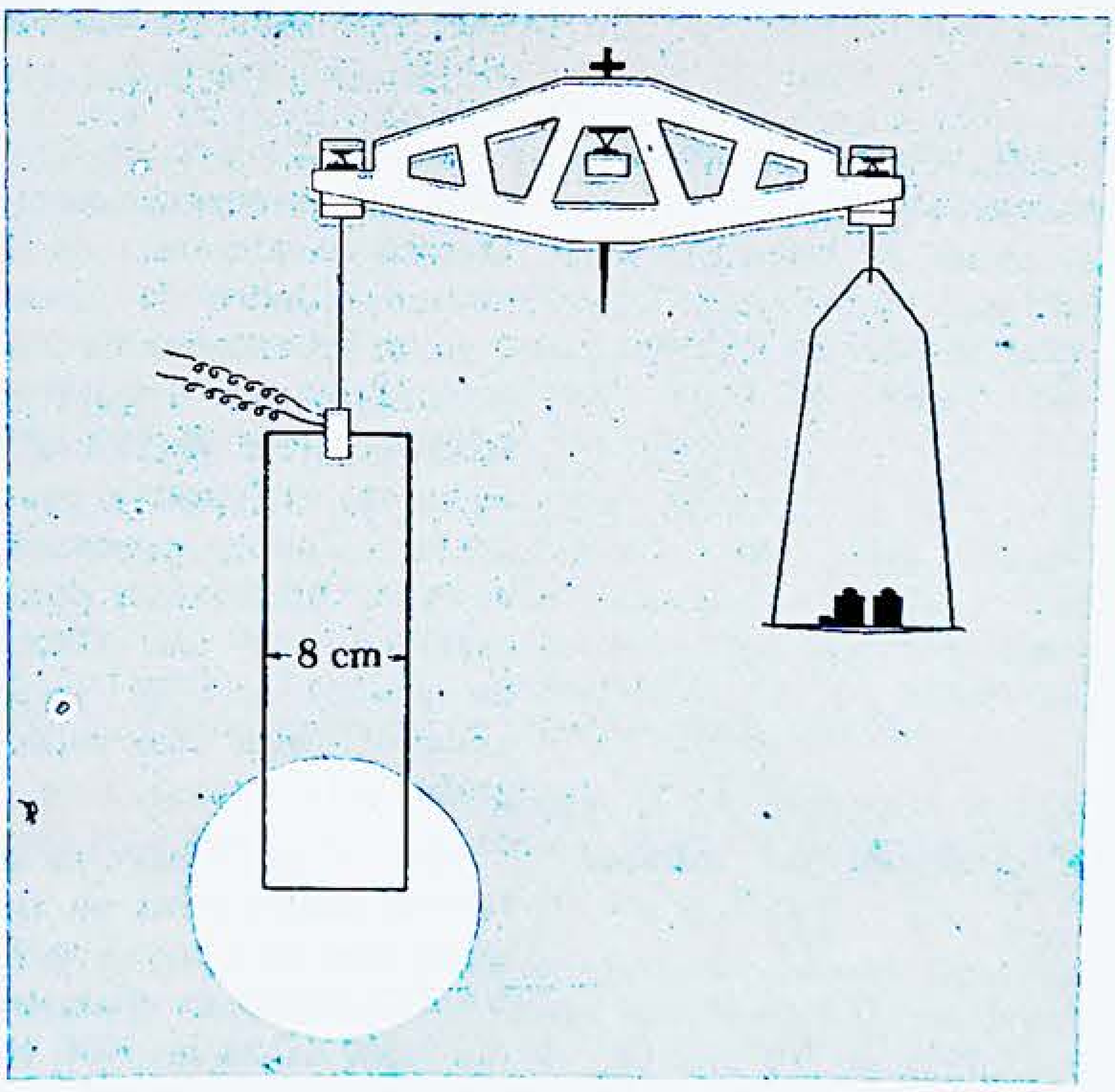
ximativ acea valoare care ar fi fost de așteptat dacă ar exista un electron de conducție per atom și cu semnul efectului care indică că purtătorii de sarcină sînt într-adevăr negativi. Dar unele metale au coeficienți Hall de *semn opus*! Acesta a rămas un paradox pînă cînd a fost explicat de teoria cuantică electronică a metalelor.

PROBLEME

Un mod de a măsura cu precizie cîmpul magnetic.

6.1. În circuitul din figura 5.1, *b* trece un curent de 30 A. Conductorii paralelei se găsesc la 5 cm depărtare. Ce forță se exercită pe unitatea de lungime a unuia din conductori?

6.2. Figura reprezintă o bobină dreptunghiulară suspendată de brațul unei balanțe analitice. Ea se găsește între polii unui electromagnet, planul bobinei fiind paralel cu fețele polilor. Cîmpul magnetic este uniform în regiunea polilor și neglijabil în vecinătatea marginii superioare a conductorului. Bobina are 15 înfășurări și lățimea de 8 cm. Se echilibrează sistemul și apoi se trece un curent de intensitate 0,500 A prin bobină. Care este inducția magnetică B în tesla, dacă balanța se reechilibrează punînd pe platanul din dreapta 60,5 g? Această metodă, perfecționată, a fost utilizată de Biroul Național de Standarde pentru măsurători foarte precise ale inducției magnetice.



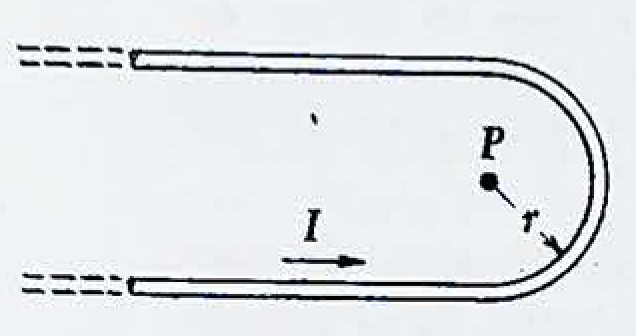
Problema 6.2.

6.3. Considerăm cîmpul magnetic al unei bucle circulare parcurse de curent, care în punctele de pe axa buclei este dat de ecuația (41). Calculați integrala în cîmp de-alungul axei de la $-\infty$ la ∞, verificînd formula generală.

$$\int \mathbf{B}.d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

De ce putem neglija drumul de „întoarcere" ce închide bucla?

6.4. Un conductor lung este curbat în formă de agrafă ca în figură. Găsiți o expresie exactă a inducției magnetice în punctul P aflat în centrul semicercului.



Problema 6.4.

Cîmpul magnetic produs de un electron ce se mișcă într-un atom.

6.5. Un atom de hidrogen este format dintr-un proton și un electron care poate fi considerat (în unele cazuri) că se mișcă pe o orbită circulară în jurul protonului de rază $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m, cu viteza $v = e^2/\hbar$. Aici e este sarcina electrică egală cu $1{,}6 \cdot 10^{-19}$, C, $\hbar = 10^{-34}$ J·s este constanta lui Planck raportată la 2π și m este masa electronului. La ce intensitate a curentului corespunde această sarcină aflată în mișcare circulară? Care este inducția magnetică, exprimată în tesla, creată de mișcarea electronului, în apropierea protonului?

Cîmpul magnetic în conductori coaxiali.

6.6. Conductorii ce transportă curenți de intensitate 5000 A la un magnet mare sînt făcuți în modul următor: O bară de aluminiu de diametru 5 cm este îmbrăcată într-un cilindru de aluminiu cu diametrul interior de 7 cm și cel exterior de 9 cm. (Spațiul inelar dintre bară și cilindru este umplut cu ulei fluid în scopul izolării termice). Prin secțiunea fiecărui conductor densitatea de curent va fi practic constantă. Calculați și reprezentați grafic inducția magnetică B(T) în funcție de distanța de la axă pînă la un punct de pe conductorul exterior, exprimată în cm. (Cîmpul magnetic nu trebuie să fie afectat nici de prezența aluminiului, nici de a uleiului — vezi observația din josul paginii de la paragraful 6.1).

Să construim un solenoid.

6.7. Pe un cilindru cu diametrul de 6 cm se înfășoară într-un singur strat un fir de cupru. Lungimea solenoidului este de 3 cm și pe fiecare centimetru sînt 5 spire. Firul de cupru are diametrul de 0,163 cm și o rezistență de 0,010 Ω/m la 75°C (ne așteptăm ca bobina să se

încălzească!). Dacă acest solenoid este conectat la un generator de 24 V, care va fi inducţia magnetică în solenoid, exprimată în tesla, şi puterea disipată (în W)?

R: $5,20 \cdot 10^{-2}$T; 2000 W.

Transformare de cîmp.

6.8. În apropierea originii sistemului de axe de coordonate x, y, z există un cîmp electric **E** de intensitate 10^6 V/m, a cărui direcţie face un unghi de 30° cu axa x şi 60° cu axa y. Sistemul de referinţă F' are axele paralele cu acesta, dar se mişcă în sensul pozitiv al axei cu o viteză de 0,6 c. Găsiţi direcţia şi intensitatea cîmpului electric ce va fi măsurat de un observator aflat în sistemul F'. Ce cîmp magnetic va observa acesta?

Un conductor ce se mişcă într-un cîmp magnetic.

6.9. Viteza unui curent oceanic într-o regiune în care componenta verticală a cîmpului magnetic pămîntesc este de $0,35.10^{-4}$T este de aproximativ 1 m/s. Conductivitatea apei de mare în această regiune este de 4 $(\Omega \cdot m)^{-1}$. Presupunînd că în afară de termenul datorat mişcării ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) nu există altă componentă orizontală a cîmpului **E**, găsiţi densitatea curentului electric orizontal (în A/m²). Dacă aţi transporta, cu această viteză, o sticlă cu apă de mare prin cîmpul pămîntesc, ar trece un asemenea curent prin ea?

Transformare de cîmp la viteză mică.

6.10. Pentru viteze mici în comparaţie cu c, transformarea cîmpului poate fi scrisă într-o formă foarte simplă.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B};\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

unde **v** este viteza cu care sistemul de coordonate „cu prim" se mişcă faţă de sistemul de coordonate „fără prim". Fie $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}\beta c$ corespunzător cazului particular descris de ecuaţiile (58) şi arătaţi că ecuaţiile de mai sus dau rezultate în concordanţă cu ecuaţiile (58) cu o aproximaţie de $(1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1$. Fie sistemul „cu prim" un avion cu reacţie ce zboară în direcţia nord a cîmpului magnetic, într-o regiune în care intensitatea cîmpului magnetic pămîntesc este de $0,4 \cdot 10^{-4}$ tesla şi face un unghi de 30° cu verticala, fiind îndreptat în jos ca în emisfera nordică. Care este direcţia componentei cîmpului electric, ce ia naştere în urma mişcării în cîmpul magnetic, în sistemul de coordonate legat de avion? Care este intensitatea exprimată în V/m?

Cei doi invarianţi ai transformărilor de cîmp. Rezultatul obţinut ne va folosi în discuţiile asupra undelor electromagnetice de la sfîrşitul capitolului 7.

6.11. Folosind ecuaţiile (58), demonstraţi că $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ este un invariant la transformările Lorentz. Adică, demonstraţi că dacă $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ are o anumită valoare într-un sistem de referinţă inerţial, are aceeaşi valoare în toate sistemele de referinţă inerţiale. Demonstraţi de asemenea că $E^2 - B^2$ este invariant la transformările Lorentz.

6.12. Încercaţi să vă imaginaţi un potenţial vector care să corespundă unui cîmp uniform în direcţia lui z:

$$B_x = 0,\ B_y = 0,\ B_z = B_0.$$

6.13. Observaţi că potenţialul vector **A** este legat de inducţia magnetică **B** în acelaşi mod în care **B** este legat de densitatea de curent **J**. Adică, rot $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, iar

rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Ce condiție îi corespunde lui $\mathbf{A}$ dacă integrala de linie din $\mathbf{B}$, pe orice contur închis, este μ_0 înmulțit cu intensitatea curentului din interiorul acestui contur? Să considerăm cîmpul magnetic al unei bare de metal cilindrice lungi, străbătute de un curent uniform distribuit pe secțiunea transversală și paralel cu axa. Cunoașteți cîmpul unei asemenea distribuții de curent. Schițați distribuția de curent și liniile cîmpului magnetic. Folosind, acum, analogia menționată, găsiți un potențial vector și variația lui cu cîmpul unui solenoid infinit lung. Este util de remarcat că în acest caz, potențialul vector *nu este* nul în regiunea în care cîmpul magnetic *este* zero.

Problemă pentru discuție.

6.14. Întrucît filamente paralele parcurse de curent se atrag reciproc, putem crede că curentul ce trece prin bara solidă, ca în conductorul interior din problema 6.6, are tendința să se concentreze în apropierea axei barei. Adică, electronii de conducție în loc să se distribuie uniform în interiorul metalului, așa cum se întîmplă de obicei, se strîng în jurul axului și cea mai mare parte a curentului se va găsi aici. Cum credeți că puteți preveni acest lucru? Se întîmplă în general așa? Dacă un asemenea efect există, puteți sugera o experiență care să-l detecteze?

Forța ce acționează între doi purtători de sarcină ce se mișcă paralel, unul lîngă altul.

6.15. Într-un tub catodic, considerăm doi electroni ce se mișcă paralel, unul lîngă altul, cu aceeași viteză v. Distanța dintre ei, măsurată perpendicular pe direcția vitezei lor, este r. Ce forță acționează asupra unuia din ei, aflat în prezența celuilalt, observată în sistemul laboratorului? Dacă v ar fi fost foarte mic în comparație cu c, răspunsul ar fi fost simplu e^2/r^2. Dar dacă v nu este mic, trebuie să fiți prudenți.

a) Pentru a găsi răspunsul, cel mai simplu se procedează astfel: recurgem la sistemul de referință ce se mișcă împreună cu electronii. În acest sistem, cei doi electroni se află în repaus, distanța dintre ei este tot r (de ce?) și forța este chiar e^2/r^2. Folosind, acum, legea de transformare a forței (ec. 5.31), transformăm forța în sistemul de referință al laboratorului. (Fiți atenți cu privire la notarea sistemului „cu prim"; este forța mai mare sau mai mică în sistemul laboratorului decît forța în sistemul electronului?)

b) Este posibil să obțineți același răspuns lucrînd numai în sistemul laboratorului. În sistemul laboratorului, pentru o poziție instantanee a electronului *1*, există și cîmpul electric și magnetic produs de electronul *2* (v. fig. 6.26). Calculați forța totală exercitată asupra electronului *1*, care se mișcă cu viteza v prin aceste cîmpuri și arătați că obțineți același rezultat ca în (*a*). Arătați într-o diagramă direcțiile cîmpurilor și forțelor.

c) Ce puteți spune, în lumina celor prezentate, despre forța dintre doi electroni, ce se mișcă unul lîngă altul, în limita $v \to c$?

Capitolul 7

Inducţia electromagnetică şi ecuaţiile lui Maxwell

7.1. Descoperirea lui Faraday 242
7.2. O bară conductoare se deplasează printr-un cîmp magnetic uniform 245
7.3. O buclă se deplasează printr-un cîmp magnetic neuniform 248
7.4. O buclă staţionară cu sursa cîmpului în mişcare 256
7.5. O lege generală a inducţiei 261
7.6. Inductanţa mutuală 262
7.7. O teoremă de „reciprocitate" 265
7.8. Autoinducţia 267
7.9. Un circuit care conţine autoinductanţă 268
7.10. Energia înmagazinată în cîmpul magnetic 271
7.11. „Ceva lipseşte" 273
7.12. Curentul de deplasare 276
7.13. Ecuaţiile lui Maxwell 279
Probleme 284

7.1. DESCOPERIREA LUI FARADAY

1. Puterea pe care o are electricitatea de tensiune de a produce o stare electrică opusă în vecinătatea ei a fost exprimată prin termenul general de *Inducție* care, deoarece a intrat în limbajul științific, poate de asemenea să fie folosit în mod propriu cu același sens general pentru a exprima puterea pe care o au curenții electrici de a induce orice stare particulară în materia din vecinătatea lor imediată, altfel neutră. Cu acest înțeles intenționez să-l folosesc în lucrarea de față.

2. Anumite efecte ale inducției curenților electrici au fost deja recunoscute și descrise: ca acelea de magnetizare, experiențele lui Ampère de a aduce un disc de cupru lîngă o spirală plană, repetarea cu electromagneți a extraordinarelor experiențe ale lui Arago și, poate, cîteva altele. Totuși apărea improbabil ca acestea să poată fi toate efectele pe care inducția prin curenți le-ar putea produce; în mod special deoarece, renunțînd la fier, aproape toate dintre ele dispar, în timp ce o infinitate de corpuri, care arată fenomene precizate de inducție cu electricitatea de tensiune, încă rămîn să fie supuse inducției electricității în mișcare.

3. Mai departe: Dacă frumoasa teorie a lui Ampère era acceptată, sau oricare alta, sau orice fel de rezervă era mental păstrată, încă apărea cu totul extraordinar, ca în timp ce orice curent electric era însoțit de o acțiune magnetică de intensitate corespunzătoare la unghi drept față de curent, buni conductori de electricitate, situați în interiorul sferei acestei acțiuni, să nu aibă nici un curent indus în ei, ori alt efect detectabil produs echivalent în forță unui asemenea curent.

4. Aceste considerații, cu consecința lor, speranța de a obține electricitate din magnetismul comun, m-au stimulat în diverse perioade spre a investiga experimental efectele inductive ale curenților electrici. Pînă la urmă am ajuns la rezultate pozitive, și nu numai s-au împlinit speranțele, dar am obținut o cheie care îmi părea să dezvăluie o explicație completă a fenomenelor magnetice ale lui Arago, și de asemenea a descoperi o nouă stare, care poate probabil să aibă mare influență în unele din cele mai importante efecte ale curenților electrici.

5. Intenționez să descriu aceste rezultate, nu așa cum au fost obținute, dar de asemenea manieră încît să se dea imaginea cea mai concisă a întregului."

Astfel începe relatarea lui Michael Faraday despre descoperirea inducției electromagnetice. Acest pasaj a fost o parte dintr-o lucrare pe care Faraday a prezentat-o în 1831. Relatarea este citată din lucrarea lui Faraday „*Cercetări experimentale în electricitate*", publicată la Londra în 1839. În lucrare urmează descrierea unui număr de experiențe, prin care Faraday a adus la lumină fiecare trăsătură esențială a producerii efectelor electrice prin acțiune magnetică.

Prin „electricitate de tensiune" Faraday a înțeles sarcini electrostatice, și inducția pe care el o menționează în prima propoziție nu înseamnă nimic mai mult decît am studiat în capitolul 3: Prezența unei sarcini cauzează

7.1. DESCOPERIREA LUI FARADAY

1. Puterea pe care o are electricitatea de tensiune de a produce o stare electrică opusă în vecinătatea ei a fost exprimată prin termenul general de *Inducție* care, deoarece a intrat în limbajul științific, poate de asemenea să fie folosit în mod propriu cu același sens general pentru a exprima puterea pe care o au curenții electrici de a induce orice stare particulară în materia din vecinătatea lor imediată, altfel neutră. Cu acest înțeles intenționez să-l folosesc în lucrarea de față.

2. Anumite efecte ale inducției curenților electrici au fost deja recunoscute și descrise: ca acelea de magnetizare, experiențele lui Ampère de a aduce un disc de cupru lîngă o spirală plană, repetarea cu electromagneți a extraordinarelor experiențe ale lui Arago și, poate, cîteva altele. Totuși apărea improbabil ca acestea să poată fi toate efectele pe care inducția prin curenți le-ar putea produce; în mod special deoarece, renunțînd la fier, aproape toate dintre ele dispar, în timp ce o infinitate de corpuri, care arată fenomene precizate de inducție cu electricitatea de tensiune, încă rămîn să fie supuse inducției electricității în mișcare.

3. Mai departe: Dacă frumoasa teorie a lui Ampère era acceptată, sau oricare alta, sau orice fel de rezervă era mental păstrată, încă apărea cu totul extraordinar, ca în timp ce orice curent electric era însoțit de o acțiune magnetică de intensitate corespunzătoare la unghi drept față de curent, buni conductori de electricitate, situați în interiorul sferei acestei acțiuni, să nu aibă nici un curent indus în ei, ori alt efect detectabil produs echivalent în forță unui asemenea curent.

4. Aceste considerații, cu consecința lor, speranța de a obține electricitate din magnetismul comun, m-au stimulat în diverse perioade spre a investiga experimental efectele inductive ale curenților electrici. Pînă la urmă am ajuns la rezultate pozitive, și nu numai s-au împlinit speranțele, dar am obținut o cheie care îmi părea să dezvăluie o explicație completă a fenomenelor magnetice ale lui Arago, și de asemenea a descoperi o nouă stare, care poate probabil să aibă mare influență în unele din cele mai importante efecte ale curenților electrici.

5. Intenționez să descriu aceste rezultate, nu așa cum au fost obținute, dar de asemenea manieră încît să se dea imaginea cea mai concisă a întregului."

Astfel începe relatarea lui Michael Faraday despre descoperirea inducției electromagnetice. Acest pasaj a fost o parte dintr-o lucrare pe care Faraday a prezentat-o în 1831. Relatarea este citată din lucrarea lui Faraday „*Cercetări experimentale în electricitate*", publicată la Londra în 1839. În lucrare urmează descrierea unui număr de experiențe, prin care Faraday a adus la lumină fiecare trăsătură esențială a producerii efectelor electrice prin acțiune magnetică.

Prin „electricitate de tensiune" Faraday a înțeles sarcini electrostatice, și inducția pe care el o menționează în prima propoziție nu înseamnă nimic mai mult decît am studiat în capitolul 3: Prezența unei sarcini cauzează

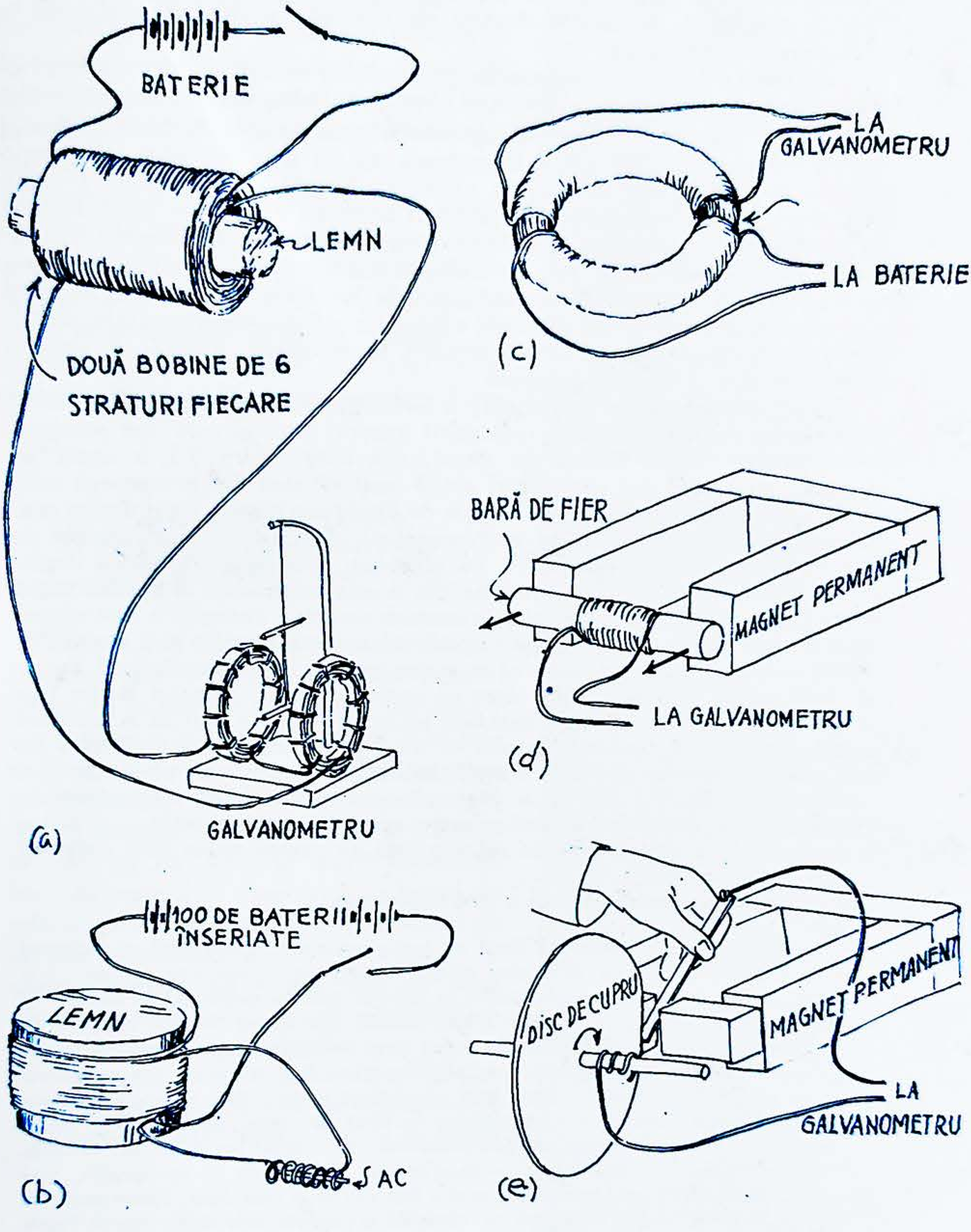


Fig. 7.1. (a—e). Interpretarea de către autor a cîtorva dintre experiențele lui Faraday descrise în lucrarea sa *„Cercetări experimentale în electricitate"*.

o redistribuire a sarcinilor pe conductorii din preajmă. Întrebarea lui Faraday era, de ce un curent electric nu creează un alt curent electric în conductorii din preajmă?

Producerea de cîmpuri magnetice prin curenţi electrici a fost mult investigată după descoperirea lui Oersted. Sursa de laborator obişnuită atunci pentru generarea acestor curenţi „galvanici" era bateria voltaică. Cel mai sensibil detector al unor astfel de curenţi era un galvanometru. El consta dintr-un ac magnetizat montat ca un ac de busolă ori suspendat printr-o fibră slabă între două bobine de sîrmă. Uneori un alt ac, în afara bobinei dar legat rigid de primul ac, era folosit pentru a compensa influenţa cîmpului magnetic terestru (fig. 7.1, *a*). Schiţele din figura 7.1, *b* pînă la *e* reprezintă cîteva din experienţele de inducţie ale lui Faraday. Trebuie să citiţi relatarea lui însuşi, una din lucrările clasice ale ştiinţei experimentale, pentru a aprecia ingeniozitatea cu care a urmărit investigarea, atenţia şi spiritul deschis cu care a examinat faptele.

În primele sale cercetări Faraday a fost contrariat de a găsi că un curent staţionar nu are nici un efect măsurabil asupra unui circuit din preajmă. El a construit diverse bobine de sîrmă, din care figura 7.1, *a* arată un exemplu, înfăşurînd doi conductori astfel încît să stea foarte aproape unul de altul dar totuşi separaţi prin izolaţia de hîrtie sau pînză. Unul dintre conductori ar forma un circuit cu galvanometrul. Prin celălalt s-ar trimite un curent puternic de la baterie. Nu s-a observat, decepţionant, nici o deplasare a galvanometrului. Dar într-una din aceste experienţe el a observat o foarte uşoară deplasare a acului galvanometrului cînd curentul a fost conectat şi o alta cînd a fost întrerupt. Urmărind această direcţie el a stabilit în curînd dincolo de orice îndoială că se induc curenţi în alţi conductori, nu de către un curent *staţionar*, ci de către un curent *variabil*. În acest stadiu una dintre strălucitele tactici experimentale ale lui Faraday a fost să înlocuiască galvanometrul, despre care a înţeles că nu este un bun detector pentru un puls scurt de curent, printr-o simplă bobină în care a pus un ac de oţel nemagnetizat (fig. 7.1, *b*). El a găsit că acul a fost lăsat magnetizat de către pulsul de curent indus cînd curentul primar a fost conectat — şi putea fi magnetizat în sensul opus de către pulsul de curent indus cînd curentul primar era întrerupt.

Iată în descrierea lui însuşi o altă experienţă:

> „În experienţa precedentă firele au fost plasate unul lîngă altul, şi contactul celui inductor cu bateria făcut cînd efectul inductiv era cerut; dar deoarece s-ar putea presupune că acţiunea inductivă se exercită doar în momentul de stabilire şi întrerupere a contactului, inducţia a fost produsă într-un alt fel. Mai mulţi metrii de sîrmă de cupru au fost întinşi în forme largi de zig-zag, reprezentînd litera *W*, pe suprafaţa unei scînduri largi; un al doilea fir a fost întins în exact aceleaşi forme pe o a doua scîndură, astfel încît adusă lîngă prima, firele să se atingă peste tot, cu excepţia faptului că a fost interpus un strat de hîrtie groasă. Unul dintre aceste fire a fost conectat cu galvanometrul, şi celălalt cu o baterie voltaică. Primul fir a fost apoi mişcat spre cel de-al doilea, şi în timp ce se apropia, acul a fost deviat. Fiind apoi îndepărtat, acul a fost deviat în sens opus. Prin apropierea şi îndepărtarea firelor, simultană cu vibraţiile acului, ultimele devin repede foarte largi; dar cînd firele au încetat să se mişte unul faţă de celălalt, acul galvanometrului revine îndată la poziţia sa uzuală.
>
> Cînd firele se apropiau, curentul indus era în direcţia *contrară* curentului inductor. Cînd firele se depărtau, curentul era în *aceeaşi* direcţie cu curentul inductor. Cînd firele rămîneau staţionare, nu apărea nici un curent indus.

o redistribuire a sarcinilor pe conductorii din preajmă. Întrebarea lui Faraday era, de ce un curent electric nu creează un alt curent electric în conductorii din preajmă?

Producerea de cîmpuri magnetice prin curenţi electrici a fost mult investigată după descoperirea lui Oersted. Sursa de laborator obişnuită atunci pentru generarea acestor curenţi „galvanici" era bateria voltaică. Cel mai sensibil detector al unor astfel de curenţi era un galvanometru. El consta dintr-un ac magnetizat montat ca un ac de busolă ori suspendat printr-o fibră slabă între două bobine de sîrmă. Uneori un alt ac, în afara bobinei dar legat rigid de primul ac, era folosit pentru a compensa influenţa cîmpului magnetic terestru (fig. 7.1, *a*). Schiţele din figura 7.1, *b* pînă la *e* reprezintă cîteva din experienţele de inducţie ale lui Faraday. Trebuie să citiţi relatarea lui însuşi, una din lucrările clasice ale ştiinţei experimentale, pentru a aprecia ingeniozitatea cu care a urmărit investigarea, atenţia şi spiritul deschis cu care a examinat faptele.

În primele sale cercetări Faraday a fost contrariat de a găsi că un curent staţionar nu are nici un efect măsurabil asupra unui circuit din preajmă. El a construit diverse bobine de sîrmă, din care figura 7.1, *a* arată un exemplu, înfăşurînd doi conductori astfel încît să stea foarte aproape unul de altul dar totuşi separaţi prin izolaţia de hîrtie sau pînză. Unul dintre conductori ar forma un circuit cu galvanometrul. Prin celălalt s-ar trimite un curent puternic de la baterie. Nu s-a observat, decepţionant, nici o deplasare a galvanometrului. Dar într-una din aceste experienţe el a observat o foarte uşoară deplasare a acului galvanometrului cînd curentul a fost conectat şi o alta cînd a fost întrerupt. Urmărind această direcţie el a stabilit în curînd dincolo de orice îndoială că se induc curenţi în alţi conductori, nu de către un curent *staţionar*, ci de către un curent *variabil*. În acest stadiu una dintre strălucitele tactici experimentale ale lui Faraday a fost să înlocuiască galvanometrul, despre care a înţeles că nu este un bun detector pentru un puls scurt de curent, printr-o simplă bobină în care a pus un ac de oţel nemagnetizat (fig. 7.1, *b*). El a găsit că acul a fost lăsat magnetizat de către pulsul de curent indus cînd curentul primar a fost conectat — şi putea fi magnetizat în sensul opus de către pulsul de curent indus cînd curentul primar era întrerupt.

Iată în descrierea lui însuşi o altă experienţă:

„În experienţa precedentă firele au fost plasate unul lîngă altul, şi contactul celui inductor cu bateria făcut cînd efectul inductiv era cerut; dar deoarece s-ar putea presupune că acţiunea inductivă se exercită doar în momentul de stabilire şi întrerupere a contactului, inducţia a fost produsă într-un alt fel. Mai mulţi metrii de sîrmă de cupru au fost întinşi în forme largi de zig-zag, reprezentînd litera *W*, pe suprafaţa unei scînduri largi; un al doilea fir a fost întins în exact aceleaşi forme pe o a doua scîndură, astfel încît adusă lîngă prima, firele să se atingă peste tot, cu excepţia faptului că a fost interpus un strat de hîrtie groasă. Unul dintre aceste fire a fost conectat cu galvanometrul, şi celălalt cu o baterie voltaică. Primul fir a fost apoi mişcat spre cel de-al doilea, şi în timp ce se apropia, acul a fost deviat. Fiind apoi îndepărtat, acul a fost deviat în sens opus. Prin apropierea şi îndepărtarea firelor, simultană cu vibraţiile acului, ultimele devin repede foarte largi; dar cînd firele au încetat să se mişte unul faţă de celălalt, acul galvanometrului revine îndată la poziţia sa uzuală.

Cînd firele se apropiau, curentul indus era în direcţia *contrară* curentului inductor. Cînd firele se depărtau, curentul era în *aceeaşi* direcţie cu curentul inductor. Cînd firele rămîneau staţionare, nu apărea nici un curent indus.

În acest capitol studiem interacţia electromagnetică pe care Faraday a explorat-o în acele experienţe. Din punctul nostru de vedere prezent, inducţia poate fi privită ca o consecinţă naturală a forţei asupra unei sarcini în mişcare într-un cîmp magnetic. Într-un sens limitat, putem obţine legea inducţiei din ceea ce deja cunoaştem. Urmărind acest curs ne îndepărtăm din nou de ordinea istorică a dezvoltării, dar facem astfel (împrumutînd propriile cuvinte ale lui Faraday de la sfîrşitul pasajului citat) *pentru a da cea mai concisă imagine a întregului.*

7.2. O BARĂ CONDUCTOARE SE DEPLASEAZĂ PRINTR-UN CÎMP MAGNETIC UNIFORM

Figura 7.2, *a* arată o bucată dreaptă de sîrmă, sau o vergea metalică subţire, presupusă în mişcare cu viteza constantă **v** într-o direcţie perpendiculară pe lungimea sa. În spaţiul prin care se mişcă vergeaua există un cîmp uniform de inducţie magnetică **B**, constant în timp. Acesta ar putea fi obţinut cu un solenoid mare cuprinzînd întreaga regiune a diagramei. Sistemul de referinţă F de coordonate x, y, z este acela în care solenoidul se află în repaus. În absenţa vergelei nu există nici un cîmp electric în acel sistem, numai cîmpul magnetic uniform de inducţie **B**.

Vergeaua, fiind conductoare, conţine particule încărcate care se vor deplasa dacă li se aplică o forţă. Orice particulă încărcată

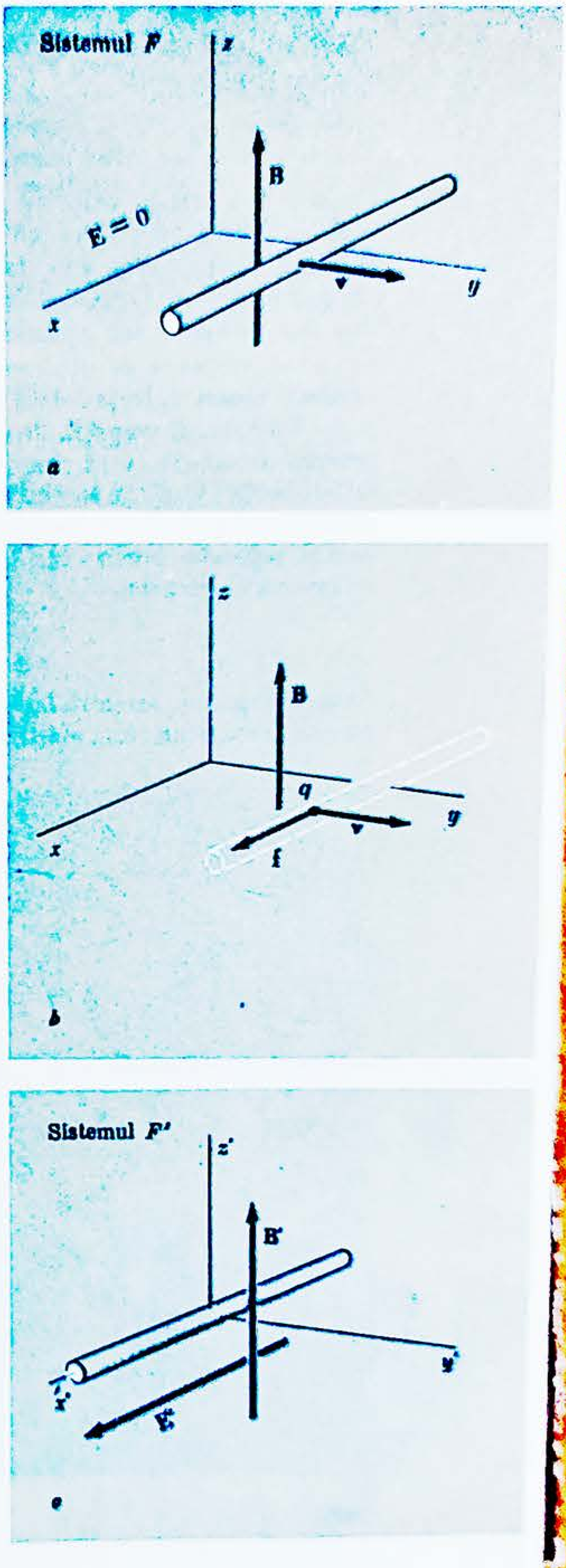


Fig. 7.2. (*a*). O bară conductoare se mişcă printr-un cîmp magnetic.
(*b*) Orice sarcină q care se mişcă împreună cu bara este supusă forţei $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
(*c*) Sistemul de referinţă F' se mişcă cu bara: în acest sistem există un cîmp electric de intensitate $\mathbf{E}'$.

care este purtată cu vergeaua, ca particula de sarcină q din figura , b,7.2 se mişcă în mod necesar prin cîmpul magnetic de inducţie **B** şi de aceea este acţionată de o forţă

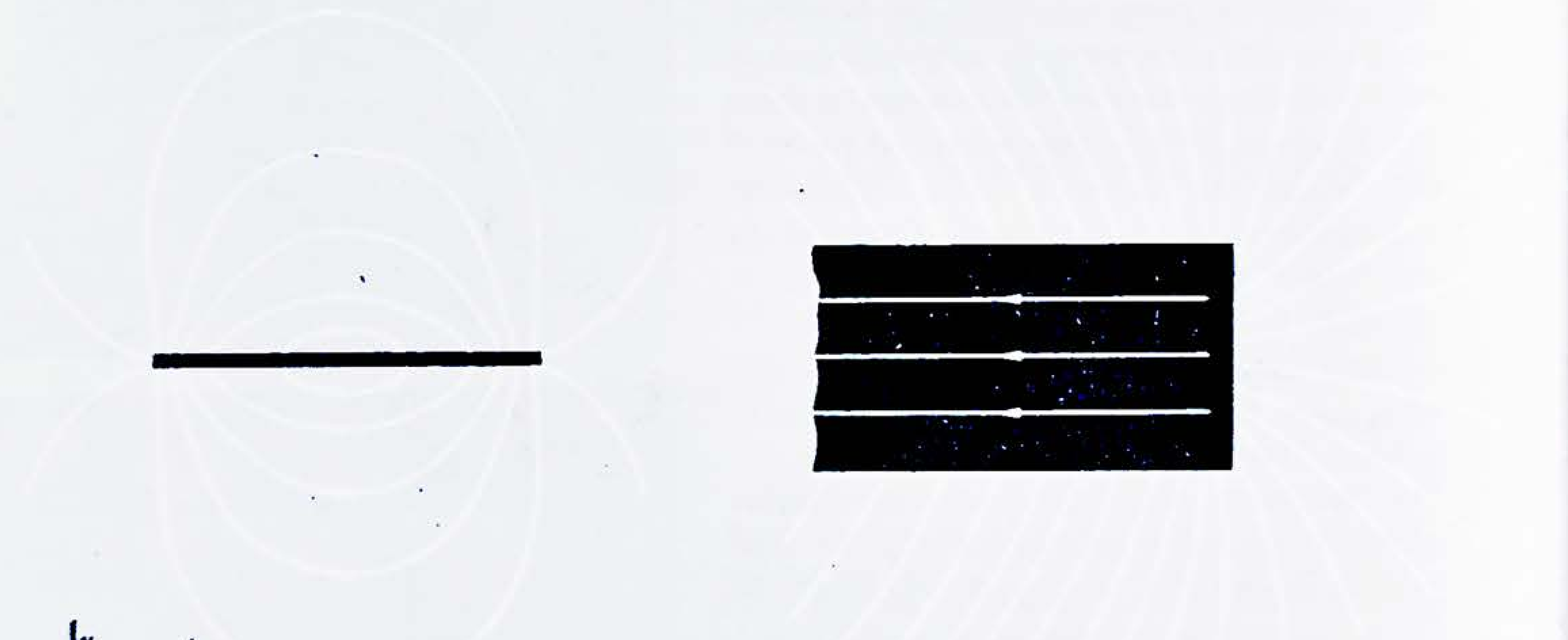
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{1}$$

Cu **B** şi **v** orientaţi cum se arată în figura 7.2, forţa este în direcţia x pozitivă dacă q este o sarcină pozitivă, şi în direcţia opusă pentru electronii încărcaţi negativ care sînt de fapt purtătorii de sarcină mobilă în cei mai mulţi conductori. Consecinţele vor fi aceleaşi, indiferent dacă sarcinile negative sau pozitive, sau ambele, sînt mobile.

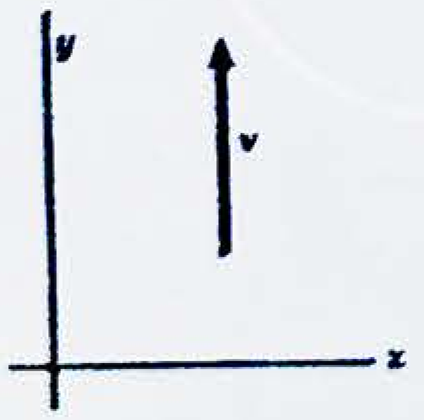
Cînd vergeaua se deplasează cu viteză constantă şi procesele au ajuns la o stare staţionară, forţa **f** dată de ecuaţia 1 trebuie să fie echilibrată, în fiecare punct dinăuntrul vergelei, de o forţă egală şi de sens contrar. Aceasta poate proveni numai de la un cîmp electric în vergea. Cîmpul electric se dezvoltă astfel: Forţa **f** împinge sarcinile negative către o extremitate a vergelei, lăsînd cealaltă extremitate încărcată pozitiv. Aceasta se continuă pînă cînd aceste sarcini separate produc ele însele un cîmp electric **E** astfel încît, oriunde în interiorul vergelei,

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f}. \tag{2}$$

Atunci mişcarea sarcinii faţă de vergea încetează. Această distribuţie de sarcină creează un cîmp electric în exteriorul vergelei, ca şi în interior. Cîmpul



(a) (b)



Sistemul *F*

Fig. 7.3. (a) Cîmpul electric, aşa cum apare la un moment dat, în sistemul *F*. Există un cîmp electric în vecinătatea barei, şi de asemenea în interiorul barei. Sursele cîmpului sînt sarcini pe suprafaţa barei, cum se arată în (b) vederea mărită a extremităţii drepte a barei.

care este purtată cu vergeaua, ca particula de sarcină q din figura , b,7.2 se mişcă în mod necesar prin cîmpul magnetic de inducţie **B** şi de aceea este acţionată de o forţă

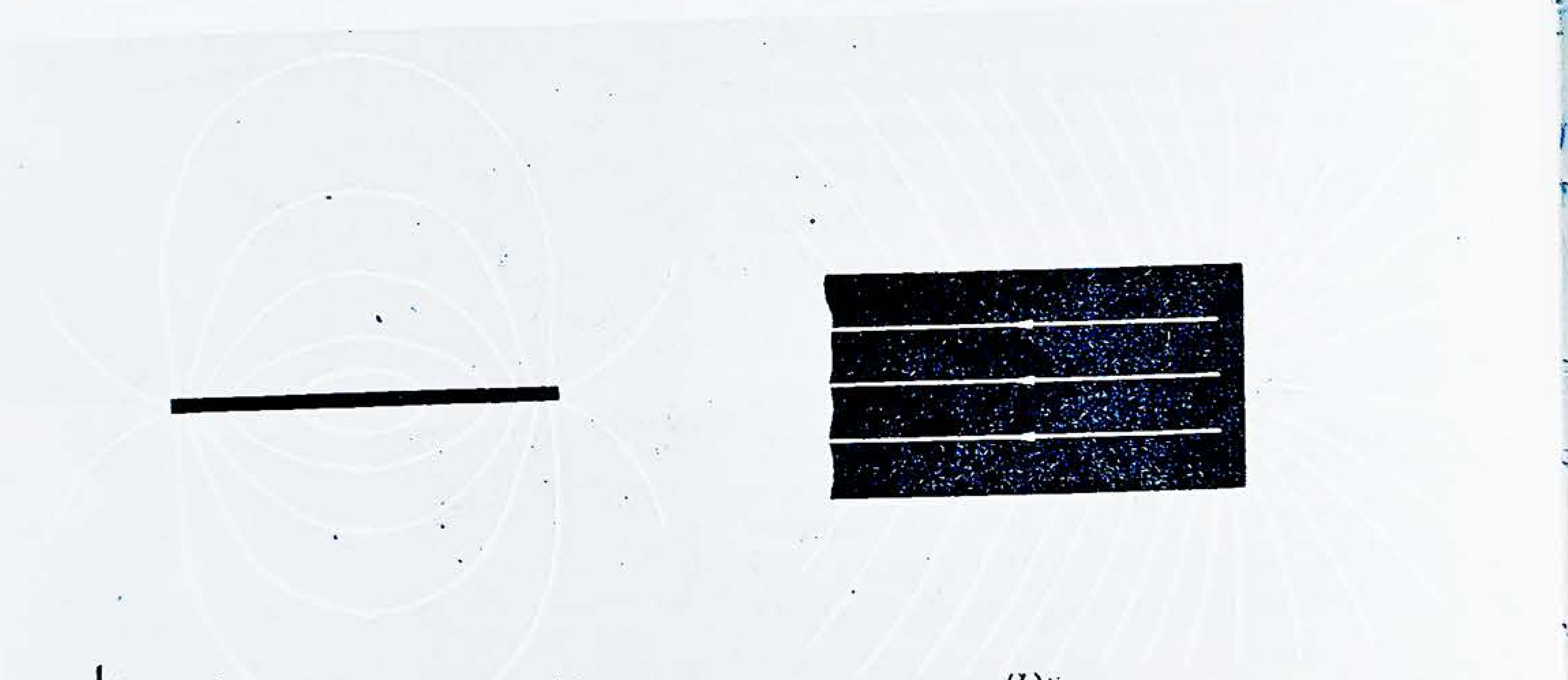
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \qquad (1)$$

Cu **B** şi **v** orientaţi cum se arată în figura 7.2, forţa este în direcţia x pozitivă dacă q este o sarcină pozitivă, şi în direcţia opusă pentru electronii încărcaţi negativ care sînt de fapt purtătorii de sarcină mobilă în cei mai mulţi conductori. Consecinţele vor fi aceleaşi, indiferent dacă sarcinile negative sau pozitive, sau ambele, sînt mobile.

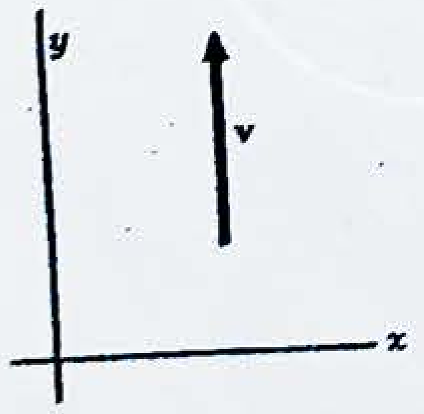
Cînd vergeaua se deplasează cu viteză constantă şi procesele au ajuns la o stare staţionară, forţa **f** dată de ecuaţia 1 trebuie să fie echilibrată, în fiecare punct dinăuntrul vergelei, de o forţă egală şi de sens contrar. Aceasta poate proveni numai de la un cîmp electric în vergea. Cîmpul electric se dezvoltă astfel: Forţa **f** împinge sarcinile negative către o extremitate a vergelei, lăsînd cealaltă extremitate încărcată pozitiv. Aceasta se continuă pînă cînd aceste sarcini separate produc ele însele un cîmp electric **E** astfel încît, oriunde în interiorul vergelei,

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f}. \qquad (2)$$

Atunci mişcarea sarcinii faţă de vergea încetează. Această distribuţie de sarcină creează un cîmp electric în exteriorul vergelei, ca şi în interior. Cîmpul



(a) (b)



Sistemul F

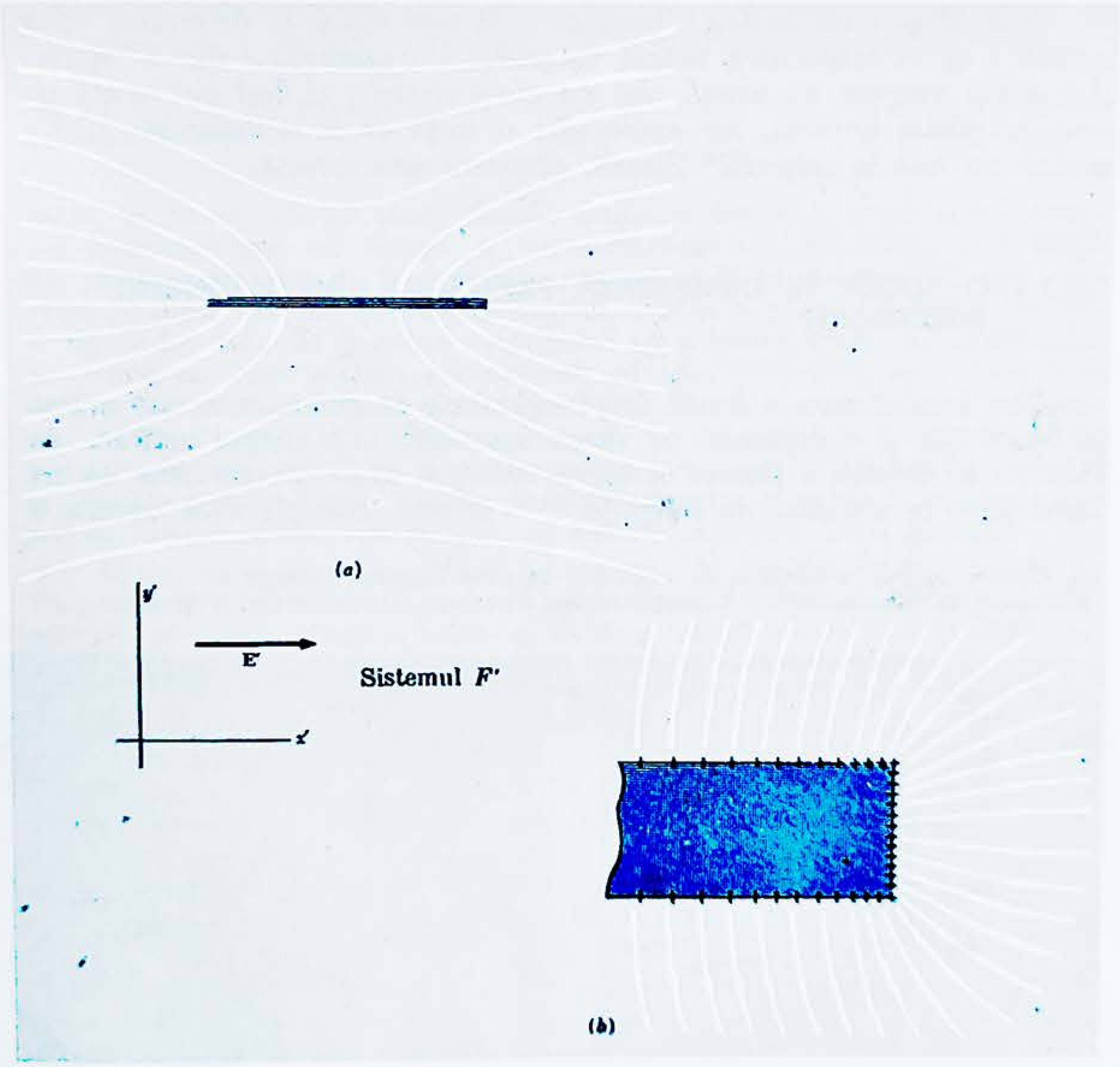
Fig. 7.3. (*a*) Cîmpul electric, aşa cum apare la un moment dat, în sistemul F. Există un cîmp electric în vecinătatea barei, şi de asemenea în interiorul barei. Sursele cîmpului sînt sarcini pe suprafaţa barei, cum se arată în (*b*) vederea mărită a extremităţii drepte a barei.

în afară arată oarecum ca acela al sarcinilor pozitivă şi negativă separate cu diferenţa că sarcinile nu sînt concentrate în întregime la extremităţile vergelei dar sînt distribuite de-a lungul ei. Cîmpul exterior este schiţat în figura 7.3, *a*. Figura 7.3, *b* este o vedere mărită a capătului încărcat pozitiv al vergelei, arătînd distribuţia de sarcină pe suprafaţă şi cîteva linii de cîmp atît înafară cît şi înăuntrul conductorului. Acesta este modul în care se prezintă lucrurile, la orice moment de timp, în sistemul F.

Să observăm acest sistem dintr-un referenţial F' care se deplasează cu vergeaua. Neglijînd pentru moment vergeaua, vedem în acest sistem de referinţă F', sugerat în figura 7.2, *c*, un cîmp magnetic de inducţie $\mathbf{B}'$ (nu mult diferit de $\mathbf{B}$ dacă v este mic) împreună cu un cîmp electric uniform, dat de ecuaţia 6.62

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'. \tag{3}$$

Fig. 7.4. (*a*) Cîmpul electric în sistemul F' în care bara este în repaus. Cîmpul este o superpoziţie a unui cîmp general de intensitate $\mathbf{E}'$, uniform în întreg spaţiul şi cîmpul datorit distribuţiei sarcinii superficiale. Rezultatul este cîmpul electric nul în interiorul barei, arătat în detaliu mărit în (*b*). A se compara cu fig. 7.3.



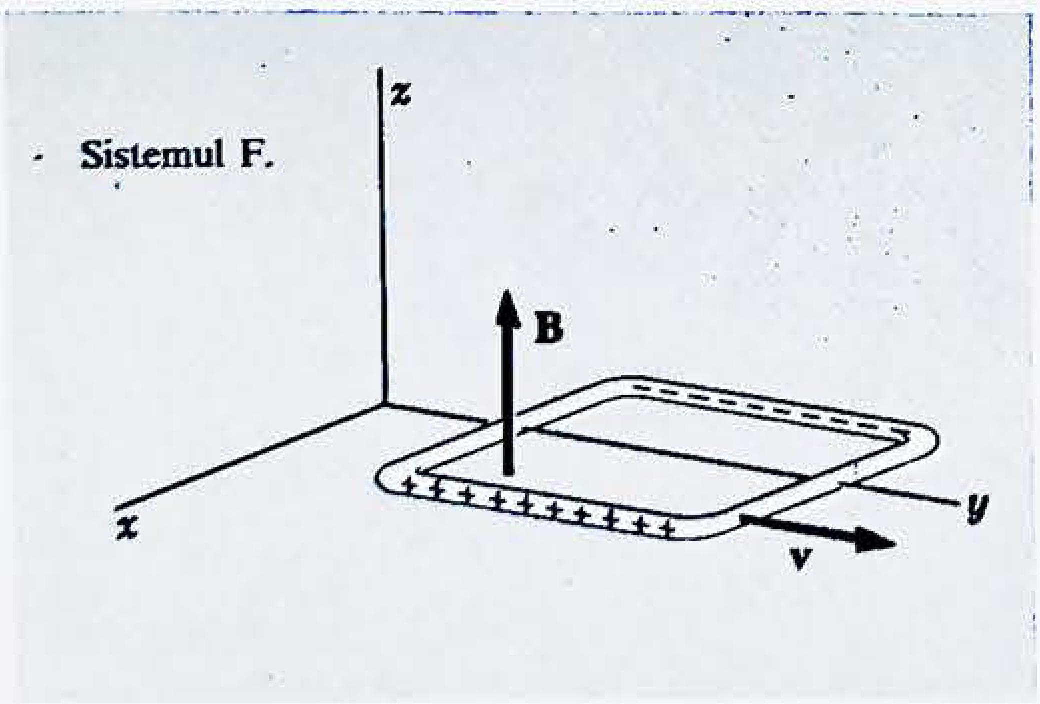
Cînd adăugăm vergeaua la acest sistem, tot ceea ce facem este punerea unei vergele conductoare staționare într-un cîmp electric uniform. Va apare o redistribuire a sarcinii pe suprafața vergelei astfel încît să se anuleze cîmpul electric interior, ca în cazul cutiei metalice din figura 3.6, sau al oricărui alt conductor într-un cîmp electric. Prezența cîmpului de inducție magnetică $\mathbf{B}'$ nu are nici o influență asupra acestei distribuții de sarcină statice. Figura 7.4,*a* arată cîteva linii de cîmp electric în sistemul F', și în vederea mărită din figura 7.4, *b* a extremității vergelei observăm că în *interiorul* vergelei cîmpul electric este zero.

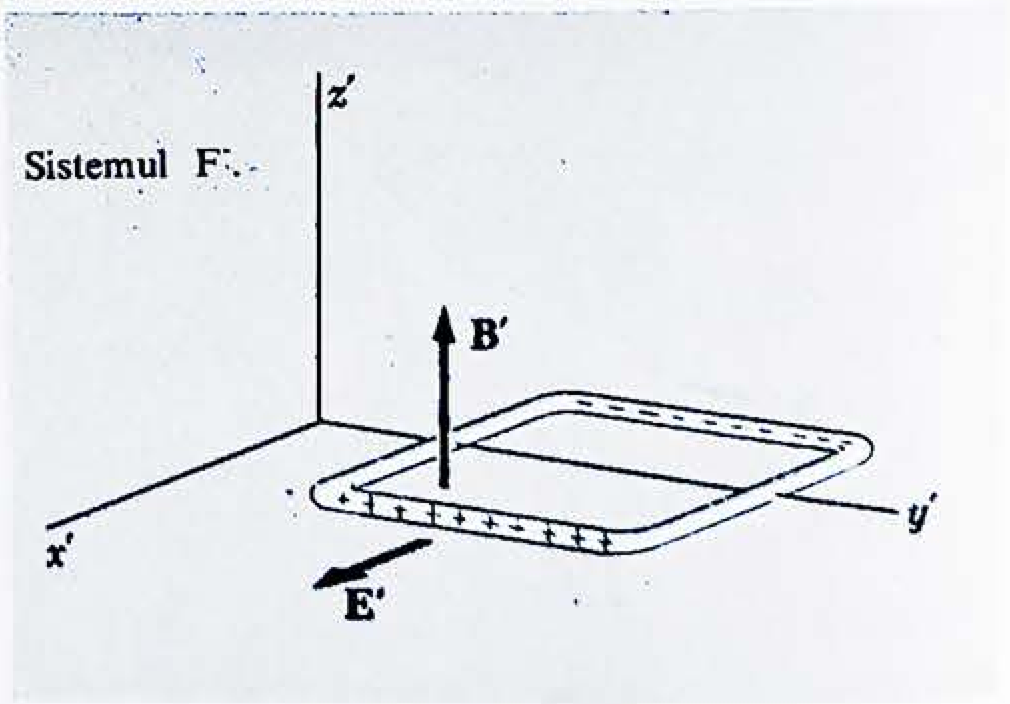
Cu excepția contracției Lorentz, care este de ordinul al doilea în v/c, distribuția de sarcină văzută la un moment dat în sistemul F, figura 7.3, *b*, este identică cu aceea văzută în F'. Cîmpurile electrice diferă deoarece cîmpul din figura 7.3 este acela al distribuției de sarcină singure, în timp ce cîmpul electric pe care îl vedem în figura 7.4 este cîmpul distribuției de sarcină superficială *plus* cîmpul electric uniform care există în acel sistem de referință. Un observator în F spune: „Înăuntrul vergelei a apărut un cîmp electric de intensitate $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, exercitînd o forță $q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ care echilibrează forța $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ care altfel ar determina orice sarcină q să se miște de-a lungul vergelei." Un observator din F' spune: „Înăuntrul vergelei nu există nici un cîmp electric, și deși aici există un cîmp magnetic uniform, nu apare nici o forță de la el deoarece nici o sarcină nu este în mișcare." Fiecare descriere este corectă.

7.3. O BUCLĂ SE DEPLASEAZĂ PRINTR-UN CÎMP MAGNETIC NEUNIFORM

Dar dacă făceam o buclă dreptunghiulară de sîrmă, cum este arătat în figura 7.5, și o deplasam cu viteză constantă prin cîmpul uniform de inducție $\mathbf{B}$? Pentru a prezice ce se va întîmpla, avem nevoie doar să ne întrebăm — în sistemul de referințe F' — ce s-ar întîmpla dacă punem o

Fig. 7.5. (*a*) Aici spira de sîrmă se mișcă într-un cîmp magnetic uniform **B**. (*b*) Observată în sistemul **F'**, în care spira este în repaus, cîmpurile sînt **B'** și **E'**.





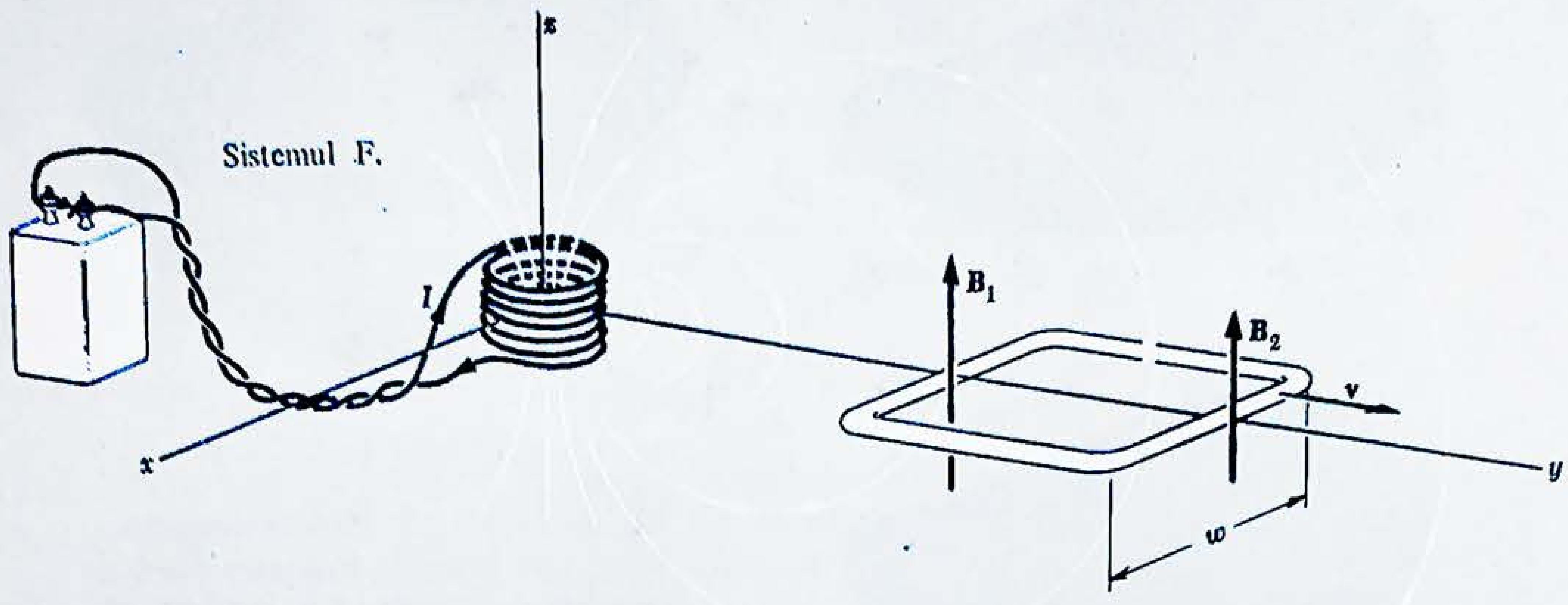


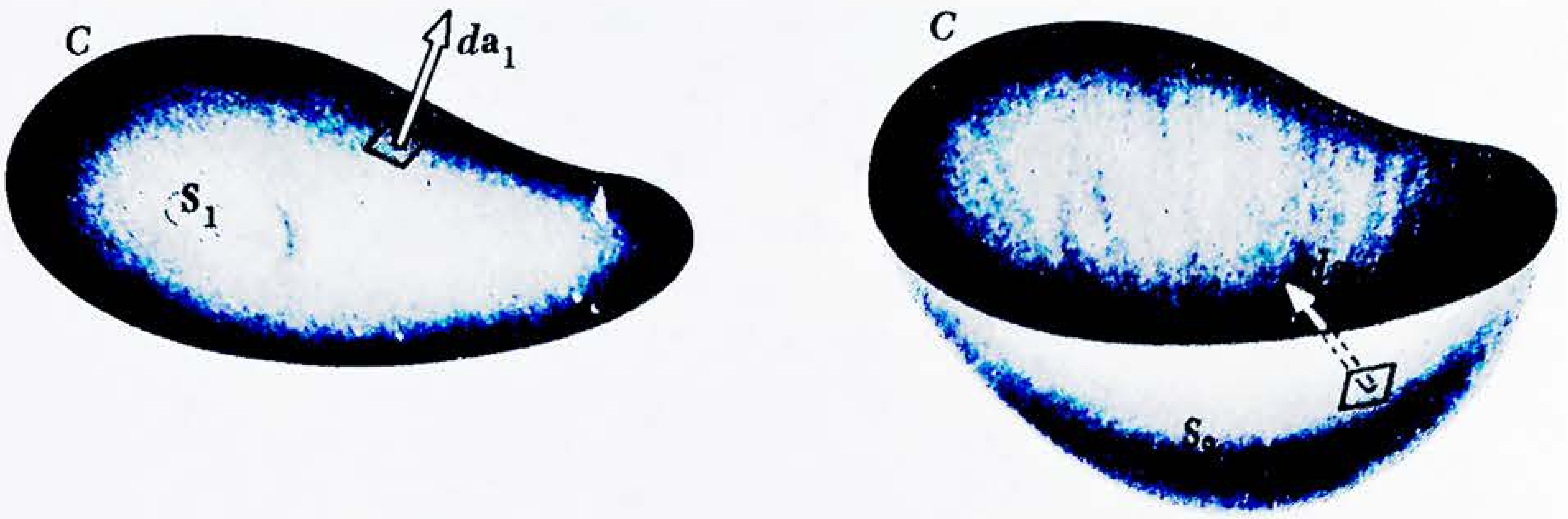
Fig. 7.6. Aici inducția **B**, observată în F, nu este uniform. El variază în direcție și mărime de la punct la punct.

astfel de buclă într-un cîmp electric uniform. Evident, două laturi opuse ale dreptunghiului ar cîştiga o oarecare sarcină, dar aceasta ar fi totul. Să presupunem, totuşi, că inducţia magnetică **B** în sistemul F, deşi constant în timp, este *neuniformă* în spaţiu. Pentru a preciza aceasta, arătăm în figura 7.6 inducţia **B** avînd drept sursă un solenoid scurt. Acest solenoid, împreună cu bateria care alimentează curentul constant, este fixat lîngă origine în sistemul F. (Am afirmat mai devreme că nu există nici un cîmp electric în F; dacă în realitate folosim un solenoid de rezistenţă finită pentru a obţine cîmpul, va fi un cîmp electric asociat cu bateria şi circuitul ei. El este nesemnificativ pentru problema noastră şi poate fi neglijat. Sau putem introduce întreaga bobină, cu bateria ei, într-o cutie metalică.)

Acum, cu bucla deplasîndu-se cu viteza v în direcţia y, în sistemul F, fie poziţia la un moment oarecare t astfel încît inducţia cîmpului magnetic este B_1, pe latura stîngă a buclei şi B_2 de-a lungul laturii drepte (fig. 7.6). Fie **f** forţa care acţionează asupra unei sarcini q care este purtată împreună cu bucla. Această forţă este funcţie de poziţia în buclă, la acest moment de timp. Să evaluăm integrala curbilinie a lui **f**, luată în jurul întregii bucle: Pe cele două laturi ale buclei care sînt paralele direcţiei de mişcare, **f** este perpendiculară pe elementul de curbă ds, astfel că acestea nu dau nimic. Considerînd contribuţiile celorlalte două laturi, fiecare de lungime w, avem

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = qv\,(B_1 - B_2)w. \tag{4}$$

Dacă ne imaginăm o sarcină q care parcurge în întregime bucla, într-un timp suficient de scurt încît poziţia buclei nu s-a schimbat apreciabil, atunci ecuaţia 4 dă lucrul efectuat de forţa **f**. Lucrul efectuat *pe*



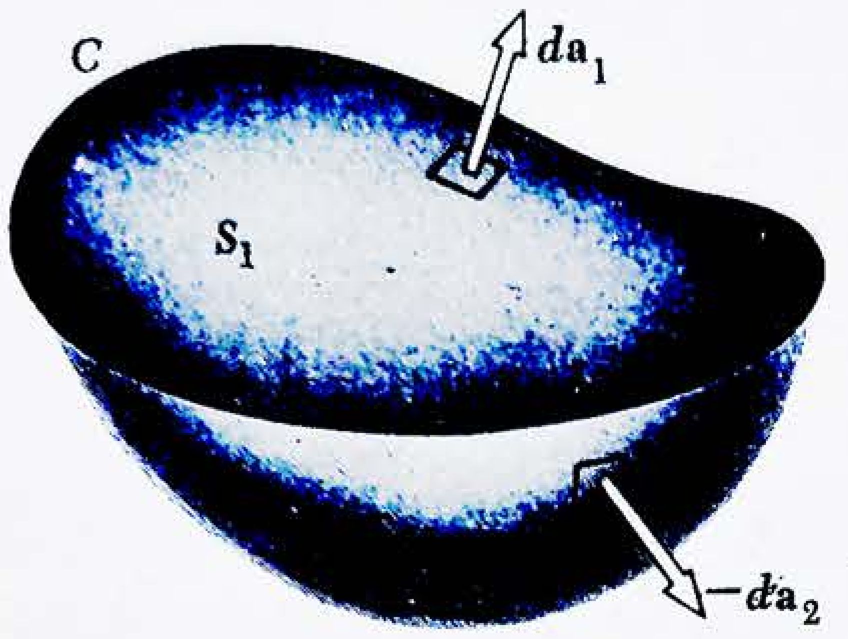


Fig. 7.7. *(a)* Fluxul prin C este $\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$

(b) S_2 este o altă suprafaţă care are ca frontieră C. Aceasta va fi la fel de potrivită pentru a calcula Φ.

(c) Unirea lui S_1 şi S_2 pentru a face o suprafaţă închisă, pentru care $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ trebuie să se anuleze, dovedeşte că

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$$

unitate de sarcină este $(1/q)\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. Vom numi această cantitate *tensiunea electromotoare*. Folosim pentru ea simbolul $\mathcal{E}$, şi adesea îi scurtăm numele la „t.e.m". $\mathcal{E}$ are aceleaşi dimensiuni ca potenţialul electric şi este măsurată în volţi, sau jouli pe coulomb, în sistemul MKSA

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Termenul *tensiune electromotoare* a fost introdus mai devreme, în § 4.10. El a fost definit ca lucrul pe unitatea de sarcină implicat în mişcarea unei sarcini în jurul unui circuit conţinînd o celulă voltaică. Lărgim acum definiţia t.e.m. pentru a include orice influenţă care determină sarcina să circule în jurul unei traiectorii închise. Dacă se întîmplă ca traiectoria să fie un circuit fizic cu rezistenţa R, atunci t.e.m. $\mathcal{E}$ produce scurgerea unui curent după legea lui Ohm: $I = \mathcal{E}/R$. În cazul particular pe care îl considerăm, $\mathbf{f}$ este forţa care acţionează asupra unei sarcini într-un cîmp magnetic, şi $\mathcal{E}$ are mărimea

$$\mathcal{E} = vw(B_1 - B_2). \tag{6}$$

Tensiunea electromotoare dată de ecuaţia 6 este legată într-un mod foarte simplu de *rata de schimbare a fluxului magnetic* prin buclă. Prin fluxul magnetic prin buclă înţelegem integrala de suprafaţă a lui $\mathbf{B}$ care are bucla ca frontieră. Fluxul Φ prin bucla sau curba închisă C din figura 7.7, *a* este dat de integrala de suprafaţă a lui $\mathbf{B}$ pe S_1:

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \tag{7}$$

Am putea duce infinit de multe suprafețe mărginite de C. Figura 7.7, *b* arată o alta, S_2. De ce nu avem de precizat care suprafață este de folosit în calculul fluxului? *Nu există nici o diferență* deoarece $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ va avea aceeași valoare pentru toate aceste suprafețe. Să ne oprim o clipă pentru a lămuri aceasta. Fluxul prin S_2 va fi $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$. De notat că vectorul $d\mathbf{a}_2$ iese din partea de sus a lui S_2, pentru a fi consistenți cu alegerea pentru S_1. Vom obține un număr pozitiv dacă fluxul total prin C este orientat în sus.

$$\Phi_{(S_2)} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2. \tag{8}$$

Am învățat în § 6.2 că în cîmpul magnetic divergența este zero: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Urmează atunci din teorema lui Gauss că dacă este orice *suprafață* închisă (un „balon") și V este volumul dinăuntru:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B}\, dv = 0. \tag{9}$$

Să aplicăm aceasta la suprafața închisă, mai degrabă ca un timpan, formată prin unirea lui S_1 și S_2, ca în figura 7.7, *c*. Pe S_2 normala exterioară este *opusă* vectorului $d\mathbf{a}_2$ pe care l-am folosit pentru calculul fluxului prin C. Astfel

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2) \tag{10}$$

sau

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2.$$

Aceasta arată că nu are importanță care suprafață o folosim pentru a calcula fluxul prin C.

Aceasta este aproape evident dacă realizați că $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ implică un fel de conservare spațială a fluxului. În orice volum intră atît de mult flux cît iese. (Considerăm situația în întreg spațiul la un moment dat de timp.) Adesea este de folos să vizualizăm „tuburi" de flux. Un tub de flux (fig. 7.8) este o suprafață în fiecare punct al căreia linia de cîmp magnetic se află în planul suprafeței. Aceasta este o suprafață prin care nu trece nici un flux, și ne putem gîndi că ea conține o anumită cantitate de flux, așa cum un cablu telefonic conține fire. Prin orice curbă închisă dusă solidar împrejurul unui tub de flux, trece același flux. Aceasta s-ar putea spune despre intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ doar în regiuni unde nu există sarcină electrică, deoarece $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Inducția cîmpului magnetic are întotdeauna divergența zero peste tot.

Revenind acum la bucla dreptunghiulară în mișcare, să găsim *rata de schimbare* a fluxului prin buclă. În timpul dt bucla se deplasează o distanță $v dt$. Aceasta modifică în două moduri fluxul total prin buclă, care este $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ pe o suprafață care se sprijină pe buclă. După cum puteți vedea în figura 7.9, se cîștigă flux la dreapta, $B_2 wv dt$, în timp ce un flux, $B_1 wv dt$ se pierde la stînga. De aici $d\Phi$, schimbarea în flux prin buclă în timpul dt, este

$$d\Phi = -(B_1 - B_2)\, wv dt. \tag{11}$$

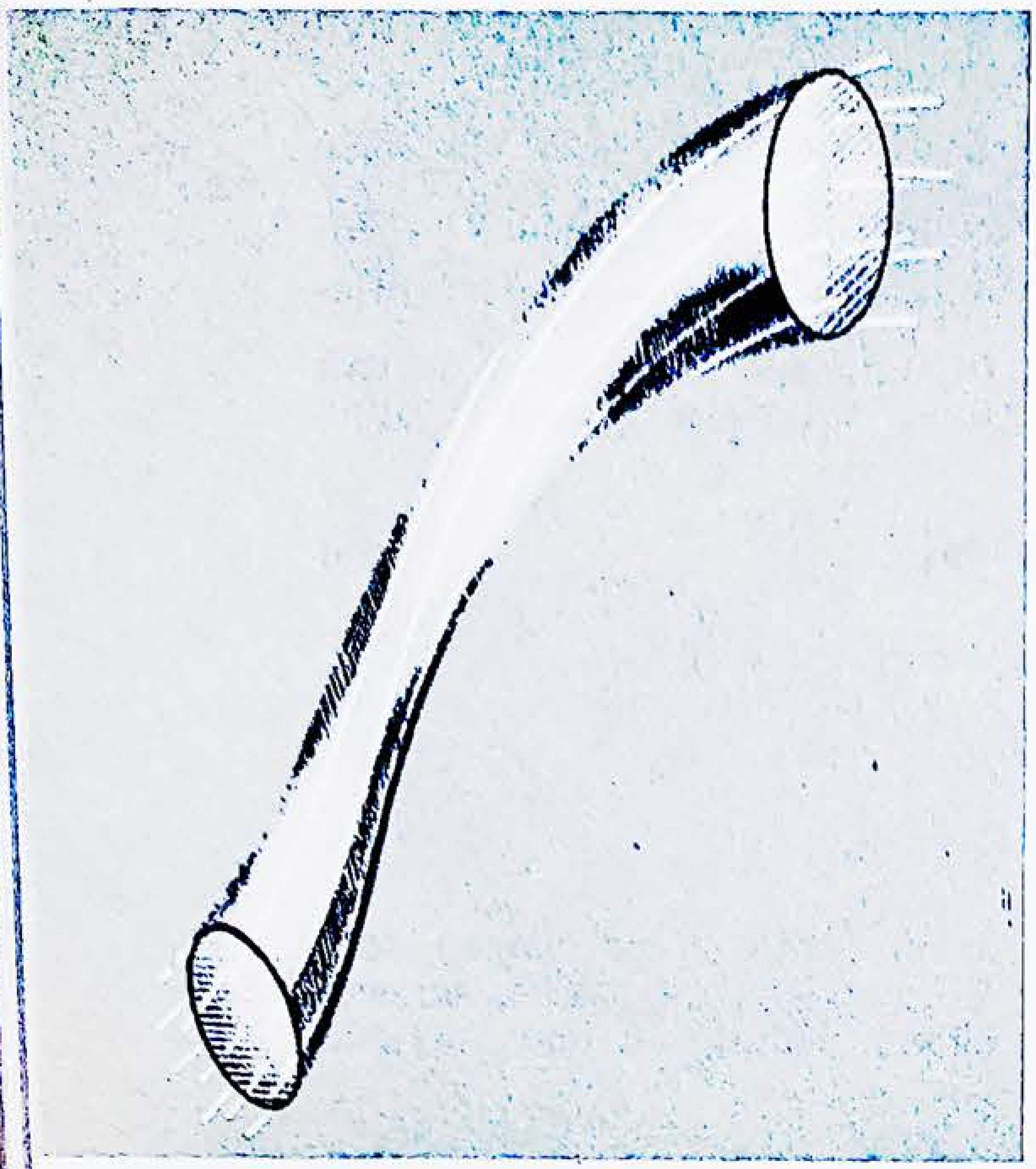


Fig. 7.8. Un tub de linii de cîmp. Liniile cîmpului magnetic formează suprafaţa laterală a tubului. Tubul închide o cantitate oarecare de flux Φ. Indiferent unde îl tăiaţi, veţi găsi că $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ în orice secţiune are aceeaşi valoare Φ. Un astfel de tub nu trebuie să fie rotund. Puteţi porni undeva cu orice secţiune, şi mersul liniilor de cîmp va determina cum se schimbă mărimea şi forma secţiunii cînd mergeţi de-a lungul tubului.

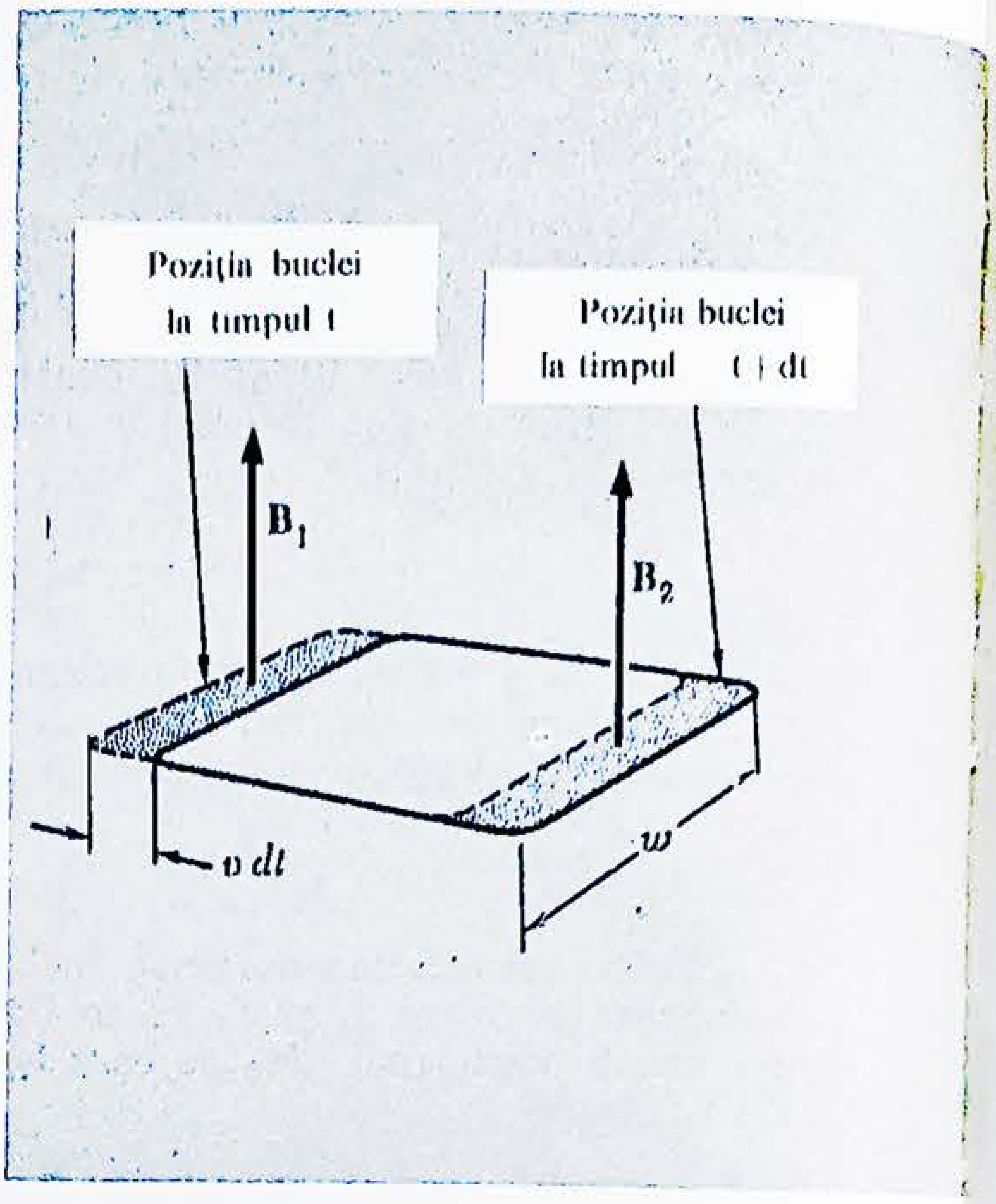


Fig. 7.9. În intervalul dt prin spiră fluxul creşte cu $B_2\, wv dt$ şi scade cu $B_1\, wv dt$.

Comparînd ecuaţia 11 cu ecuaţia 6, vedem că, cel puţin în acest caz, tensiunea electromotoare se poate exprima ca

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{12}$$

Putem arăta că aceasta are loc în general, pentru o buclă de orice formă mişcîndu-se în orice fel. Bucla C din figura 7.10 ocupă poziţia C_1 la momentul t, şi se mişcă astfel încît ocupă poziţia C_2 la momentul $t + dt$. Un element particular al buclei ds a fost transportat cu viteza $\mathbf{v}$ în noua sa poziţie. S indică o suprafaţă care se sprijină pe buclă la momentul t. Fluxul prin buclă la acest moment este

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \tag{13}$$

Inducţia cîmpului magnetic **B** provine de la surse care sînt staţionare în sistemul nostru de referinţă şi rămîne constantă în timp, în orice punct fixat din acest sistem. La momentul $t + dt$ o suprafaţă care se sprijină pe buclă este suprafaţa originală S, lăsată fixă în spaţiu, prelungită prin „marginea" dS. (Amintiţi-vă, ne este îngăduit să folosim *orice* suprafaţă care se sprijină pe buclă pentru a calcula fluxul prin ea.) Astfel,

$$\Phi(t + dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \tag{14}$$

De aici schimbarea în flux, în timpul dt, este tocmai fluxul prin „marginea" dS, $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$. Pe margine, un element de orice suprafaţă $d\mathbf{a}$ se poate exprima ca $(\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{s}$, astfel încît integrala pe suprafaţa dS poate fi scrisă ca o integrală în jurul curbei C, în acest fel:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{s}]. \tag{15}$$

Deoarece dt este constantă pentru integrare, îl putem da factor şi avem

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}). \tag{16}$$

După regula pentru produsul mixt (vol. I, p. 57) avem identitatea: $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$. Folosind aceasta pentru a rearanja ecuaţia 16, avem

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{17}$$

Acum forţa asupra unei sarcini q care este deplasată împreună cu bucla este tocmai $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, astfel că forţa electromotoare, care este integrala curbilinie în jurul buclei a forţei pe unitatea de sarcină, este chiar

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{18}$$

Comparînd ecuaţia 17 cu ecuaţia 18 căpătăm relaţia simplă deja dată în ecuaţia 12, dar valabilă acum pentru o formă şi mişcare arbitrară a buclei. (Nici măcar nu avem de presupus că $\mathbf{v}$ este acelaşi în toate părţile spirei!) În rezumat, integrala curbiliniei în jurul unei bucle în mişcare a lui $\mathbf{f}/q$, forţa pe unitate de sarcină, este minus viteza de schimbare a fluxului prin buclă.

Sensul integralei curbilinii şi direcţia în care fluxul este numit pozitiv sînt de corelat printr-o regulă de şurub drept. De exemplu, în figura 7.6, fluxul este orientat *în sus* prin buclă şi este *descrescător*. Luînd în considerare semnul minus din ecuaţia 12,

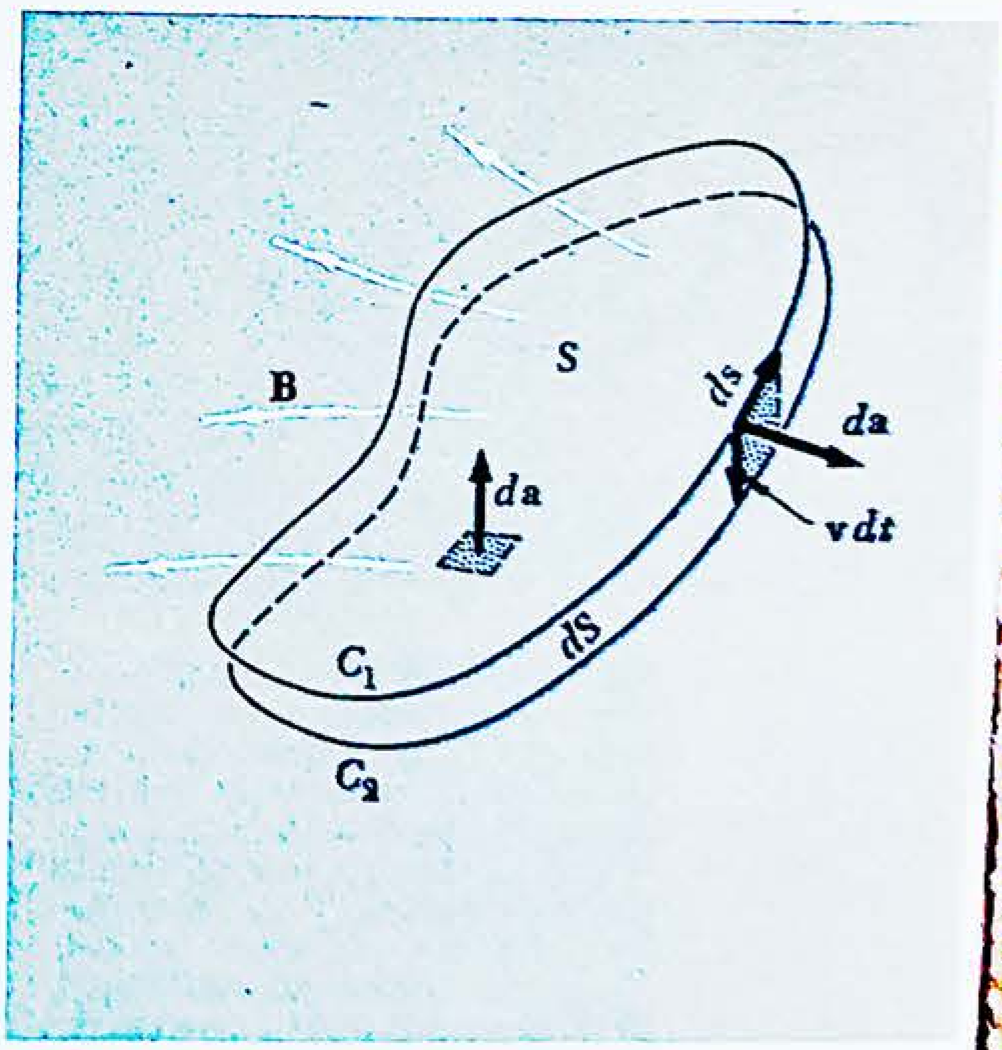


Fig. 7.10. Bucla se deplasează de la poziţia C_1 la poziţia C_2 în timpul dt.

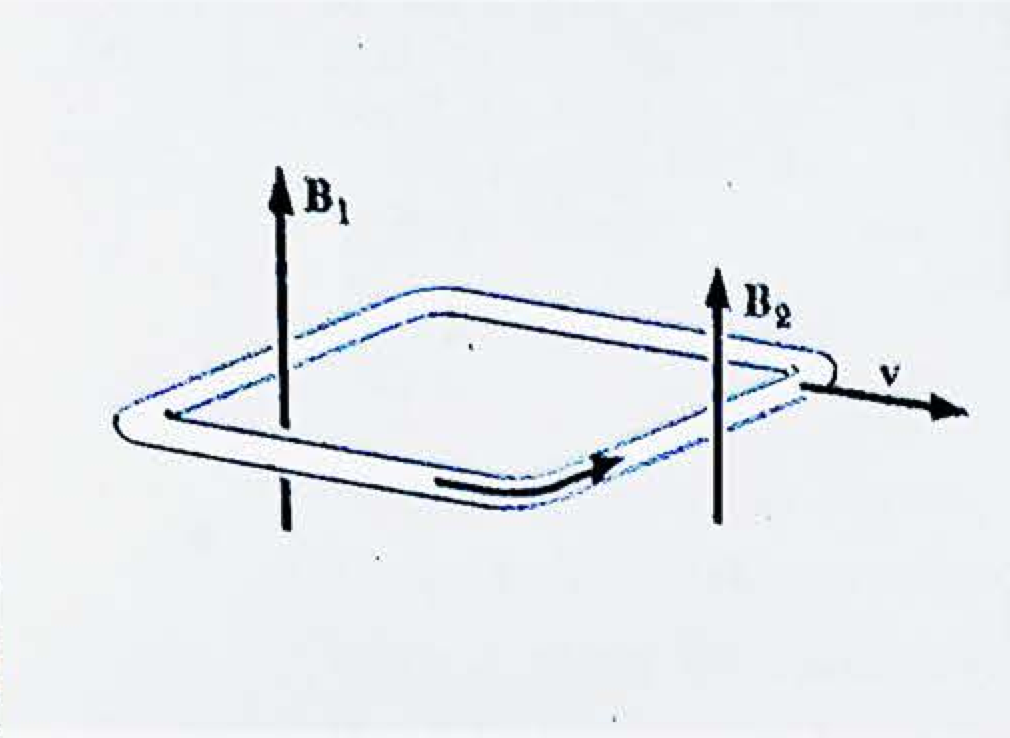


Fig. 7.11. Fluxul prin buclă este orientat în sus şi este descrescător în mărime cu scurgerea timpului. Săgeata arată direcţia tensiunii electromotoare, adică, direcţia în care tinde să fie mişcată sarcina pozitivă.



Fig. 7.12. Cînd inelul cade, fluxul prin inel orientat în jos creşte. Legea lui Lenz ne spune că t.e.m. indusă va fi în direcţia indicată de săgeţi, pentru că aceea este sensul în care trebuie să circule curentul pentru a produce un flux prin inel orientat în sus. Sistemul reacţionează astfel încît să se opună schimbării care apare.

regula noastră ar prezice o forţă electromotoare care ar tinde să conducă o sarcină pozitivă în jurul buclei în sens contrar acelor de ceasornic, aşa cum se vede privind în jos spre buclă (fig. 7.11).

Există un mod mai bun de a privi această problemă de semn şi direcţie. Observaţi că dacă un curent se scurge în direcţia forţei electromotoare induse, în situaţia arătată în figura 7.11, acest curent ar crea el însuşi un oarecare flux prin buclă într-o direcţie spre a *contracara* schimbarea presupusă de flux. Aceasta este un fapt fizic important, şi nu consecinţa unei convenţii arbitrare despre semne şi direcţii. Este manifestarea tendinţei unui sistem de a rezista schimbării. În acest contest este tradiţional numită legea lui Lenz.

Un alt exemplu al legii lui Lenz este ilustrat în figura 7.12. Inelul conductor este în cădere în cîmpul magnetic al bobinei. Fluxul prin inel este orientat *în jos*, şi este *crescător* în mărime. Pentru a contracara această schimbare, este necesar un nou flux orientat în sus. Acesta ar presupune un curent de-a lungul inelului în sensul săgeţilor pentru a produce un astfel de flux. Legea lui Lenz ne asigură că t.e.m. indusă va avea direcţia corectă pentru a produce un astfel de curent.

Dacă tensiunea electromotoare produce curgerea curentului în bucla care este arătată în figurile 7.6 şi 7.11, cum se va întîmpla dacă spira are o rezistenţă finită, o oarecare energie va fi disipată în fir. Ce furnizează această energie? Pentru a răspunde, să considerăm forţa care acţionează asupra curentului din spiră dacă acesta curge în sensul indicat de săgeată în figura 7.11. Conductorul din dreapta, în cîmpul de inducţie B_2, va fi acţionat de o forţă spre dreapta, în timp ce latura opusă a buclei, în cîmpul de inducţie B_1, va fi împinsă spre stînga. Dar B_1 este mai mare decît B_2,

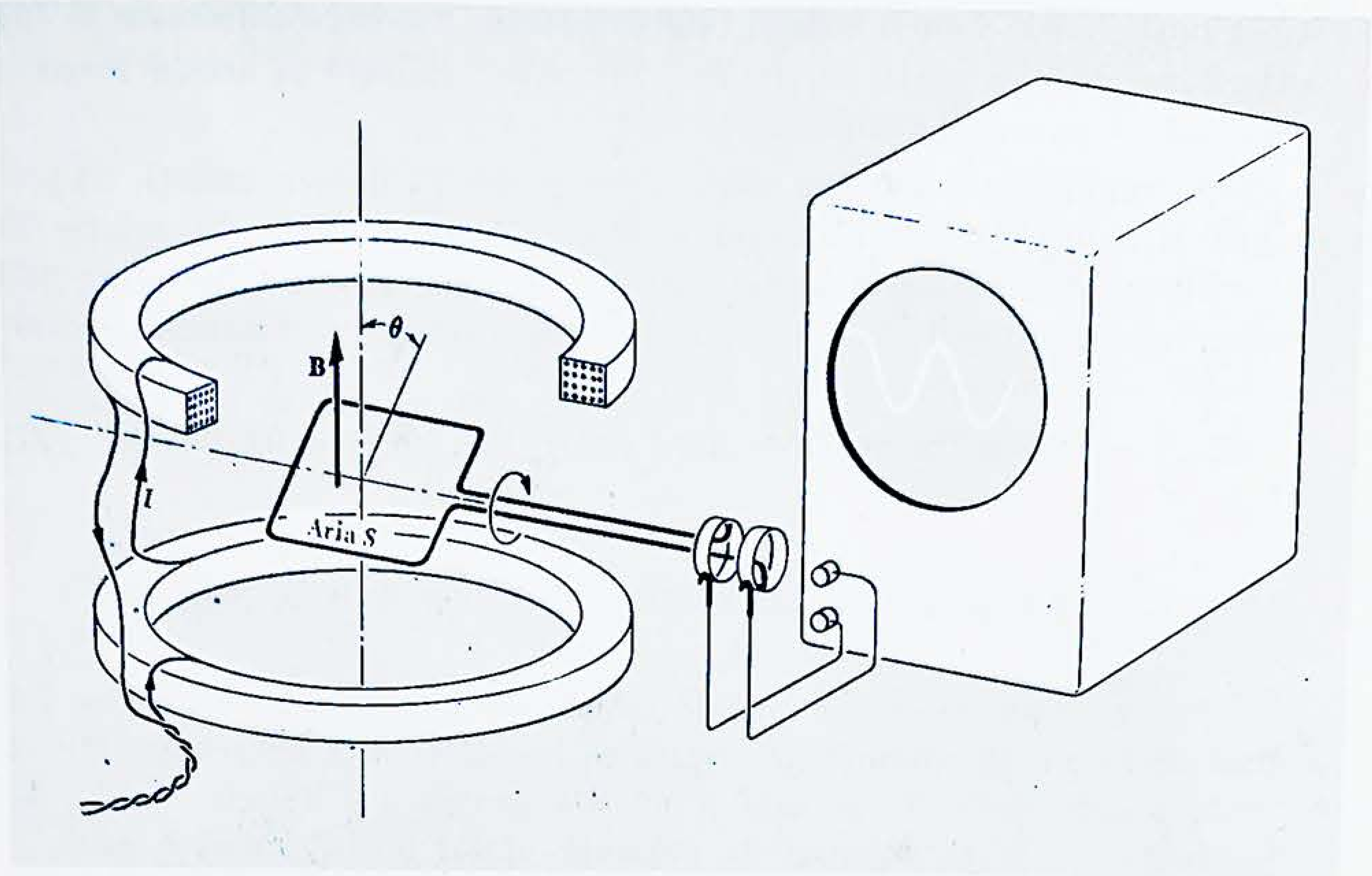


Fig. 7.13. Cele două bobine produc un cîmp de inducție magnetică **B** care este aproximativ uniform în vecinătatea buclei. În buclă, care se rotește cu viteza unghiulară ω, este indusă o forță electromotoare cu variație sinusoidală.

astfel că forța totală asupra buclei este spre stînga, *opunîndu-se mișcării.* Pentru a menține bucla în mișcare cu viteză constantă un oarecare agent extern are de efectuat lucru, și energia astfel investită se arată eventual sub formă de căldură în fir. Imaginați-vă ce s-ar întîmpla dacă legea lui Lenz era violată sau dacă forța asupra buclei ar fi acționat într-o direcție care să sprijine mișcarea buclei!

Un element foarte obișnuit în mașinile electrice și instrumentele electrice este o buclă ori bobină care se rotește într-un cîmp magnetic. Să aplicăm ceea ce tocmai am învățat sistemului arătat în figura 7.13, o buclă în rotație cu viteză constantă într-un cîmp magnetic care este aproximativ uniform. Fundamentele mecanice, ax, pivoți, acționare, nu sînt desenate. Cîmpul de inducție **B** este creat de cele două bobine fixe. Să presupunem că bucla se rotește cu viteză unghiulară ω, în radiani/sec. Dacă poziția ei la fiecare moment este precizată prin unghiul φ, atunci $\varphi = \omega t + \alpha$, unde constanta α reprezintă poziția buclei la $t = 0$. Componenta lui **B** perpendiculară pe planul buclei este $B \sin \varphi$. De aceea fluxul prin buclă la momentul t este

$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha), \tag{19}$$

unde S este aria buclei. Pentru tensiunea electromotoare indusă avem

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -SB\omega \cos(\omega t + \alpha). \tag{20}$$

Dacă bucla în loc de a fi închisă este conectată prin inele colectoare la fire exterioare, cum se arată în figura 7.13, putem măsura la aceste borne o diferență de potențial variind sinusoidal.

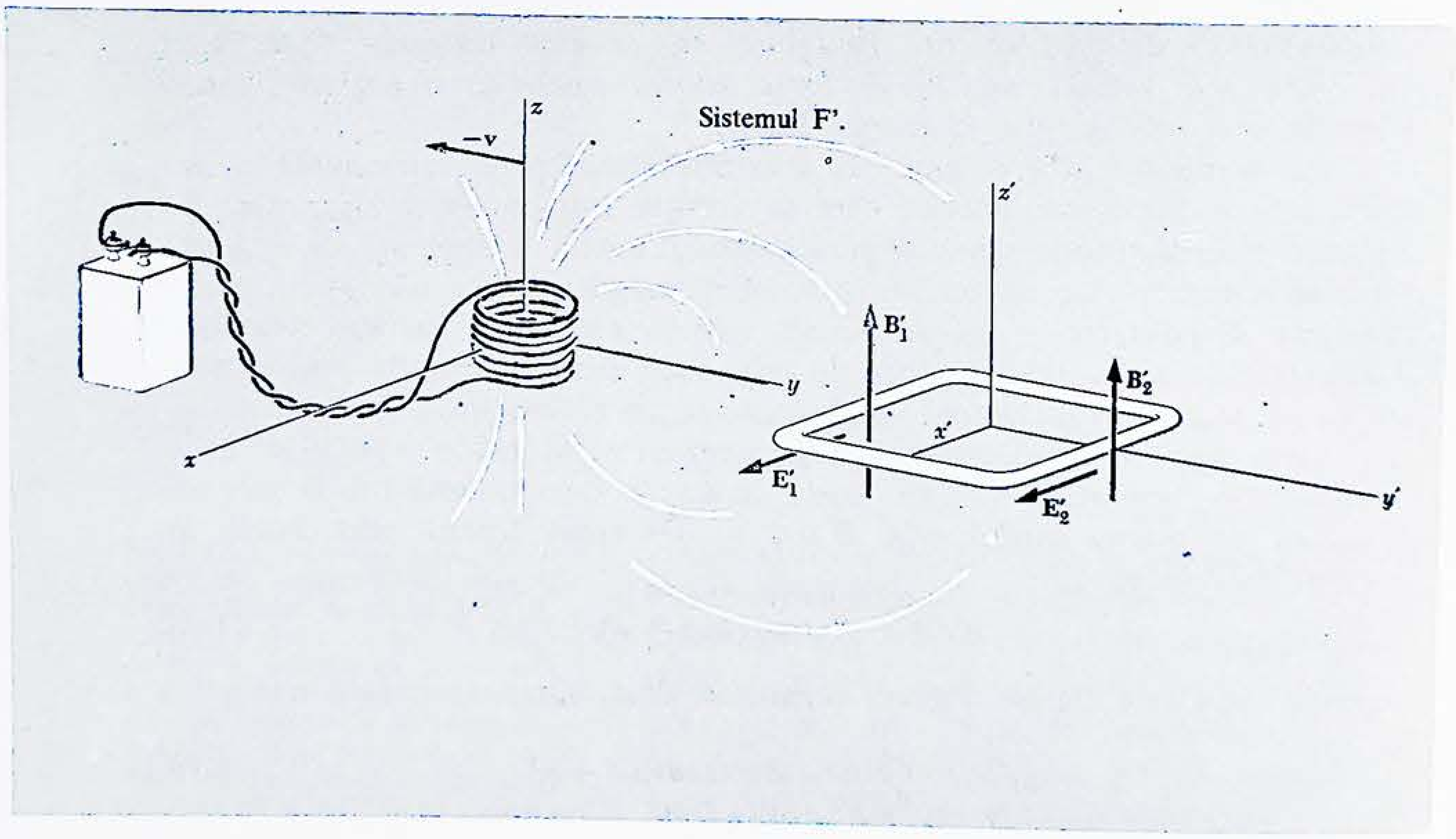
Un exemplu numeric lămurește orice problemă despre unități. Să presupunem inducția cîmpului magnetic $B = 0{,}05$ tesla, viteza de rotație 30 de cicli pe secundă, aria buclei 100 cm². Atunci $\omega = 2\pi \times 30$, sau 188 radiani/sec., și amplitudinea, adică mărimea maximă, a tensiunii electromotoare oscilante este

$$\mathcal{E}_{max} = SB\omega = (10^{-2}\text{m}^2)(5 \times 10^{-2}\ \text{tesla})(188\ \text{sec}^{-1}) = 0{,}093\ \text{volt}. \quad (21)$$

7.4. O BUCLĂ STAȚIONARĂ CU SURSA CÎMPULUI ÎN MIȘCARE

Putem, dacă dorim, să privim fenomenele reprezentate în figura 7.6 dintr-un sistem de referință în mișcare cu bucla. Aceasta nu poate schimba fizica, numai cuvintele pe care le folosim pentru a o descrie. Fie F', de coordonate x', y', z', sistemul de referință atașat buclei, pe care acum o considerăm staționară (fig. 7.14). Bobina și bateria, staționare în sistemul F, se mișcă în direcția $-y'$ cu viteza $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Fie B_1' și B_2' inducțiile magnetice măsurate la cele două extremități ale buclei de către observatori

Fig. 7.14. Privind în sistemul F', bucla este în repaus, sursa cîmpului este în mișcare. Cîmpurile B' și E' sînt ambele prezente și sînt funcții de poziție și timp.



în F' la un moment oarecare t'. În aceste poziţii va exista un cîmp electric în F'. Ecuaţia 6.62 ne spune că

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1' &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{E}_2' &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_2' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2'. \end{aligned} \tag{22}$$

Pentru observatori din F' acesta este un cîmp electric adevărat. El nu este un cîmp electrostatic. Integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}'$ de-a lungul oricărei curbe închise din F' nu este în general zero. De fapt, integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}'$ de-a lungul buclei dreptunghiulare este:

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \omega v(B_1' - B_2'). \tag{23}$$

Putem numi integrala curbilinie din ecuaţia 23 tensiunea electromotoare $\mathcal{E}'$ pe această curbă. Dacă o particulă încărcată se mişcă odată în jurul curbei, $\mathcal{E}'$ este lucrul efectuat asupra ei, pe unitatea de sarcină. $\mathcal{E}'$ este legată de rata de schimbare a fluxului prin buclă. Pentru a vedea aceasta, observaţi că în timp ce bucla însăşi este staţionară, *distribuţia cîmpului magnetic* se mişcă acum cu viteza $-\mathbf{v}$ a sursei. De aici obţinem un rezultat analog ecuaţiei 11, pentru fluxul pierdut sau cîştigat la fiecare extremitate a buclei, şi obţinem că

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt}. \tag{24}$$

Putem rezuma după cum urmează descrierile în cele două sisteme de referinţă F, în care sursa lui $\mathbf{B}$ este în repaus, şi F', în care bucla este în repaus:

Un observator în F spune „Aici avem un cîmp magnetic care, deşi nu este uniform în spaţiu, este constant în timp. Nu există nici un cîmp electric. Acea buclă de sîrmă se mişcă cu viteza $\mathbf{v}$ prin cîmpul magnetic, astfel că sarcinile din ea sînt supuse unei forţe $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ newton pe unitatea de sarcină. Integrala curbilinie a acestei forţe pe unitate de sarcină, calculate de-a lungul întregii bucle este tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ şi este egală cu $-d\Phi/dt$. Fluxul Φ este $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ pe o suprafaţă S care, la un moment oarecare de timp t după ceasul meu, se sprijină pe buclă."

Un observator în F' spune: „Această buclă este staţionară şi numai un cîmp electric ar putea determina sarcinile din ea să se mişte. Dar există de fapt un cîmp electric $\mathbf{E}'$. El pare să fie generat de obiectul de tip magnet care se întîmplă să treacă prin preajmă în acest moment cu viteza $-\mathbf{v}$, producînd în acelaşi timp un cîmp magnetic $\mathbf{B}'$ destul de puternic. Cîmpul electric este astfel încît $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$ de-a lungul acestei bucle staţionare nu este zero dar minus rata de schimbare a fluxului prin buclă, $d\Phi'/dt'$. Fluxul Φ' este $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ peste o suprafaţă care acoperă bucla, valorile lui $\mathbf{B}'$ fiind măsurate toate pe această suprafaţă la un acelaşi moment de timp t', după ceasul meu."

Concluziile noastre de pînă aici sînt relativistic exacte. Ele se menţin pentru orice viteză $v < c$ dacă observăm cu minuţiozitate distincţiile între $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{B}'$, t şi t' etc. Dacă $v \ll c$, astfel că v^2/c^2 poate fi neglijat, b' va fi practic egal cu B, şi putem neglija de asemenea distincţia între t şi t'.

în F' la un moment oarecare t'. În aceste poziții va exista un cîmp electric în F'. Ecuația 6.62 ne spune că

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Pentru observatori din F' acesta este un cîmp electric adevărat. El nu este un cîmp electrostatic. Integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}'$ de-a lungul oricărei curbe închise din F' nu este în general zero. De fapt, integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}'$ de-a lungul buclei dreptunghiulare este:

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \omega v(B'_1 - B'_2). \tag{23}$$

Putem numi integrala curbilinie din ecuația 23 tensiunea electromotoare $\mathcal{E}'$ pe această curbă. Dacă o particulă încărcată se mișcă odată în jurul curbei, $\mathcal{E}'$ este lucrul efectuat asupra ei, pe unitatea de sarcină. $\mathcal{E}'$ este legată de rata de schimbare a fluxului prin buclă. Pentru a vedea aceasta, observați că în timp ce bucla însăși este staționară, *distribuția cîmpului magnetic* se mișcă acum cu viteza $-\mathbf{v}$ a sursei. De aici obținem un rezultat analog ecuației 11, pentru fluxul pierdut sau cîștigat la fiecare extremitate a buclei, și obținem că

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt}. \tag{24}$$

Putem rezuma după cum urmează descrierile în cele două sisteme de referință F, în care sursa lui $\mathbf{B}$ este în repaus, și F', în care bucla este în repaus:

Un observator în F spune „Aici avem un cîmp magnetic care, deși nu este uniform în spațiu, este constant în timp. Nu există nici un cîmp electric. Acea buclă de sîrmă se mișcă cu viteza $\mathbf{v}$ prin cîmpul magnetic, astfel că sarcinile din ea sînt supuse unei forțe $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ newton pe unitatea de sarcină. Integrala curbilinie a acestei forțe pe unitate de sarcină, calculate de-a lungul întregii bucle este tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ și este egală cu $-d\Phi/dt$. Fluxul Φ este $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ pe o suprafață S care, la un moment oarecare de timp t după ceasul meu, se sprijină pe buclă."

Un observator în F' spune: „Această buclă este staționară și numai un cîmp electric ar putea determina sarcinile din ea să se miște. Dar există de fapt un cîmp electric $\mathbf{E}'$. El pare să fie generat de obiectul de tip magnet care se întîmplă să treacă prin preajmă în acest moment cu viteza $-\mathbf{v}$, producînd în același timp un cîmp magnetic $\mathbf{B}'$ destul de puternic. Cîmpul electric este astfel încît $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$ de-a lungul acestei bucle staționare nu este zero dar minus rata de schimbare a fluxului prin buclă, $d\Phi'/dt'$. Fluxul Φ' este $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ peste o suprafață care acoperă bucla, valorile lui $\mathbf{B}'$ fiind măsurate toate pe această suprafață la un același moment de timp t', după ceasul meu."

Concluziile noastre de pînă aici sînt relativistic exacte. Ele se mențin pentru orice viteză $v < c$ dacă observăm cu minuțiozitate distincțiile între $\mathbf{B}$ și $\mathbf{B}'$, t și t' etc. Dacă $v \ll c$, astfel că v^2/c^2 poate fi neglijat, b' va fi practic egal cu B, și putem neglija de asemenea distincția între t și t'.

7.5. O LEGE DE INDUCȚIE UNIVERSALĂ

Să efectuăm trei experiențe cu aparatul arătat în figura 7.15. Măsuțele sînt pe roți astfel că pot fi deplasate cu ușurință. Un galvanometru sensibil a fost legat la vechea noastră buclă dreptunghiulară, și pentru a mări oricare forță electromotoare indusă punem mai multe spire de sîrmă în buclă. Sincer vorbind, sensibilitatea încă poate fi insuficientă, cu sursa slabă de cîmp magnetic figurată. Poate dumneavoastră puteți proiecta o versiune mai practică a experienței în laborator.

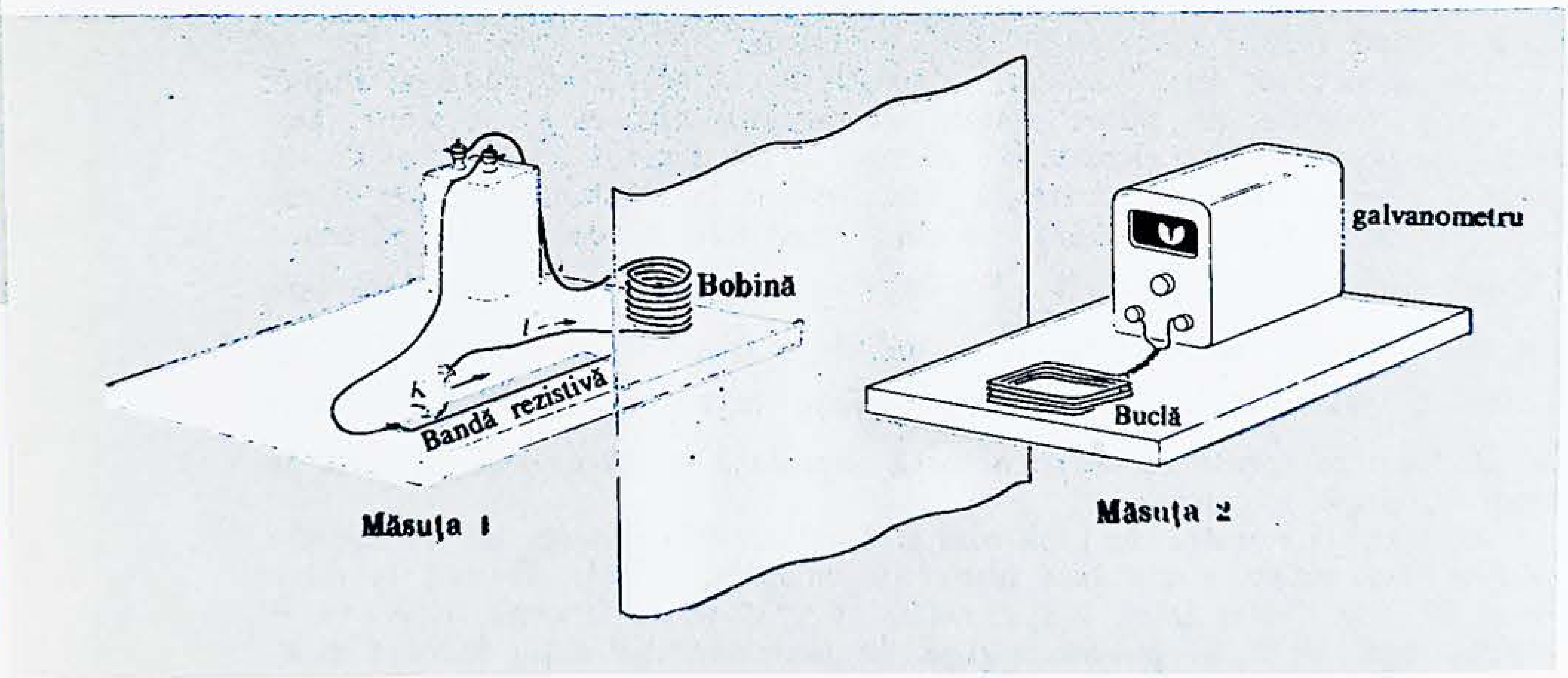
Experiența I. La curent constant în bobină și măsuța *1* staționară, măsuța *2* se deplasează spre dreapta cu viteza *v*. *Galvanometrul deviază.* Nu sîntem surprinși; am analizat deja această situație în § 7.3 mai sus.

Experiența II. La curent constant în bobină și măsuța *2* staționară, măsuța *1* se deplasează spre stînga cu viteza *v*. *Galvanometrul deviază.* Nici aceasta nu ne surprinde. Tocmai am discutat echivalența experiențelor *1* și *2*, o echivalență care este un exemplu de invarianță Lorentz sau, pentru vitezele joase ale măsuțelor noastre, invarianță Galilei. Știm că în ambele experiențe devierea galvanometrului poate fi corelată ratei de schimbare a fluxului lui **B** prin buclă.

Experiența III. Ambele măsuțe rămîn în repaus, dar variem curentul *I* în bobină prin alunecarea contactului *K* de-a lungul rezistenței. Facem aceasta astfel încît *viteza de descreștere* a cîmpului **B** la buclă este aceeași cît a fost în experiențele I și II. *Deviază galvanometrul?*

Pentru un observator situat lîngă bucla de pe măsuța 2 și care măsoară inducția magnetică în vecinătate ca funcție de timp și poziție, nu există nici o cale de a distinge între experiențele I și III. Imaginați-vă o perdea

Fig. 7.15. Ne imaginăm că fiecare măsuță se poate deplasa sau, cu ambele măsuțe fixate, se poate schimba treptat curentul în bobină.



groasă de stofă între cele două măsuțe. Deși ar putea fi diferențe minore între configurațiile cîmpurilor pentru II și III, un observator care nu cunoștea ce era în spatele perdelei nu ar fi putut decide, doar pe baza măsurării inducției cîmpului **B** local, care caz a fost. De aceea, dacă galvanometrul *nu* a răspuns cu aceeași deviere în experiența III, ar însemna că relația între cîmpurile electric și magnetic într-o regiune depinde de natura unei surse îndepărtate. Două cîmpuri magnetice esențial asemănătoare în proprietățile lor locale ar avea asociate într-un caz, dar nu în celălalt, un cîmp electric cu $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$.

Găsim prin experiență că III *este* echivalentă cu I și II. Galvanometrul deviază, cu aceeași mărime ca înainte. Experiențele lui Faraday au fost primele care demonstrează acest fapt fundamental. Tensiunea electromotoare pe care o observăm depinde numai de viteza de schimbare a fluxului lui **B**, și nu de orice altceva. Putem enunța ca o relație universală Legea lui Faraday a Inducției:

> Dacă C este o curbă închisă oarecare, staționară în coordonatele x, y, z, dacă S este o suprafață care se sprijină pe C, și $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ este cîmpul magnetic măsurat în x, y, z, la orice moment t, atunci
>
> $$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{25}$$

Folosind derivata vectorială rot, putem exprima această lege în formă diferențială. Dacă relația

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{26}$$

este adevărată pentru *orice* curbă C care acoperă suprafața S, cum afirmă legea noastră, urmează că în orice punct

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{27}$$

Pentru a arăta că ecuația 27 urmează din ecuația 26, procedăm ca de obicei prin a restrînge C în jurul unui punct, pe care îl presupunem punct nesingular pentru funcția **B**. Atunci la limită variația lui **B** peste mica porțiune de suprafață **a** care acoperă C va fi neglijabilă și integrala de suprafață va fi simplu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$. Acum prin definiție (ec. 2.76) limita la care tinde $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ cînd restrîngem suprafața este $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$. Avem astfel, la limită,

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right). \tag{28}$$

Deoarece aceasta are loc pentru *orice* **a** infinitesimal, trebuie ca*

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{29}$$

* Dacă aceasta nu este evident, observați că alegînd **a** în direcția x se va obține $(\text{rot } \mathbf{E})_x = -\frac{dB_x}{dt}$, și așa mai departe.

Deoarece **B** poate depinde de poziţie ca şi de timp, vom scrie $\partial \mathbf{B}/\partial t$ în locul lui $d\mathbf{B}/dt$. Avem astfel aceste formulări în întregime echivalente ale legii inducţiei:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

sau (30)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

În ecuaţia 30 cîmpul electric este de exprimat în voltpe metru, şi **B** este de măsurat în tesla. Tensiunea electromotoare $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ va fi dată în volt. Relaţia între $\mathcal{E}$ şi viteza de variaţie a fluxului trebuie să fie

$$\underset{\text{(volt)}}{\mathcal{E}} = \int_C \underset{\text{(volt/m) (m)}}{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} = -\underset{\text{(sec)}}{\frac{d}{dt}} \int_S \underset{\text{(tesla) (m}^2\text{)}}{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}} = -\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{\text{tesla}-\text{m}^2}{\text{s}}\right). \tag{31}$$

Expresia diferenţială, rot $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, explicitează destul de complet remarca anterioară despre natura locală a relaţiilor de cîmp. Variaţia în timp a lui **B** într-o vecinătate determină complet rot **E** acolo — nimic altceva nu are importanţă. Aceasta nu determină complet însuşi cîmpul **E**, desigur. Fără a afecta această relaţie orice cîmp electrostatic, cu rot $\mathbf{E} = 0$, ar putea fi superpus.

Ca exemplu concret, să presupunem că bobine ca acelea din figura 7.13 sînt alimentate cu curent alternativ de 50 cicli/sec., în loc de curent continuu. Curentul şi cîmpul magnetic variază ca sin $(2\pi \cdot 50 \cdot t)$ sau sin $314\, t$. Să presupunem că amplitudinea curentului este astfel încît inducţia magnetică **B** din regiunea centrală atinge o valoare maximă de 5×10^{-3} Tesla. Dorim să studiem cîmpul electric indus şi tensiunea electromotoare, pe curba circulară de 10 cm în rază arătată în figura 7.16. Putem presupune cîmpul B practic uniform în interiorul acestui cerc, la orice moment de timp

$$B = 5 \times 10^{-3} \sin 314\, t \tag{32}$$

B este în tesla şi t în secunde. Fluxul prin bucla C este

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-3} \sin 314\, t = 1{,}57 \times 10^{-4} \text{ tesla} - \text{m}^2. \tag{33}$$

Folosind ecuaţia 31 pentru a calcula tensiunea electromotoare în volţi,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -(314)(1{,}57 \times 10^{-4}) \cos 314\, t = -0{,}049 \cos 314\, t \text{ (volt)}. \tag{34}$$

Maximul atins de $\mathcal{E}$ este 49 milivolţi. Semnul minus va asigura că legea lui Lenz este respectată, dacă am definit corespunzător direcţiile. Variaţia lui Φ şi $\mathcal{E}$ în timp este arătată în figura 7.17.

Ce se întîmplă cu cîmpul electric? În mod obişnuit nu putem deduce **E** doar din cunoaşterea lui rot **E**. Totuşi, curba noastră C este aici un cerc în jurul centrului unui sistem simetric. *Dacă nu există* alte cîmpuri electrice în preajmă, putem presupune că pe cercul C, **E** se află în acel plan şi are o

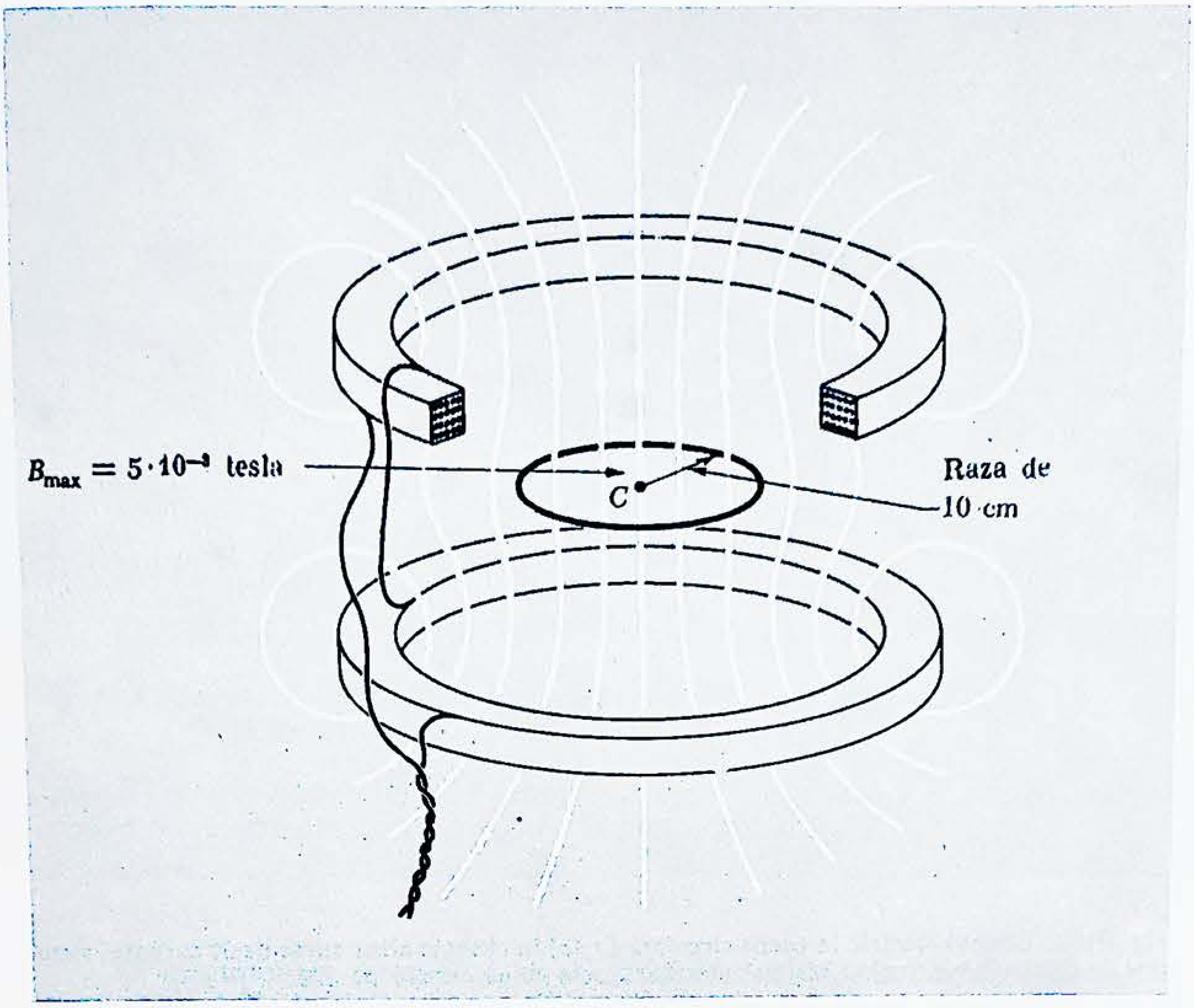


Fig. 7.16. Curentul alternativ produce în bobine un cîmp magnetic care, la centru, oscilează între $5 \cdot 10^{-3}$ tesla orientat în sus și $5 \cdot 10^{-3}$ tesla orientat în jos. La orice moment cîmpul este aproximativ uniform în regiunea cercului C.

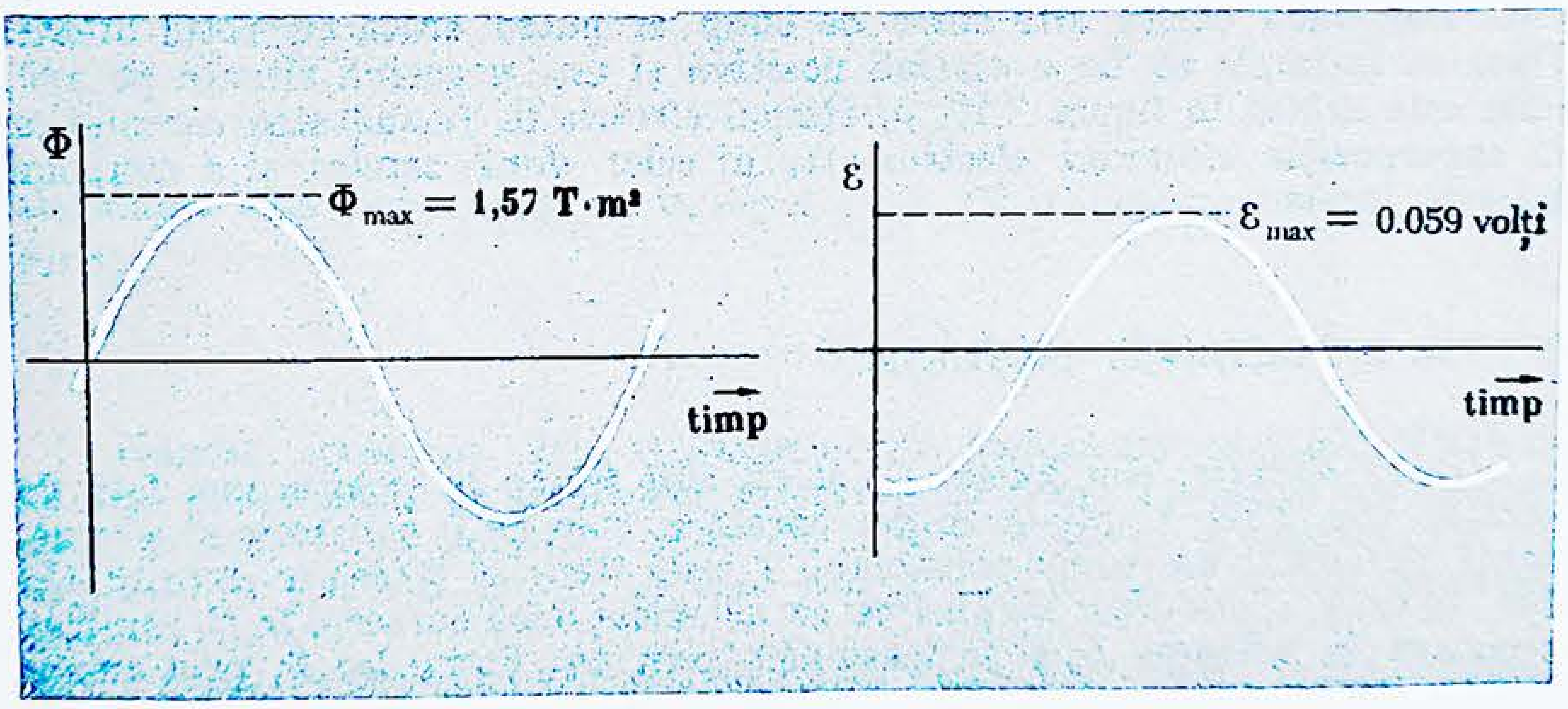


Fig. 7.17. (*a*) Fluxul prin cercul C.
(*b*) Tensiunea electromotoare corespunzînd curbei C.

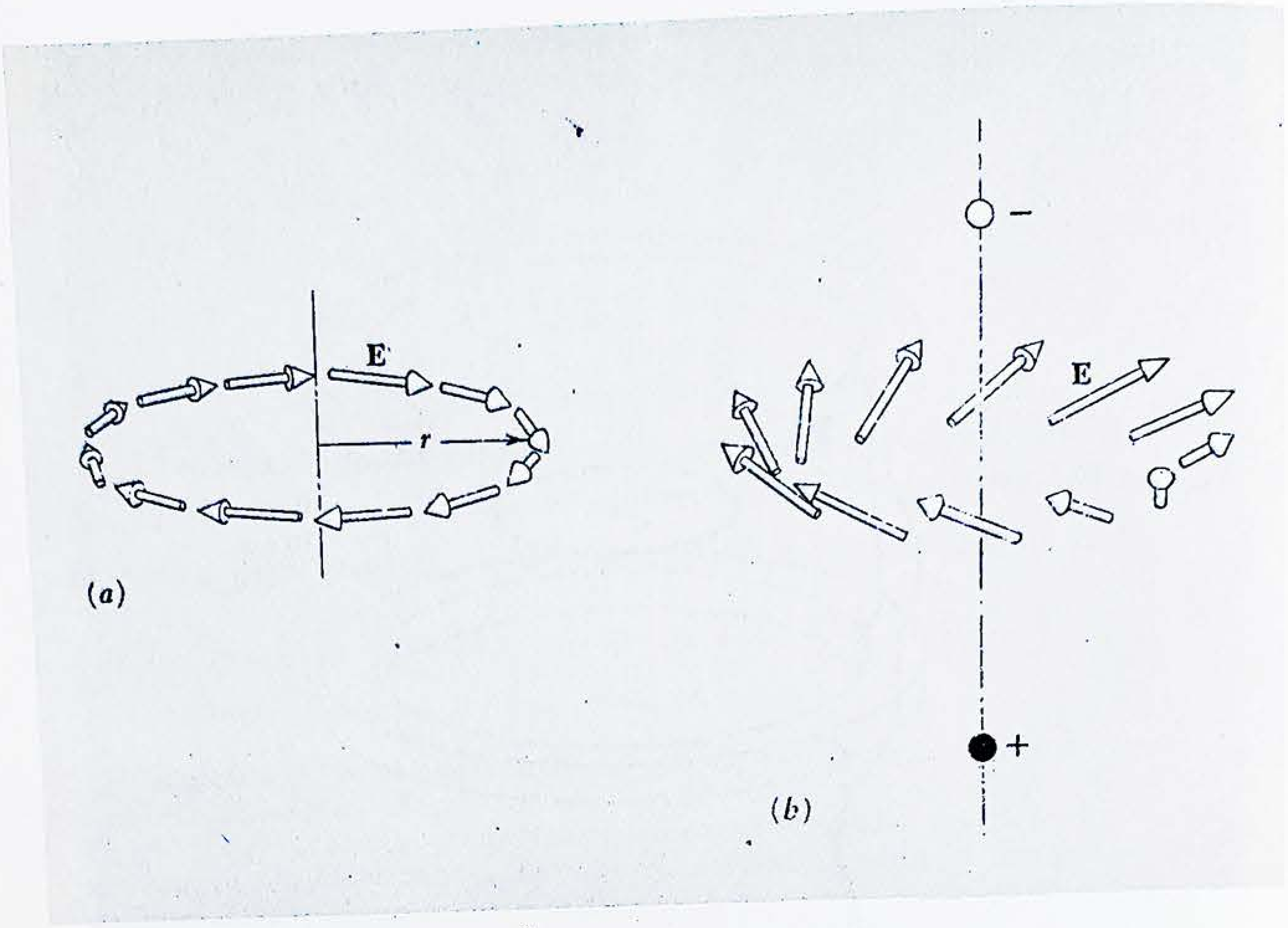


Fig. 7.18. Cîmpul electric în curba circulară C: (*a*) în absența altor surse decît curentul simetric oscilant; (*b*) incluzînd cîmpul electrostatic a două sarcini pe axă.

mărime constantă. Atunci este o problemă banală a prezice mărimea sa, deoarece $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi rE = \mathcal{E}$, pe care am calculat-o deja. În acest caz, cîmpul electric pe cerc ar putea arăta ca în figura 7.18, *a*, la un moment dat. Dar dacă există alte surse de cîmp ar putea arăta cu totul diferit. Dacă se întîmpla să fie o sarcină pozitivă și una negativă situate pe axă, cum este arătat în figura 7.18, *b*, cîmpul electric în vecinătatea cercului ar fi superpoziția cîmpului electrostatic al celor două sarcini și a cîmpului electric indus.

7.6. INDUCTANȚA MUTUALĂ

Două circuite, sau bucle, C_1 și C_2 sînt fixate în poziție una față de cealaltă (fig. 7.19). Printr-un mijloc oarecare, cum ar fi o baterie și o rezistență variabilă, un curent controlabil I_1 este făcut să treacă în circuitul C_1. Fie $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ inducția magnetică ce ar exista dacă curentul în C_1 rămînea constant la valoarea I_1 și să însemnăm prin Φ_{21} fluxul lui $\mathbf{B}_1$ prin circuitul C_2. Astfel

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (35)$$

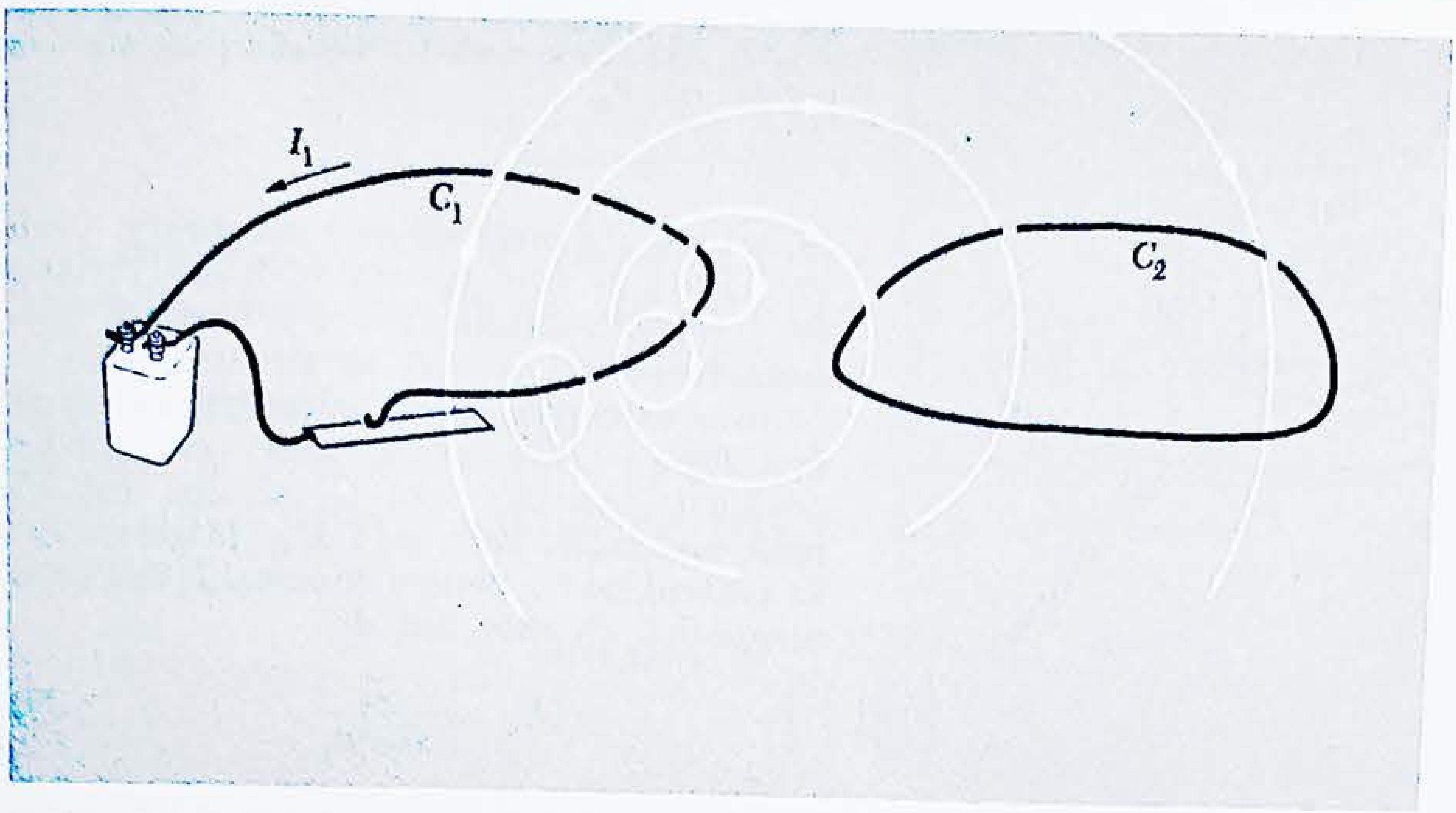


Fig. 7.19. Curentul I_1 în bucla C_1 produce un anumit flux Φ_{21} prin bucla C_2.

unde S_2 este o suprafaţă care acoperă bucla C_2. Cu forma şi poziţia relativă a celor două circuite fixate, Φ_{21} va fi proporţional lui I_1:

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const.} \qquad (36)$$

Să presupunem acum că I_1 se schimbă cu timpul, dar *destul de lent* astfel încît cîmpul $\mathbf{B}_1$ în orice punct din vecinătatea lui C_2 şi curentul I_1 în C_1 la acelaşi moment de timp sînt corelate cum ar fi fost pentru curenţi staţionari. (Pentru a vedea de ce o astfel de restricţie este necesară, imaginaţi-vă că C_1 şi C_2 sînt la 10 metri depărtare şi facem curentul în C_1 să se dubleze în valoare în 10 nanosecunde!) Fluxul Φ_{21} se va schimba în măsura în care I_1 se schimbă. Va exista o tensiune electromotoare indusă în circuitul C_2, de mărime

$$\mathcal{E}_{21} = -\text{const} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}. \qquad (37)$$

Constanta este aici aceeaşi ca în ecuaţia 36. Să scriem ecuaţia 37 în acest mod:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}. \qquad (38)$$

Numim constanta M_{21} coeficientul de *inductanţă mutuală*. Valoarea sa este determinată de geometria dispunerii buclelor. Unităţile vor depinde desigur de alegerea unităţilor pentru $\mathcal{E}$, I şi t. În sistemul practic (SI), cu Φ_{21} în volt şi I_1 în amper, M este exprimat în *henry**. Aceasta înseamnă

* Unitatea este numită în cinstea lui Joseph Henry (1797—1878), cel mai cunoscut fizician american al vremii sale. Inducţia electromagnetică a fost descoperită independent de către Henry, practic în acelaşi timp cu experienţele lui Faraday. Henry a fost primul care a observat fenomenul de autoinducţie. A perfecţionat electromagnetul şi prototipul motorului electric, a inventat releul electric şi a fost la un pas de a inventa telegrafia.

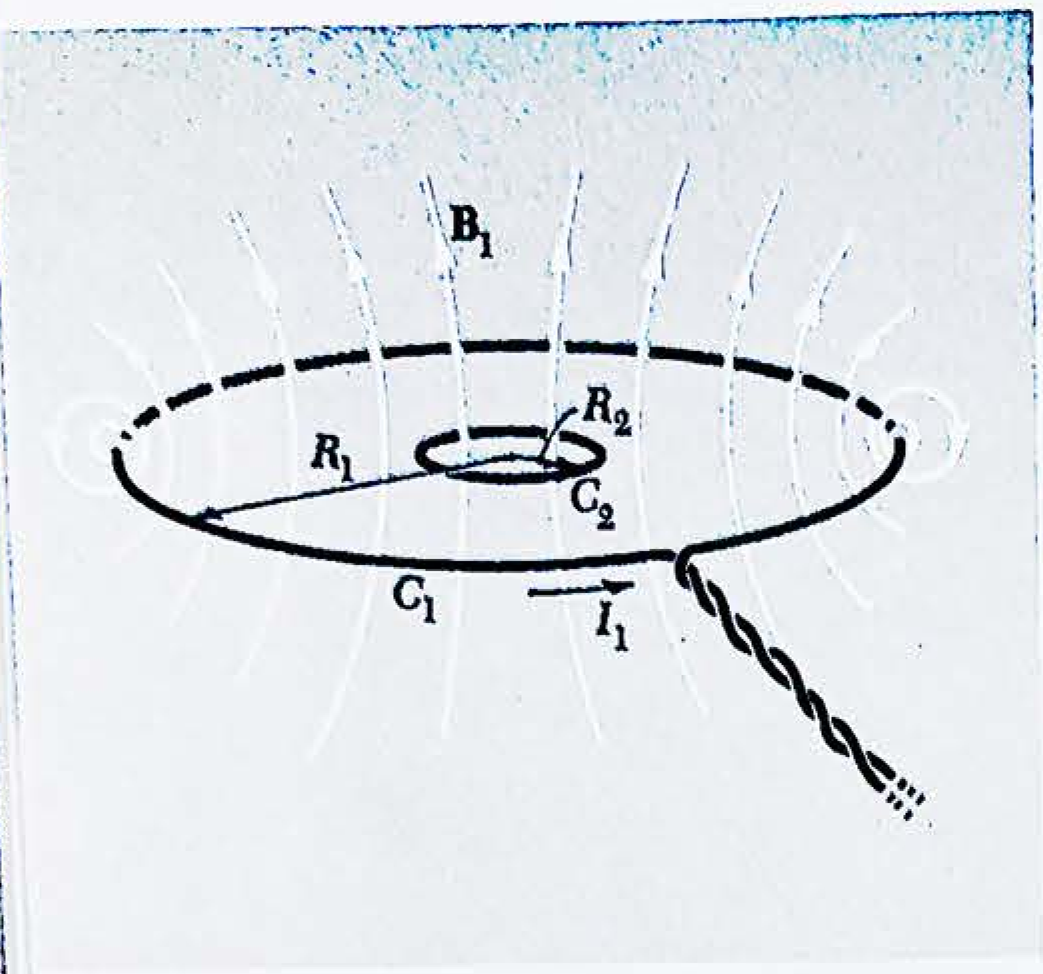


Fig. 7.20. Curentul I_1 în inelul C_1 produce un cîmp $\mathbf{B}_1$ care este aproximativ uniform peste regiunea inelului mic C_2.

că inductanța mutuală este un henry dacă un curent I_1 care se schimbă cu variație de 1 amper/secundă induce o tensiune electromotoare de 1 volt în circuitul C_2.

Ca exemplu, să considerăm circuitele din figura 7.20, două inele concentrice coplanare, un mic inel C_2 şi un inel C_1 mult mai mare. Care este M_{21}, în acest caz? În centrul lui C_1, pentru curentul I_1, inducția magnetică B_1 este dat de

$$B_1 = \frac{I_1}{2\varepsilon_0 c^2 R_1}. \quad 39)$$

cu I_1 în amperi, B_1 în tesla. (Revedeți aliniatul de la începutul § 6.5, care conduce la ecuația 6.42, dacă nu vă amintiți cum se găsește cîmpul la centrul unui inel de curent.) Presupunem că $R_2 \ll R_1$ astfel că putem neglija variația lui B_1 pe interiorul inelului mic. Atunci fluxul prin inelul mic este

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2)\frac{I_1}{2\varepsilon_0 c^2 R_1} = \frac{\pi I_1 R_2^2}{2\varepsilon_0 c^2 R_1}. \quad (40)$$

Astfel „constanta" din ecuația 36, în acest caz particular, are valoarea $\pi R_2^2/2\varepsilon_0 c^2 R_1$ şi tensiunea electromotoare indusă în C_2 va fi

$$\Phi_{21} = -\frac{\pi R_2^2}{2\varepsilon_0 c^2 R_1}\cdot\frac{dI_1}{dt} \quad (41)$$

cu Φ_{21} în volți şi I_1 în amperi. Deoarece $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} = 10^{-7}$ în unități SI,

$$\mathcal{E}\ (\text{volt}) = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \times 10^{-7}\frac{dI}{dt}. \quad (42)$$

Astfel valoarea lui M_{21} în henry, cu R_2 şi R_1 în metri, este

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} R_2^2}{R_1}. \quad (43)$$

Incidental, semnul minus pe care l-am menținut nu ne spune mult în acest stadiu. Dacă doriți să fiți siguri în ce fel va tinde forța electromotoare să poarte curentul în C_2, legea lui Lenz este ghidul dumneavoastră cel mai de nădejde.

Dacă circuitul C_1 era alcătuit din N_1 spire de sîrmă în loc de un singur inel, cîmpul B_1 la centru ar fi fost de N_1 ori mai puternic, pentru un curent dat I_1. De asemenea, dacă bucla mică era alcătuită din N_2 spire, toate de aceeaşi rază R_2, tensiunea electromotoare în fiecare spiră s-ar adăuga la aceea a următoarei, făcînd tensiunea electromotoare totală în acel circuit

de N_2 ori cea a unei singure spire. Astfel pentru *înfășurări multiple* în fiecare bobină inductanța mutuală va fi dată de

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}. \tag{44}$$

Aceasta presupune că spirele în fiecare bobină sînt strîns înfășurate împreună, secțiunea transversală a înfășurării fiind mică față de raza bobinei. Totuși, inductanța mutuală M_{21} are un înțeles bine definit pentru două circuite de orice formă sau distribuție. Ea este raportul forței electromotoare în volți din circuitul 2, produsă prin schimbarea de curent în circuitul 1, la viteza de schimbare a curentului I_1 în amperi/secundă. Aceasta înseamnă,

$$M_{21\,(\text{henry})} = \frac{\mathcal{E}_{21}\ (\text{volt})}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)\left(\frac{A}{s}\right)} \tag{45}$$

7.7. O TEOREMĂ DE „RECIPROCITATE"

Considerînd circuitele C_1 și C_2 ne-am fi putut interesa despre forța electromotoare indusă în circuitul C_1 de către un curent variabil în circuitul C_2. Aceasta ar implica un alt coeficient de inductanță mutuală, M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)}. \tag{46}$$

Este un fapt remarcabil că pentru *oricare* două circuite,

$$M_{12} = M_{21}. \tag{47}$$

Aceasta nu este o problemă de simetrie geometrică. Chiar exemplul simplu din figura 7.20 nu este simetric față de cele două circuite. Notați cu R_1 și R_2 intră în mod diferit în expresia pentru M_{21}; ecuația 47 afirmă că, pentru aceste două circuite neasemănătoare, dacă $M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$ atunci $M_{12} = \frac{2\pi_2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$ de asemenea — și *nu* ceea ce am obține prin comutarea peste tot a indicilor 1 și 2!

Pentru a dovedi teorema, ecuația 47, avem de arătat că fluxul Φ_{12} printr-un circuit oarecare C_1 ca rezultat al unui curent I în circuitul C_2 este egal cu fluxul Φ_{21} care străbate circuitul 2 cînd un curent *egal* I curge în circuitul C_1. Pentru a arăta aceasta, folosim potențialul vector.

După teorema lui Stokes,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{rot}\ \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{48}$$

În particular, dacă **A** este potențialul vector al unui cîmp magnetic **B**, adică dacă $\mathbf{B} = \text{rot}\ \mathbf{A}$, atunci avem

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S. \tag{49}$$

Adică, integrala curbilinie a potențialului vector în jurul buclei este egală cu fluxul lui **B** *prin buclă.*

Acum potențialul vector este legat de sursa de curent cum urmează, în conformitate cu ecuația 6.35:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \tag{50}$$

$\mathbf{A}_{21}$ este potențialul vector, într-un punct oarecare (x_2, y_2, z_2) al cîmpului magnetic generat de curentul I (amperi) care trece în circuitul C_1; $d\mathbf{s}_1$ este un element al buclei C; și r_{21} este mărimea distanței de la acel element la punctul (x_2, y_2, z_2).

Figura 7.21 arată cele două bucle C_1 și C_2, cu curentul I curgînd în C_1. Fie (x_2, y_2, z_2) un punct pe bucla C_2. Atunci fluxul prin C_2 datorit curentului I în C_1 este:

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 C^2} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \tag{51}$$

Analog, fluxul prin C_1 datorat curentului I care trece prin C_2 ar fi dat de

$$\Phi_{12} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \tag{52}$$

Acum $r_{12} = r_{21}$, deoarece acestea sînt mărimi de distanțe, și nu vectori. Înțelesul fiecăreia din integralele de mai sus este: Luați produsul scalar al unei perechi de elemente de curbă, cîte unul pe fiecare buclă, împărțiți prin distanța dintre ele și însumați peste toate perechile. Singura diferență între ecuația 51 și ecuația 52 este *ordinea* în care operația este efectuată, și aceasta nu poate afecta suma finală. De aici $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, de unde urmează direct că $M_{12} = M_{21}$. Datorită acestei teoreme, nu

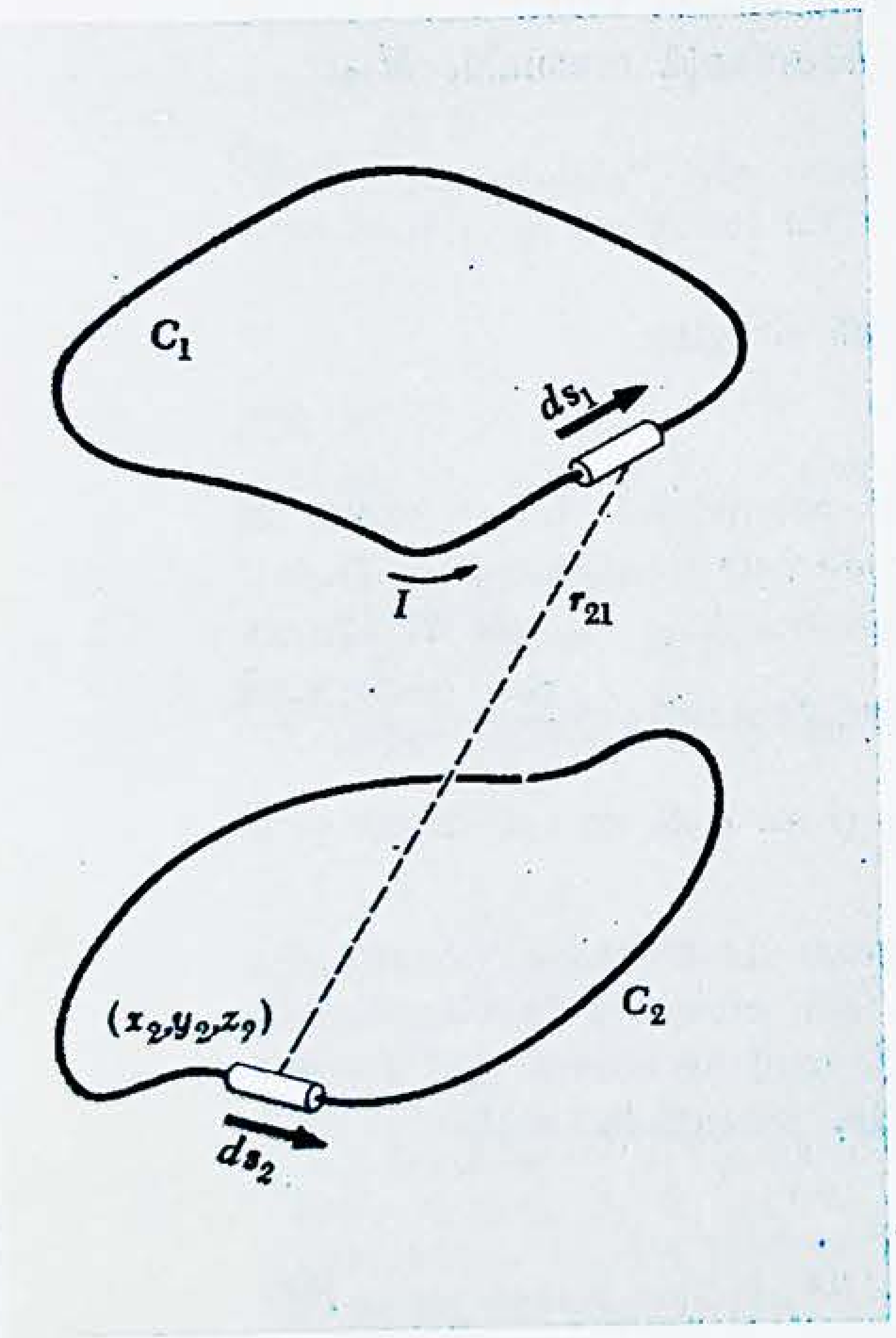


Fig. 7.21. Calcularea fluxului Φ_{21} care trece prin C_2 ca rezultat al curentului I care curge în C_1.

avem nevoie să facem nici o distincţie între M_{12} şi M_{21}. Putem vorbi, de aici înainte, de inductanţa mutuală M a oricăror două circuite.

Teoreme de acest fel sînt adesea numite teoreme de „reciprocitate". Există cîteva alte teoreme de reciprocitate despre circuitele electrice, nu nelegate de cea de aici. Aceasta poate să vă reamintească de relaţia $C_{jk} = C_{kj}$ menţionată în § 3.6 şi tratată în problema 3.27. O relaţie de reciprocitate exprimă uzual o oarecare lege de simetrie generală care nu este aparentă în structura superficială a sistemului. Veţi întîlni o lege de reciprocitate extrem de cuprinzătoare cînd studiaţi transmiterea undelor electromagnetice.

7.8. AUTOINDUCŢIA

Cînd curentul I_1 se schimbă, există o schimbare în fluxul prin însuşi circuitul C_1, în consecinţă este indusă o tensiune electromotoare. Să o numim $\mathcal{E}_{11}$. Legea inducţiei se menţine, oricare ar fi sursa fluxului:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} \tag{53}$$

unde Φ_{11} este fluxul prin circuitul 1 al cîmpului B_1 datorat curentului I_1 în circuitul 1. Semnul minus exprimă faptul că tensiunea electromotoare este totdeauna orientată astfel încît *să se opună schimbării* de curent — din nou legea lui Lenz. Deoarece Φ_{11} va fi proporţională lui I_1, putem scrie

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1\frac{dI_1}{dt}. \tag{54}$$

Constanta L_1 este numită *inductanţa* circuitului.

Ca *exemplu* de circuit pentru care L_1 poate fi calculată, să considerăm bobina dreptunghiulară toroidală din problema 6.19, arătată din nou aici în figura 7.22. Aţi găsit (dacă aţi lucrat acea problemă) că un curent I, în amperi, care trece în bobina de N spire produce un cîmp a cărui intensitate, la o rază r de la axa bobinei, este dată de $B=NI/2\pi\varepsilon_0c^2r$. Fluxul total printr-o spiră a bobinei este integrala acestui cîmp peste secţiunea transversală a bobinei

$$\Phi\,(\text{o spiră}) = h\int_a^b \frac{NI}{2\pi\varepsilon_0c^2r}\,dr = \frac{NIh}{2\pi\varepsilon_0c^2}\ln\frac{b}{a}. \tag{55}$$

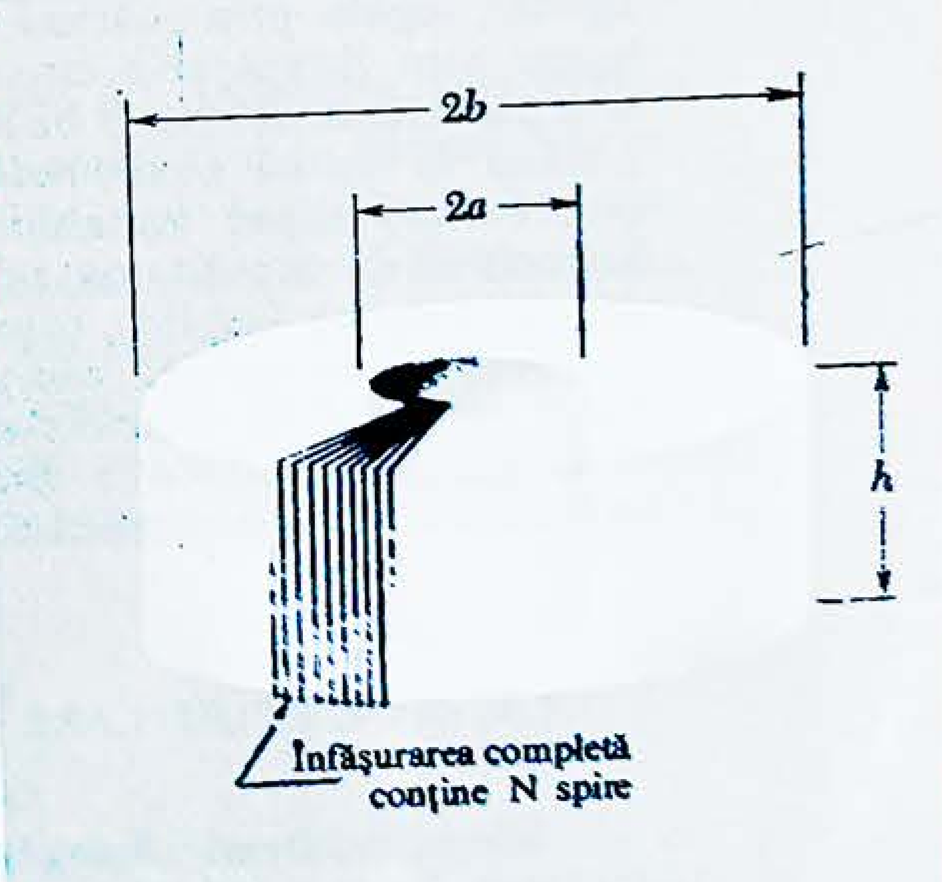


Fig. 7.22. O bobină toroidală de secţiune transversală dreptunghiulară. Sînt arătate numai cîteva spire.

Fluxul care străbate circuitul de N spire este de N ori mai mare:

$$\Phi = \frac{N^2Ih}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{56}$$

De aici tensiunea electromotoare indusă este

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N^2h}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{dI}{dt}. \tag{57}$$

Astfel autoinductanţa acestei bobine este dată de

$$L = \frac{N^2h}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{58}$$

Pentru I în amperi şi $\mathcal{E}$ în volţi, h în metri, unitatea corespunzătoare pentru L este henry-ul, ca în cazul inductanţei mutuale. În aceste unităţi avem:

$$L\ (\text{henry}) = 2 \times 10^{-7} N^2\, h \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{59}$$

Puteţi gîndi că unul dintre inelele pe care le-am considerat mai înainte ar fi fost un exemplu mai simplu pentru ilustrarea calculului inductanţei. Totuşi, dacă încercăm să calculăm inductanţa unei simple bucle circulare de sîrmă, întîlnim o dificultate bizară. Pare o bună idee a simplifica problema prin presupunerea că firul are diametrul zero. Dar descoperim îndată că dacă un curent finit circulă printr-un filament de diametru zero, fluxul care străbate o buclă dintr-un astfel de filament este infinit! Raţiunea este că cîmpul B, în vecinătatea unui curent filamentar, variază ca $1/r$ unde r este distanţa de la filament, şi integrala lui $B \times$ aria diverge ca $\int (dr/r)$ cînd o extindem pînă la $r = 0$. Pentru a evita aceasta putem lăsa raza firului finită, nu zero, care este în orice caz mai realistă. Aceasta poate face calculul ceva mai complicat, într-un caz dat, dar aceasta nu ne va îngrijora. Dificultatea reală este că părţi diferite ale firului apar acum ca circuite *diferite*, legate prin mărimi de flux diferite. Nu mai sîntem siguri ce înţelegem prin fluxul prin circuit. De fapt, deoarece tensiunea electromotoare este diferită în diferitele bucle filamentare în care se poate împărţi circuitul, trebuie să apară unele *redistribuiri* de densitate de curent cînd prin inel trec curenţi rapid variabili. De aici inductanţa circuitului poate depinde întrucîtva de rapiditatea schimbării lui I, şi astfel să nu fie strict o constantă cum ar implica ecuaţia 54.

Am evitat această complicaţie în exemplul bobinei toroidale prin ignorarea cîmpului în vecinătatea imediată a spirelor individuale în înfăşurare. Cea mai mare parte a fluxului *nu* trece prin firele înseşi şi ori de cîte ori aceasta se întîmplă efectul de care tocmai ne-am ocupat va fi neimportant.

7.9. UN CIRCUIT CARE CONŢINE AUTOINDUCTANŢĂ

Să presupunem că legăm o baterie, care debitează tensiunea electromotoare $\mathcal{E}_0$, la o bobină de inductanţă L, ca în figura 7.23, *a*. Bobina, firele de legătură şi chiar bateria vor avea o oarecare rezistenţă. Nu ne inte-

rează cum este distribuită aceasta în circuit. Ea poate fi însumată într-o rezistență R, indicată pe diagrama de circuit a figurii 7.23, *b* printr-un simbol de rezistență cu această valoare. De asemenea, restul circuitului, în special firele de legătură, contribuie puțin la inductanța întregului circuit; presupunem că aceasta este cuprinsă în L. Cu alte cuvinte, figura 7.23, *b* reprezintă o idealizare a circuitului fizic: bobina L, simbolizată prin -ℓℓℓ-, nu are rezistență; rezistorul R nu are inductanță. Acest circuit idealizat îl vom analiza acum.

Dacă curentul I în circuit variază cu rata $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, va fi indusă o tensiune electromotoare $L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, într-un sens care să se opună acestei schimbări. De asemenea, există tensiunea electromotoare constantă $\mathcal{E}_0$ a bateriei. Dacă definim direcția pozitivă a curentului ca aceea în care bateria tinde să poarte curentul în jurul circuitului, atunci tensiunea electromotoare netă la orice moment este $\mathcal{E}_0 - L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Aceasta face curentul să treacă prin rezistența R. Adică,

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI. \qquad (60)$$

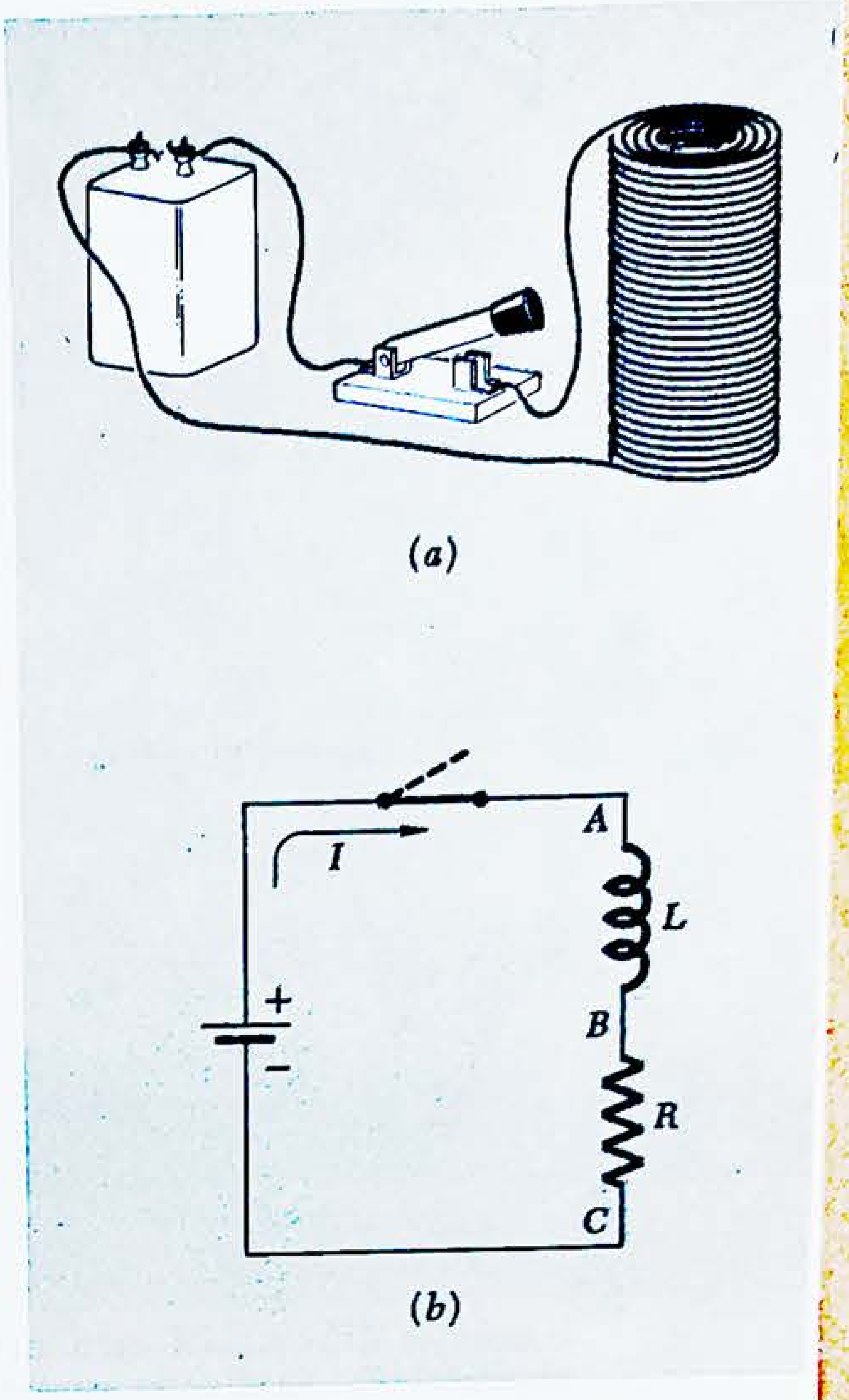


Fig. 7.23. Un circuit simplu cu inductanță *(a)* și rezistență *(b)*.

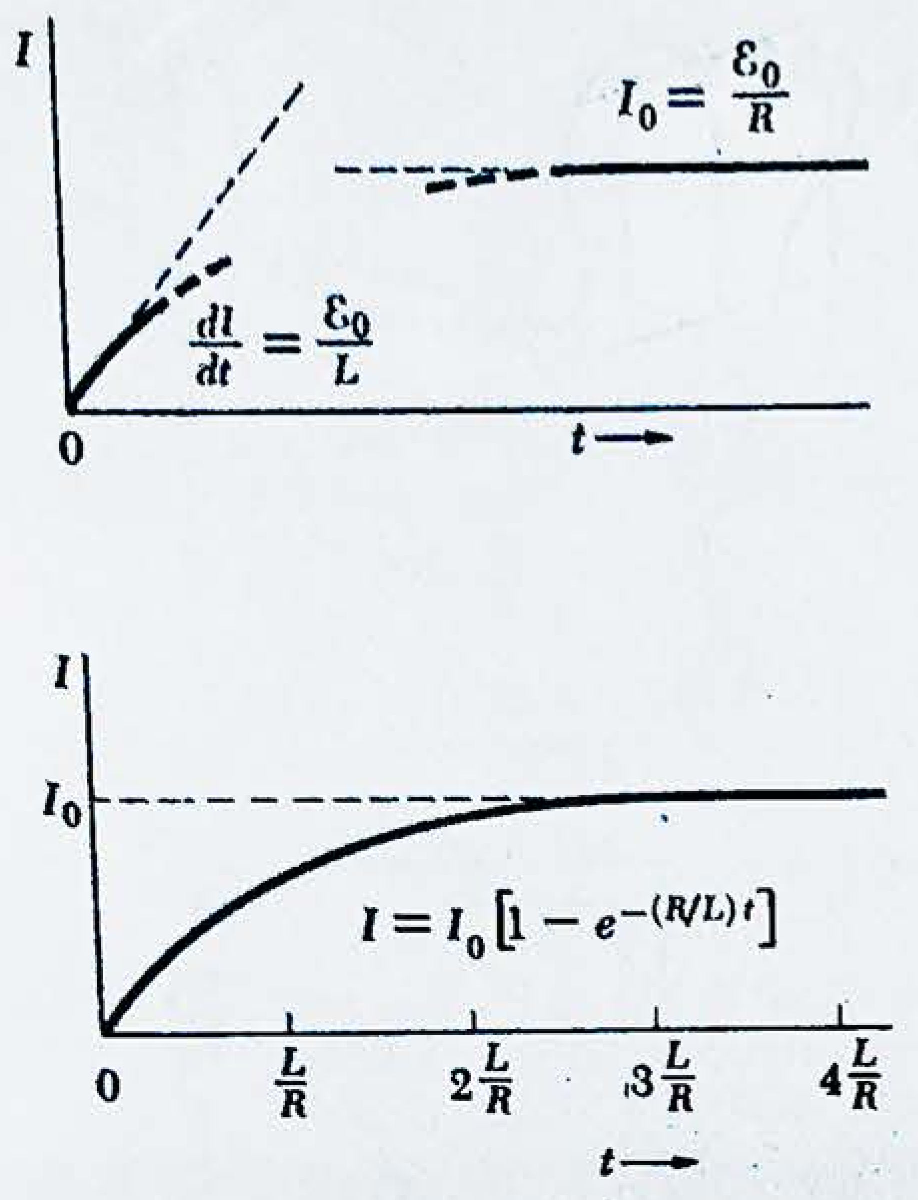
Putem de asemenea descrie situația în acest fel: Diferența de potențial între punctele A și B, pe care o vom numi *tensiune de-a lungul bobinei*, este $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, cu extremitatea de sus a inductanței pozitivă dacă I este *crescător* în direcția arătată. Diferența de potențial între B și C, tensiunea de-a lungul rezistenței, este RI, cu capătul de sus al rezistenței pozitiv. De aici suma tensiunii de-a lungul bobinei și tensiunii de-a lungul rezistorului este $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t + RI$. Aceasta este aceeași cu diferența de potențial între bornele bateriei, care este $\mathcal{E}_0$ (bateria noastră idealizată nu are rezistență internă). Astfel avem

$$\mathcal{E}_0 = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \qquad (61)$$

care este o simplă reformulare a ecuației 60.

Înainte de a privi la soluția matematică a ecuației 60, să prezicem ce este de așteptat să se întîmple în acest circuit dacă comutatorul este închis

Fig. 7.24. (*a*) Cum trebuie să se comporte curentul la momentul inițial și după ce s-a scurs foarte mult timp. (*b*) Variația completă a curentului cu timpul în circuitul din fig. 7.23.



la $t = 0$. Înainte de închiderea comutatorului, curentul este în mod necesar $I = 0$. Mult timp după ce comutatorul a fost închis, o stare oarecare staționară va fi fost atinsă, cu curent practic constant la o oarecare valoare I_0. Atunci și pe urmă, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \approx 0$ și ecuația 60 se reduce la

$$\mathcal{E}_0 = RI_0. \qquad (62)$$

Tranziția de la curent zero la curent de stare staționară I_0 nu poate interveni brusc la $t = 0$, deoarece $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ ar fi infinită. De fapt, imediat după $t = 0$, curentul I va fi atît de mic încît cel de-al doilea termen RI în ecuația 60 poate fi neglijat, dînd

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \qquad (63)$$

Inductanța L limitează rata de creștere a curentului.

Ceea ce știm acum este rezumat în figura 7.24, *a*. Rămîne doar de găsit cum are loc întreagă trecerea. Ecuația 60 este o ecuație diferențială cum ați întîlnit deja în § 4.11 și în volumul I, capitolul 6. Fără alte considerații putem scrie o soluție a ecuației 60 care satisface condiția noastră inițială, $I = 0$ la $t = 0$.

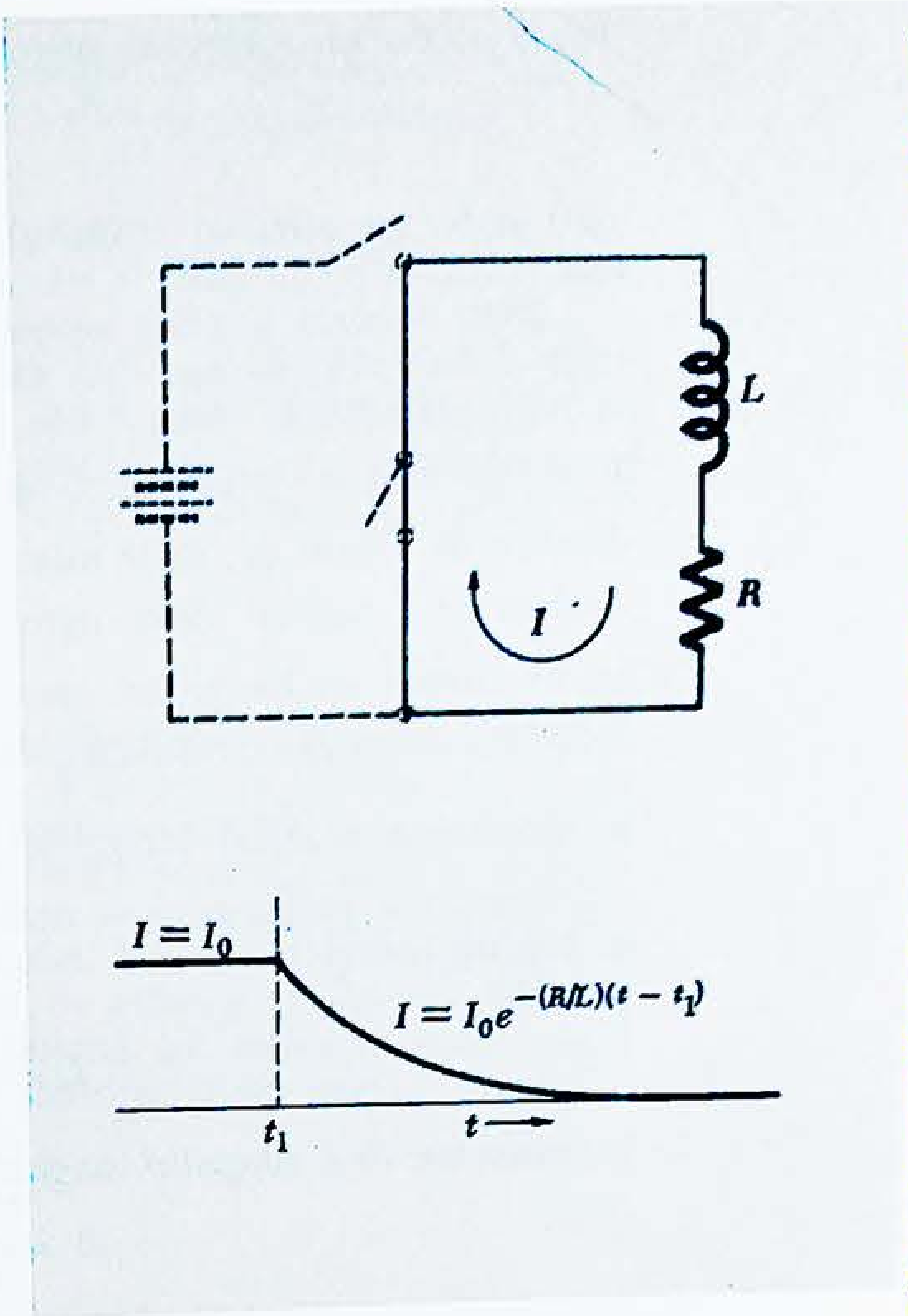
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}). \qquad (64)$$

Graficul din figura 7.24, *b* arată curentul care atinge valoarea sa asimptotică I_0 în mod exponențial. „Constanta de timp" a acestui circuit este cantitatea L/R. Dacă L este măsurat în henry și R în ohmi, aceasta rezultă în secunde, deoarece henry ~ volt/(amper/secundă), și ohm ~volt/(amper/secundă).

Ce se întîmplă dacă deschidem comutatorul după ce curentul I_0 a fost stabilit, forțînd astfel curentul să cadă brusc la zero? Aceasta ar face termenul $L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ infinit negativ! Catastrofa poate fi mai mult decît matematică. Au fost omorîți oameni deschizînd comutatoare în circuite de înaltă inductivitate. Ceea ce se întîmplă în general este că o tensiune indusă foarte înaltă produce o scînteie sau arc de-a lungul contactelor comutatorului deschis, astfel încît curentul continuă și pe urmă. Să îndepărtăm în schimb bateria din circuit închizînd o cale conductoare *de-a lungul* combinației LR ca în figura 7.25, *a*, în același timp deconectînd bateria. Avem acum un circuit descris de ecuația

$$0 = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \qquad (65)$$

Fig. 7.25. *(a)* Circuit *LR*. *(b)* Atenuare exponențială a curentului în circuitul *LR*.



cu condiția inițială $I = I_0$ la $t = t_1$, unde t_1 este momentul la care scurt-circuitul a fost închis. Soluția este simplu funcția de descreștere exponențială:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \qquad (66)$$

cu același timp caracteristic L/R ca înainte.

7.10. ENERGIA ÎNMAGAZINATĂ ÎN CÎMPUL MAGNETIC

În timpul procesului de stingere a curentului descris de ecuația 66 și figura 72.5, *b*, este dirijată energie în rezistența R. Deoarece energia dW dirijată în fiecare interval scurt dt este $RI^2 dt$, energia totală dirijată după închiderea comutatorului la momentul t_1 trebuie să fie:

$$W = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt. \qquad (67)$$

Cu substituția $x = 2R(t - t_1)/L$ aceasta este ușor evaluată:

$$W = RI_0^2 \left(\frac{L}{2R}\right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2. \qquad (68)$$

Sursa acestei energii a fost inductanța cu cîmpul ei magnetic. Într-adevăr, exact acea cantitate de lucru a fost efectuată de baterie pentru a instala mai întîi curentul — în afara energiei dirijate în rezistență între $t = 0$ și $t = t_1$, care a fost de asemenea furnizată de baterie. Pentru a vedea că aceasta este o relație generală, notați că dacă avem un curent crescător într-o inductanță, trebuie să se efectueze lucru pentru a întreține curentul împotriva forței electromotoare LdI/dt. Astfel lucrul efectuat în timpul dt este

$$dW = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI = \frac{1}{2} Ld(I^2). \qquad (69)$$

De aceea, putem atribui o energie totală

$$W = \frac{1}{2} LI^2, \tag{70}$$

unui inductor purtînd curentul I. La eventuala stingere a acestui curent, acea cantitate de energie va apare altundeva.

Este natural a privi aceasta ca energie înmagazinată în cîmpul magnetic al bobinei, tot aşa cum am descris energia unui condensator încărcat ca înmagazinată în cîmpul său electric. Energia unui condensator încărcat la o diferenţă de potenţial U este $\frac{1}{2} CU^2$, şi este obţinută atribuind unui element de volum dv, unde intensitatea cîmpului electric este E, o cantitate de energie $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv$. Este agreabil, dar, a găsi că o relaţie întru totul asemănătoare are loc pentru energia înmagazinată într-o inductanţă. Aceasta înseamnă că putem atribui cîmpului magnetic o densitate de energie $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$, şi însumarea energiei întregului cîmp va da energia $\frac{1}{2} LI^2$.

Pentru a vedea cum se aplică aceasta într-un caz, ne putem întoarce la bobina toroidală a cărei inductanţă L am calculat-o în § 7.8. Am găsit (ec. 58)

$$L = \frac{N^2 h}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{71}$$

Intensitatea B a cîmpului magnetic, pentru curentul I, a fost dată

$$B = \frac{NI}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \tag{72}$$

Pentru a calcula integrala de volum a lui $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$ putem folosi un element de volum constînd din pătura cilindrică schiţată în figura 7.26, cu volumul $2\pi rh dr$. Cînd această pătură trece de la $r = a$ la $r = b$, ea mătură întreg spaţiul care conţine cîmp magnetic. (Dacă vă amintiţi inducţia magnetică B este zero peste tot în afara torului.)

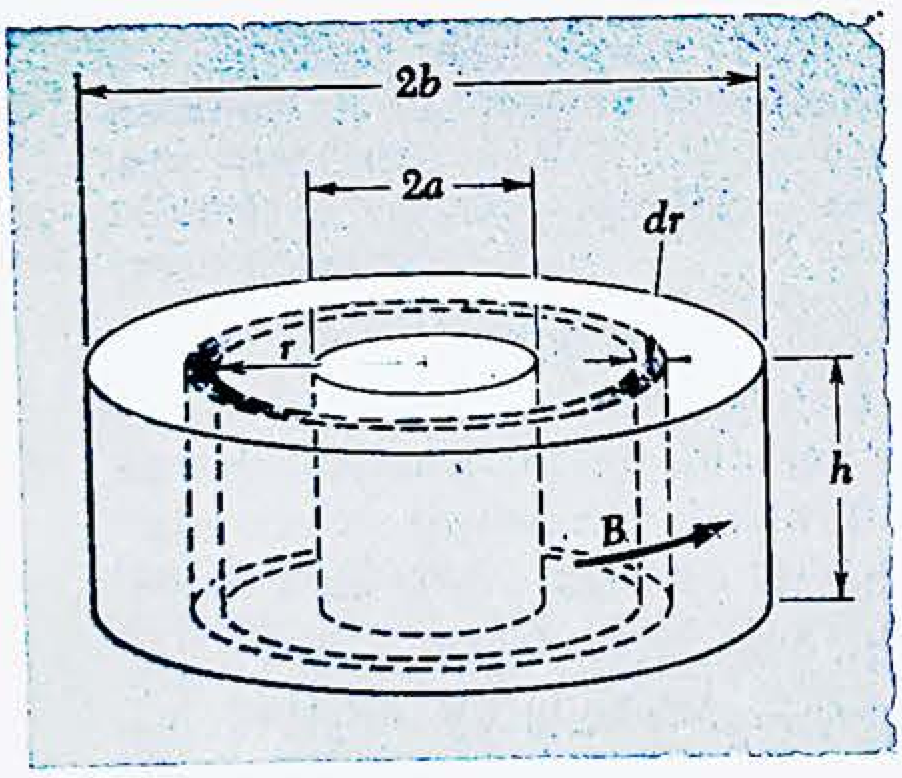


Fig. 7.26. Calcularea energiei înmagazinate în cîmpul magnetic al bobinei toroidale din fig. 7.22.

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int B^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int_a^b \left(\frac{NI}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 2\pi rh dr =$$

$$= \frac{N^2 h I^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{73}$$

Comparînd acest rezultat cu ecuaţia 71, vedem că, într-adevăr

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int B^2 dv = \frac{1}{2} LI^2. \tag{74}$$

Propoziţia mai generală, perechea propoziţiei despre cîmpul electric din ecuaţia 1.36, este că energia W de asociat cu orice cîmp magnetic $B(x, y, z)$ este dată de:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int_{\text{cîmpul întreg}} B^2 dv. \tag{75}$$

Cu B în Tesla şi v în metri cubi, W în ecuaţia 75 va fi dat în joule. În ecuaţia 70, folosind unităţile practice SI, henry şi amper, pentru L şi I, W va fi de asemenea dat în joule.

7.11. „CEVA LIPSEŞTE"

Să revedem relaţiile între sarcini şi cîmpuri. După cum am învăţat în capitolul 2, o enunţare echivalentă a legii lui Coulomb este relaţia diferenţială

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{76}$$

care leagă densitatea de sarcină electrică ρ şi intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$. Aceasta se menţine pentru sarcini în mişcare ca şi pentru sarcini staţionare. Adică, ρ poate fi o funcţie de timp ca şi de poziţie. Cum am pus în evidenţă în capitolul 5, faptul că ecuaţia 76 este valabilă pentru sarcini în mişcare este consistent cu *invarianţa de sarcină.* Oricum s-ar mişca o particulă încărcată, sarcina sa, măsurată prin integrala lui $\mathbf{E}$ pe o suprafaţă care o înconjoară, apare aceeaşi în oricare sistem de referinţă. Sarcina electrică în mişcare este curent electric. Deoarece sarcina nu este niciodată creată sau distrusă, densitatea de sarcină ρ şi densitatea de curent $\mathbf{J}$ satisfac totdeauna condiţia

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{77}$$

Am scris prima oară această „Ecuaţie de continuitate" ca ecuaţia 4.9.

Dacă densitatea de curent $\mathbf{J}$ este constantă în timp, o numim o distribuţie de curent staţionară. Cîmpul magnetic al unei distribuţii de curent staţionare satisface ecuaţia.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0 c^2}. \tag{78}$$

Am lucrat cu această relaţie în capitolul 6.

Acum sîntem interesaţi în distribuţia de sarcini şi cîmpuri care variază în timp. Să presupunem că avem o distribuţie de sarcină $\rho(x, y, z, t)$ cu $\partial \rho/\partial t \neq 0$. De exemplu, am putea avea un condensator care se descarcă printr-o rezistenţă. În conformitate cu ecuaţia 77, $\partial \rho/\partial t \neq 0$ implică

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0. \tag{79}$$

Dar după ecuaţia 78, deoarece divergenţa rotorului *oricărei* funcţii vectoriale este identic nulă (vezi prob. 2.15)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0. \tag{80}$$

Contradicţia arată că ecuaţia 78 *nu poate fi corectă* pentru un sistem în care densitatea de sarcină este variabilă în timp. Desigur, nimeni nu a pretins aceasta; o distribuţie de curent staţionară, pentru care ecuaţia 78 *are* loc, este una în care nici densitatea de curent $\mathbf{J}$, în afară de densitatea de sarcină ρ, nu depinde de timp.

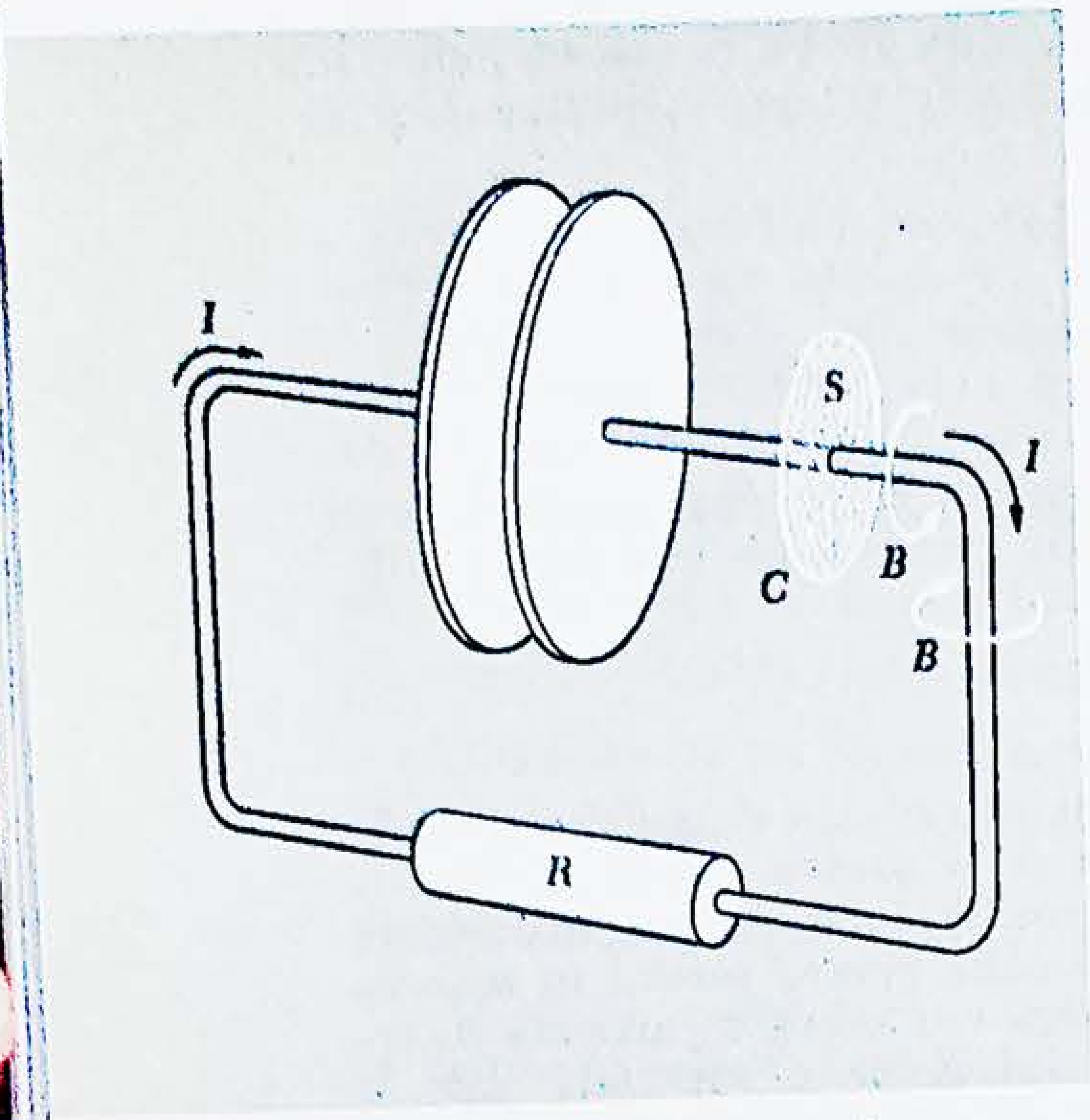


Fig. 7.27. După încărcare cu armătura dreaptă pozitivă, condensatorul se descarcă prin rezistență. Există un cîmp de inducție magnetică **B** în jurul firului. Integrala lui rot **B**, pe suprafața S care trece prin fir, are valoarea $I/\varepsilon_0 c^2$.

Problema se poate pune în termeni întrucîtva diferiți considerînd integrala curbilinie de cîmp magnetic în jurul firului care transportă în afară sarcina de la placa de condensator din figura 7.27. După teorema lui Stokes,

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \qquad (81)$$

Suprafața S trece chiar prin conductorul în care trece curentul I. În interiorul acestui conductor, rot **B** are o valoare finită, anume $\mathbf{J}/\varepsilon_0 c^2$, și integrala din dreapta rezultă egală cu $I/\varepsilon_0 c^2$. Aceasta înseamnă că, dacă curba C este în vecinătatea firului și departe de spațiul dintre plăci, mărimea cîmpului magnetic de acolo nu diferă de cîmpul în jurul oricărui fir care poartă același curent. Acum suprafața S' în figura 7.28 este de asemenea o suprafață care acoperă C, și poate fi folosită la fel de bine în aplicarea teoremei lui Stokes, ecuația 81. Prin această suprafață, totuși, *nu trece curent de loc*! Totuși, rot **B** nu poate fi zero peste tot pe S' fără a încălca teorema lui Stokes. De aceea, pe S', rot **B** trebuie să depindă de încă altceva decît de densitatea de curent **J**.

Putem doar trage concluzia că ecuația 78 este de înlocuit printr-o oarecare altă relație, în situația mai generală a distribuțiilor de sarcină variabile. Să scriem în loc

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J} + (?) \qquad (82)$$

și să vedem dacă putem descoperi ce trebuie (?) să fie.

O altă linie de gîndire sugerează răspunsul. Amintiți-vă că ecuațiile de transformare ale cîmpului electromagnetic, ecuația 6.58, sînt complet simetrice în **E** și **B**. Acum în fenomenul de inducție al lui Faraday un *cîmp magnetic variabil* este însoțit de un *cîmp electric*, într-o manieră descrisă de ecuația 30:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (30)$$

Aceasta este o relație locală care leagă cîmpurile electric și magnetic în spațiul vid — sarcinile nu sînt direct implicate. Dacă simetria față de **E** și **B** se păstrează, trebuie să ne așteptăm ca un *cîmp electric variabil* să poată genera un *cîmp magnetic*. Ar trebui să fie un fenomen de inducție descris de o ecuație ca ecuația 30, dar cu rolurile lui **E** și **B** schimbate.

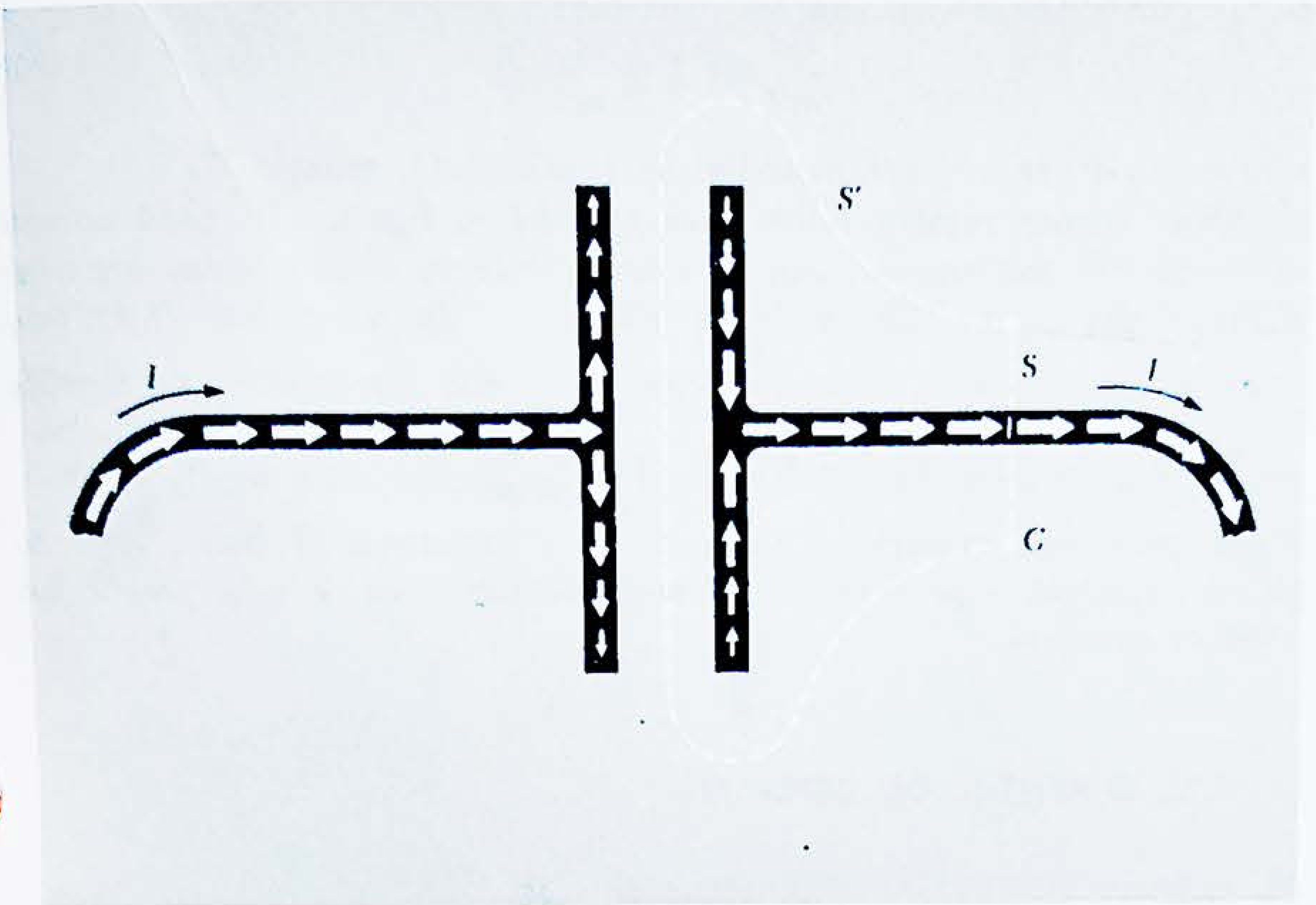


Fig. 7.28. Săgeţile albe arată curgerea curentului în conductori. Suprafaţa S', care are la fel ca S curba C drept margine, nu este traversată de curent.

Va apare că este nevoie de schimbat de asemenea semnul, dar aceasta este totul:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{83}$$

Aceasta dă termenul lipsă care este cerut în ecuaţia 82. Pentru a verifica aceasta, să scriem

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{84}$$

şi să luăm divergenţa în ambii membrii:

$$\text{div } (\text{rot } \mathbf{B}) = \text{div}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{J}\right) + \text{div}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{85}$$

Partea stîngă este în mod necesar zero, după cum am observat deja. În termenul al doilea din dreapta putem schimba ordinea de diferenţiere faţă de coordonate şi timp. Astfel

$$\text{div}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho) \tag{86}$$

prin ecuaţia 71. Partea dreaptă a ecuaţiei 85 devine acum

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\operatorname{div}\mathbf{J}+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{87}$$

care este zero în virtutea condiţiei de continuitate, ecuaţia 77.

Noul termen rezolvă dificultatea apărută în figura 7.28. Cînd sarcina se scurge din condensator, cîmpul electric, care în orice moment are configuraţia din figura 7.29, *scade* în intensitate. În acest caz, $\partial\mathbf{E}/\partial t$ este orientat invers lui $\mathbf{E}$. Funcţia vectorială $\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ este reprezentată de săgeţile negre în figura 7.30. Cu $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, integrala lui rot $\mathbf{B}$ pe S' are acum aceeaşi valoare ca şi pe S. Pe S' termenul al doilea este de primă importanţă, pe S primul termen, termenul cu $\mathbf{J}$ este practic tot ceea ce contează.

7.12. CURENTUL DE DEPLASARE

Să observăm că cîmpul vectorial $\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ apare ca o *continuare* a distribuţiei curentului de conducţie. Maxwell l-a numit *curent de deplasare*, şi numele a rămas deşi nu mai pare foarte potrivit. Mai precis, putem defini o „densitate a curentului de deplasare" $\mathbf{J}$, spre a o distinge de densitatea curentului de conducţie $\mathbf{J}$, scriind ecuaţia 84 în acest fel:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_d) \tag{88}$$

şi definind $\mathbf{J}_d\equiv\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$.

Am avut nevoie de noul termen pentru a face relaţia între curent şi cîmpul magnetic consistentă cu ecuaţia de continuitate, în cazul curenţilor de conducţie variabili în timp. Dacă apare acolo, el implică existenţa unui nou efect de conducţie în care un cîmp electric variabil este însoţit de un cîmp magnetic. Dacă efectul este real, de ce nu l-a descoperit Faraday? Mai întîi, el nu l-a căutat, dar există un motiv mai fundamental pentru care experienţe ca aceea a lui Faraday nu au putut dezvălui nici un nou efect de atribuit ultimului termen din ecuaţia 84. În orice aparat în care există cîmpuri electrice variabile, sînt prezente în acelaşi timp curenţi de conducţie, sarcini în mişcare. Inducţia magnetică $\mathbf{B}$, peste tot în jurul aparatului, este tocmai ce aţi aştepta ca acei curenţi să producă. De fapt, este aproape exact cîmpul pe care l-aţi calcula dacă, neglijînd faptul că circuitele pot să nu fie continue, aţi fi folosit formula „Biot-Savart", ecuaţia 6.38, pentru a găsi contribuţia fiecărui element de curent de conducţie la cîmpul dintr-un punct oarecare din spaţiu.

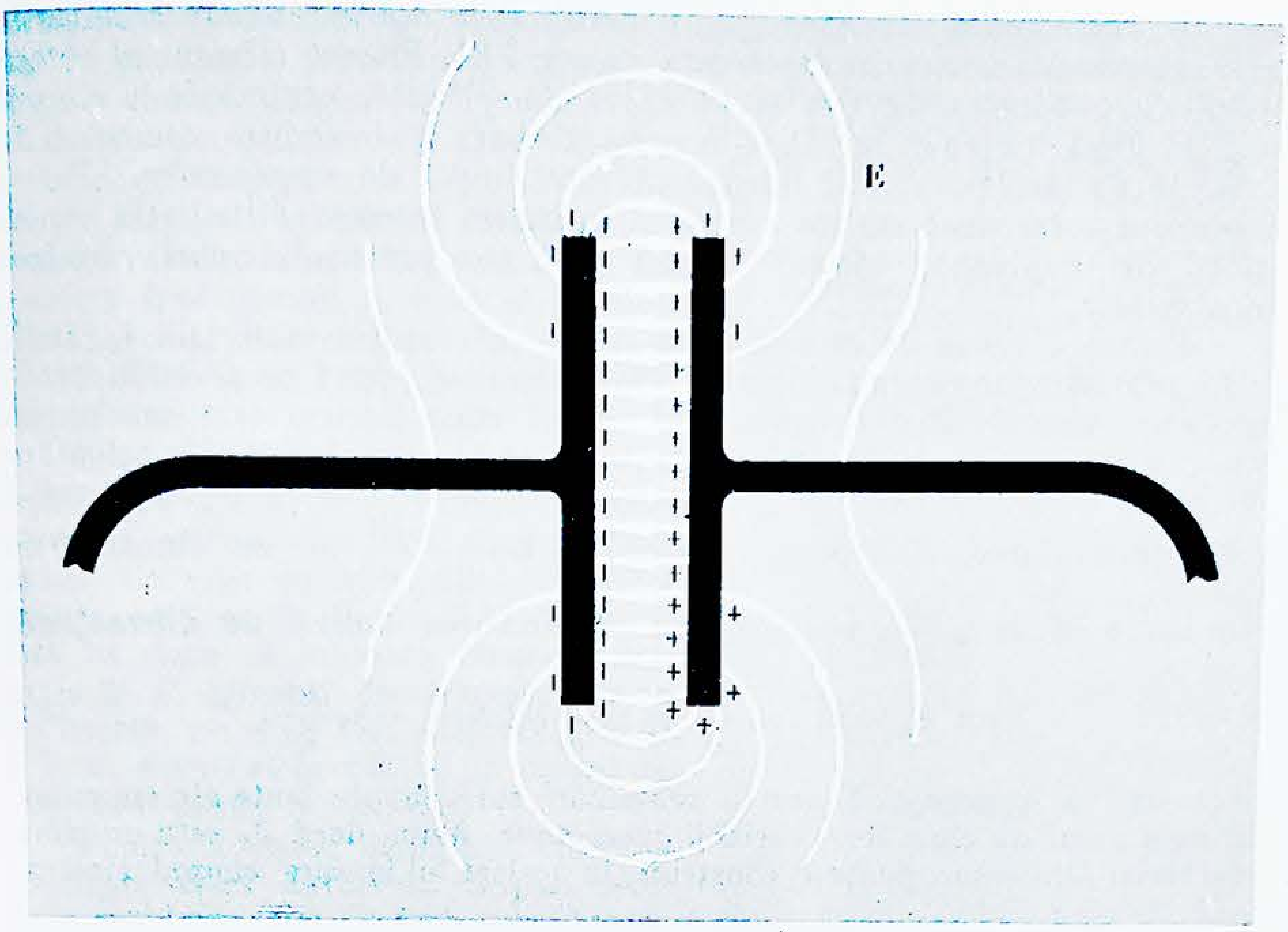
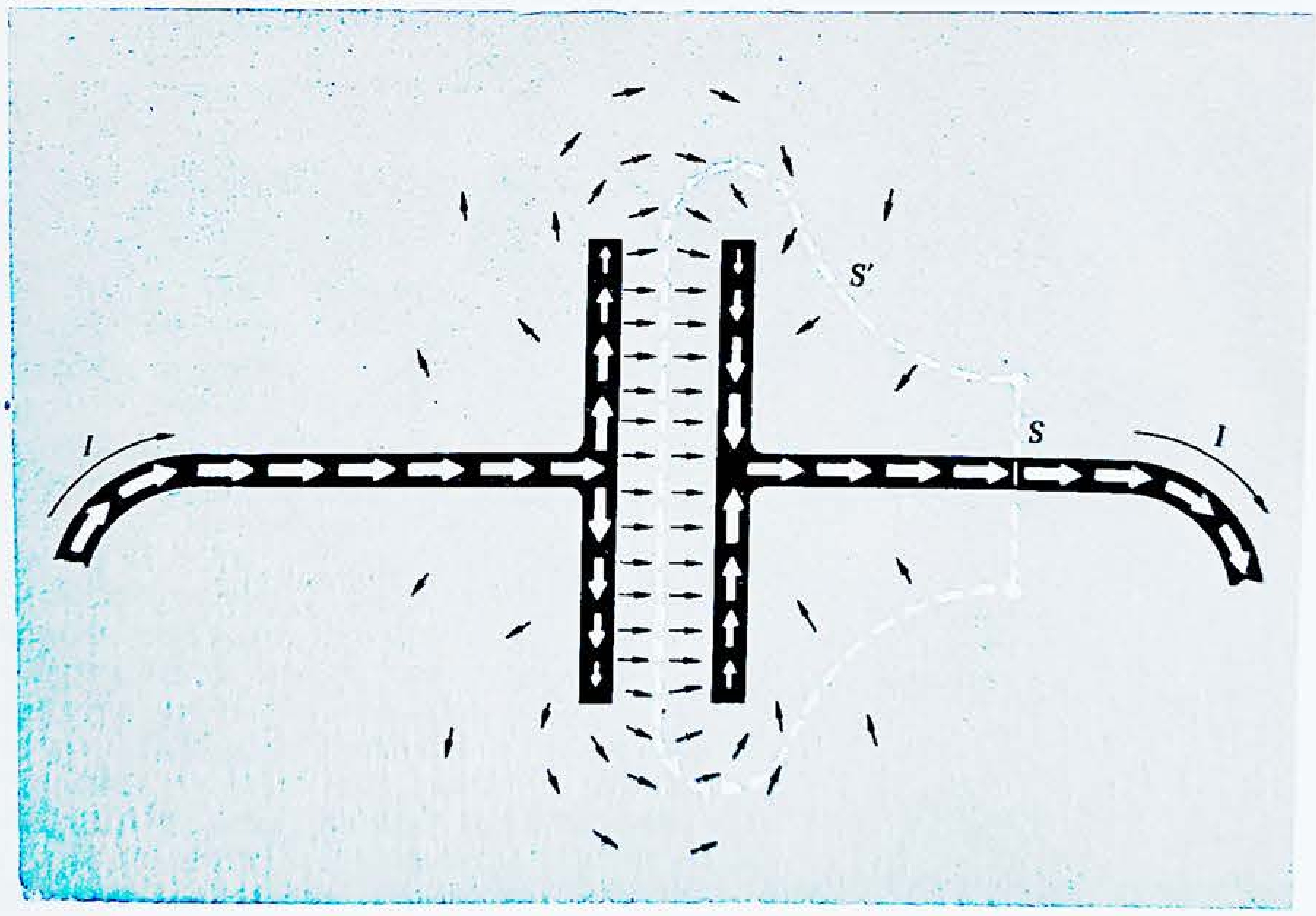


Fig. 7.29. Cîmpul electric la un moment dat. Mărimea lui **E** este în timp *descrescătoare* peste tot.

Fig. 7.30. Curentul de conducție (săgeți albe) și curentul de deplasare (săgeți negre).



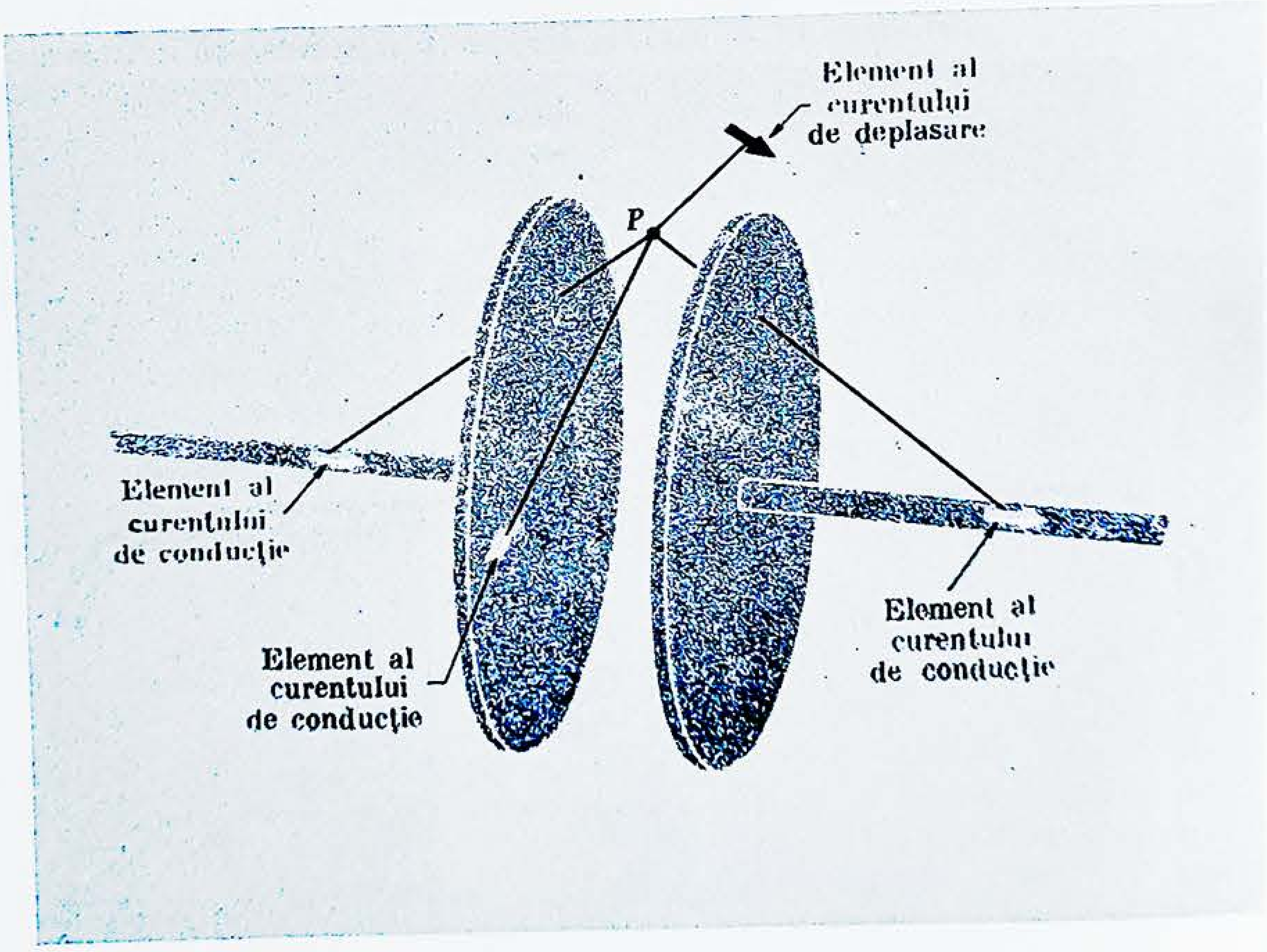
Să considerăm, de exemplu, punctul P în spațiul dintre armăturile condensatorului nostru în descărcare, figura 7.31. Fiecare element al curentului de conducție, în fire și pe suprafața plăcilor, contribuie la cîmpul din P, după formula lui Biot-Savart. Trebuie să includem elementul de „curent de deplasare" $\mathbf{J}_d$? Răspunsul este destul de surprinzător. *Putem* include $\mathbf{J}_d$; dar dacă sîntem atenți să includem *întreagă* distribuția curentului de deplasare, efectul ei net va fi *zero* pentru cîmpuri variabile relativ lent.

Pentru a vedea de ce este astfel, notați că funcția vectorială $\mathbf{J}_d$, indicată prin săgețile negre în figura 7.30, are aceeași formă ca și intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ din figura 7.29. Acest cîmp electric este practic un cîmp electrostatic, cu excepția faptului că se atenuează lent. Ne așteptăm de aceea că rotorul său este practic zero ceea ce ar implica faptul că rot $\mathbf{J}$ este practic zero. Mai precis, avem rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ și cu curentul de deplasare $\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, obținem, prin schimbarea ordinii de diferențiere,

$$\text{rot } \mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \text{ rot } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{89}$$

Aceasta va fi neglijabil pentru schimbări suficient de lente ale cîmpului. Putem numi un cîmp lent variabil *quasi-static*. Acum dacă $\mathbf{J}_d$ este un cîmp vectorial fără rotor, poate fi construit, în același fel în care cîmpul electro-

Fig. 7.31. În cazul cîmpurilor lent variabile, contribuția totală la cîmpul magnetic în orice punct, de la toți curenții de deplasare, este zero. Cîmpul magnetic în P poate fi calculat prin formula Biot-Savart aplicată numai pentru elementele de curent de conducție.

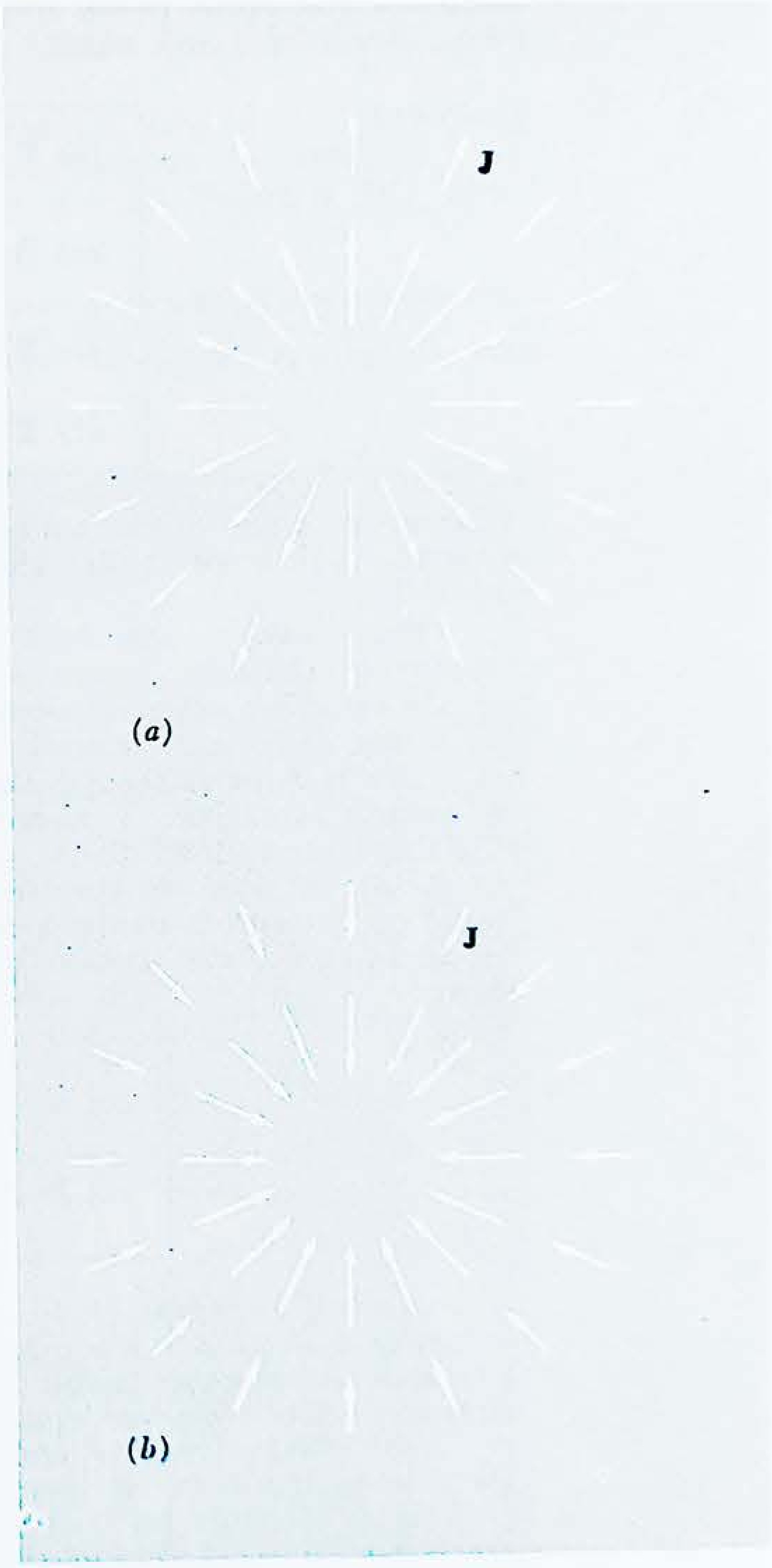


static poate fi compus din cîmpurile sarcinilor punctuale, prin superpunerea curenţilor radiali curgînd spre exterior de la sursele punctuale sau spre interior spre „găurile" punctuale (fig. 7.32). Dar cîmpul magnetic al oricărei distribuţii de curent *radiale*, simetrice, calculată în maniera Biot-Savart, trebuie să fie zero din simetrie, deoarece nu există nici o direcţie unică, cu excepţie a însăşi direcţiei radiale.

În cîmpul *quasi-static*, atunci, numai curenţii de conducţie sînt singurele *surse* necesare pentru a explica cîmpul magnetic. Cu alte cuvinte, dacă Faraday aranja ceva ca în figura 7.31, şi ar fi fost în stare să măsoare cîmpul magnetic în P, folosind de exemplu un ac de busolă, nu ar fi fost surprins. Nu ar fi avut nevoie să inventeze un curent de deplasare pentru a-l explica.

Pentru a vedea acest nou efect de inducţie, avem nevoie de cîmpuri electrice rapid variabile. De fapt, avem nevoie ca schimbările să apară în timpul care îi trebuie luminii să traverseze aparatul. De aceea demonstraţia directă a trebuit să-l aştepte pe Hertz, ale cărui experienţe au venit mulţi ani după ce legea însăşi a fost enunţată de Maxwell.

Fig. 7.32. Reprezentarea a ceea ce se înţelege printr-o distribuţie radială de curent. Densitatea de curent **J** pentru sursa punctiformă în *(a)* sau pentru „gaura" punctiformă în *(b)* este asemănătoare cîmpului electric al unei sarcini punctuale. Orice distribuţie de curent pentru care rot **J** = 0 ar putea fi făcută prin superpunere de astfel de surse şi găuri, şi trebuie de aceea să aibă cîmpul magnetic nul.



7.13. ECUAŢIILE LUI MAXWELL

James Clerk Maxwell, după ce a studiat cercetările în electricitate ale lui Faraday, a pornit să formuleze matematic o teorie a electricităţii şi magnetismului. Maxwell nu s-a putut folosi de relativitate — aceasta a apărut cincizeci de ani mai tîrziu. Structura materiei era un mister, relaţia între lumină şi electromagnetism nebănuită. Multe din argumentele pe care le-am folosit pentru a face ultimul nostru pas par evidente, dar erau de negîndit atunci. Totuşi, în timp ce teoria lui Maxwell s-a dezvoltat, termenul pe care l-am discutat, $\partial \mathbf{E}/\partial t$, a apărut cu totul natural în formularea sa. El l-a numit „curent de deplasare". Maxwell era interesat de cîmpul electric

în substanța solidă ca și în vid și cînd vorbește despre un „curent de deplasare" el include adesea de asemenea o oarecare sarcină în mișcare. Vom lămuri acest punct în capitolul 9 unde studiem cîmpurile electrice în materie. Într-adevăr Maxwell a gîndit spațiul însuși ca un mediu, „eterul", încît chiar în absența materiei solide curentul de deplasare apărea în ceva. Dar nu contează — ecuațiile sale matematice au fost perfect clare și neambigue, și introducerea curentului de deplasare a fost o descoperire *teoretică* de prim rang.

Descrierea lui Maxwell a cîmpului electromagnetic a fost esențialmente completă. Am ajuns pe căi diferite la diferite părți ale ei, pe care le vom aduna acum în forma numită tradițional *ecuațiile lui Maxwell:*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{J} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Acestea sînt scrise pentru cîmpuri în vid, în prezența densității de sarcină electrică ρ și a curentului electric, adică, a sarcinii în mișcare, de densitate $\mathbf{J}$.

Prima ecuație este *legea* lui Faraday a *inducției*. A doua exprimă dependența cîmpului magnetic de densitatea *curentului de deplasare*, sau rată de variație a cîmpului electric, și de densitatea *curentului de conducție*, sau viteza de mișcare a sarcinii. A treia ecuație este echivalentă cu legea lui Coulomb. A patra ecuație exprimă că nu există surse de cîmp magnetic *cu excepția* curenților. Vom avea mai multe de spus despre acest aspect al Naturii în capitolul 10.

Notați că lipsa de simetrie în aceste ecuații, față de **B** și **E**, este în întregime datorită prezenței sarcinii electrice și curentului electric de conducție. În spațiul vid, termenii cu ρ și $\mathbf{J}$ sînt zero, și ecuațiile lui Maxwell devin

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

Aici termenul de curent de deplasare este cu totul important. Prezența sa, alături de analogul său în prima ecuație, implică posibilitatea *undelor electromagnetice*. Recunoscînd aceasta, Maxwell a continuat să dezvolte cu succes strălucit o teorie electromagnetică a luminii. Veți explora fizica undelor, și în particular a undelor luminoase, în volumul III. Putem arăta chiar acum că o perturbație electromagnetică în deplasare cu viteza c este compatibilă cu ecuațiile lui Maxwell. Pentru a face aceasta, vom descrie un aranjament foarte simplu de cîmpuri electrice și magnetice care reprezintă

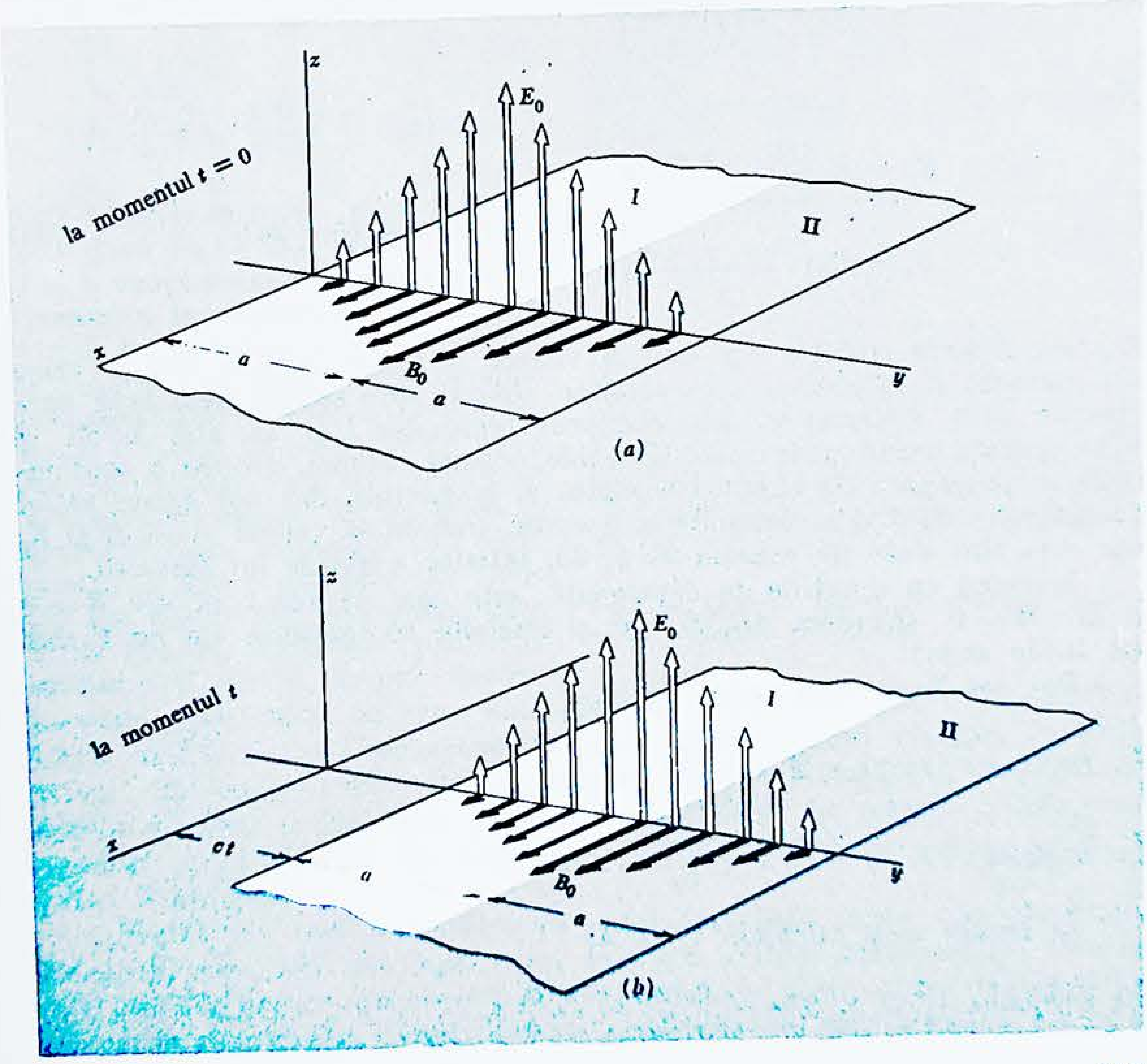
o perturbaţie în deplasare, şi apoi vom arăta că aceste cîmpuri satisfac toate ecuaţiile lui Maxwell, *ecuaţia* 91.

La momentul de timp $t = 0$, există, presupunem, un cîmp electric în regiunea dintre planele $y = 0$ şi $y = 2a$. Această intensitate a cîmpului **E** aré numai o componentă z, şi componenta sa z depinde numai de y, în următorul fel:

$$E_z = E_0 \frac{y}{a} \quad (0 \leqslant y \leqslant a)$$
$$\text{(la timpul } t = 0\text{).} \qquad (92)$$
$$E_z = E_0 \frac{2a - y}{a} \quad (a \leqslant y \leqslant 2a)$$

După cum se indică în figura 7.33, *a*, aceasta descrie o distribuţie în formă de „fronton“ a intensităţii cîmpului, maximă în centru în $y = a$ şi descrescînd linear pînă la zero în $y = 0$ şi $y = 2a$. Pentru y dat, cîmpul

Fig. 7.33. O configuraţie particulară de cîmpuri electrice şi magnetice, presupusă în deplasare cu viteza c în direcţia *y*. Cîmpurile sînt arătate în *(a)* la timpul $t = 0$ şi în *(b)* la un timp ulterior. Aceste cîmpuri vor satisface ecuaţiile lui Maxwell dacă $B_0 = E_0/c$. De notat orientarea relativă între **E**, **B** şi direcţia de deplasare, $\hat{y}$.



este acelaşi pentru toţi x şi z. Adică, avem cîmp electric în toată regiunea dintre două plane paralele, deşi arătăm în figură vectori numai pe axa y. Porţiunile umbrite însemnate I şi II se află în interiorul acestor plane. Oriunde în afară, adică, pentru $y = 0$ şi $z = 2a$, cîmpul electric este zero la acest moment de timp. La acelaşi timp, în această regiune din spaţiu există şi un cîmp magnetic. El are doar o componentă x, dată de

$$\left.\begin{aligned} B_x &= B_0 \frac{y}{a} \qquad (0 \leqslant y \leqslant a) \\ B_x &= B_0 \frac{2a - y}{a} \quad (a \leqslant y \leqslant 2a) \end{aligned}\right\} \text{(la momentul } t = 0). \tag{93}$$

Aceste cîmpuri le-am inventat pur şi simplu. Să facem acum configuraţia de cîmp să se deplaseze în direcţia y cu viteza c, păstrîndu-şi forma. O putem face scriind ecuaţii după cum urmează:

Regiunea I:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_0\left(\frac{y - ct}{a}\right) \\ B_x &= B_0\left(\frac{y - ct}{a}\right) \end{aligned}\right\} \quad (ct \leqslant y \leqslant ct + a). \tag{94}$$

Regiunea II:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_0\left(\frac{2a - y + ct}{a}\right) \\ B_x &= B_0\left(\frac{2a - y + ct}{a}\right) \end{aligned}\right\} \quad (ct + a \leqslant y \leqslant ct + 2a). \tag{95}$$

Aceasta descrie situaţia aşa cum o vedem în figura 7.33, *b*, sau la orice alt moment t. Regiunea care conţine cîmpul este simplu deplasată spre dreapta prin distanţa ct. În interiorul regiunilor I şi II, atît **E** cît şi **B** au aceeaşi formă ca înainte. Ecuaţiile noastre, atunci, descriu o configuraţie în propagare de cîmpuri electrice şi magnetice, dar pot exista astfel de cîmpuri? Pentru a răspunde la aceasta, trebuie să vedem dacă **E** şi **B**, aşa cum sînt date de ecuaţia 94 şi 95, satisfac ecuaţiile lui Maxwell.

Începînd cu ecuaţiile de divergenţă, este uşor de văzut că div $\mathbf{E} = 0$ şi div $\mathbf{B} = 0$. (Evident $\partial E_z/\partial z = 0$: şi celelalte componente ale lui **E** sînt ele însile zero.)

Dar rot **E** nu este zero:

$$\begin{aligned} &\text{În } \textit{Regiunea I}: \nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}}. \\ &\text{În } \textit{Regiunea II}: \nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{96}$$

În acelaşi mod calculăm $\nabla \times \mathbf{B}$:

$$\text{În Regiunea I}: \nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}}.$$

În Regiunea II:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{z}}. \qquad (97)$$

Derivatele parţiale faţă de t sînt:

În *Regiunea I:*

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a}E_0\hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a}B_0\hat{\mathbf{x}}.$$

În *Regiunea II:*

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{a}E_0\hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a}B_0\hat{\mathbf{x}}. \qquad (98)$$

Cîmpurile vor satisface ecuaţiile „inducţiei" în regiunea I, dacă

$$\frac{E_0}{a}\hat{\mathbf{x}} = -\left(-\frac{c}{a}B_0\hat{\mathbf{x}}\right)$$

şi (99)

$$-\frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c^2}\left(-\frac{c}{a}E_0\hat{\mathbf{z}}\right).$$

Într-adevăr, acestea sînt îndeplinite dacă $E_0 = cB_0$. Ecuaţiile conduc la exact aceeaşi condiţie pentru cîmpurile în regiunea *I*. Exact în vîrful frontonului, şi de asemenea la fiecare capăt, există singularităţi matematice în cîmpurile alese. Pentru a fi siguri că ecuaţiile de cîmp sînt satisfăcute *peste tot*, trebuie să vedem că nu există nici un necaz în aceste puncte. Nu există nici unul, pentru că **E** şi **B** sînt *continue* acolo (un salt abrupt sau discontinuitate, în **E** sau **B**, nu ar fi posibil în spaţiul gol). Astfel cîmpul electromagnetic particular pe care l-am descris, care reprezintă o undă călătoare, satisface toate ecuaţiile de cîmp, dacă cîmpul electric, în volţi/metru este egal cu de c ori intensitatea cîmpului magnetic, în tesla, în acelaşi moment şi loc. Este esenţial ca **E** şi **B** să fie perpendiculare unul pe altul şi pe direcţia de deplasare — altfel ecuaţiile de cîmp nu ar fi putut fi îndeplinite.

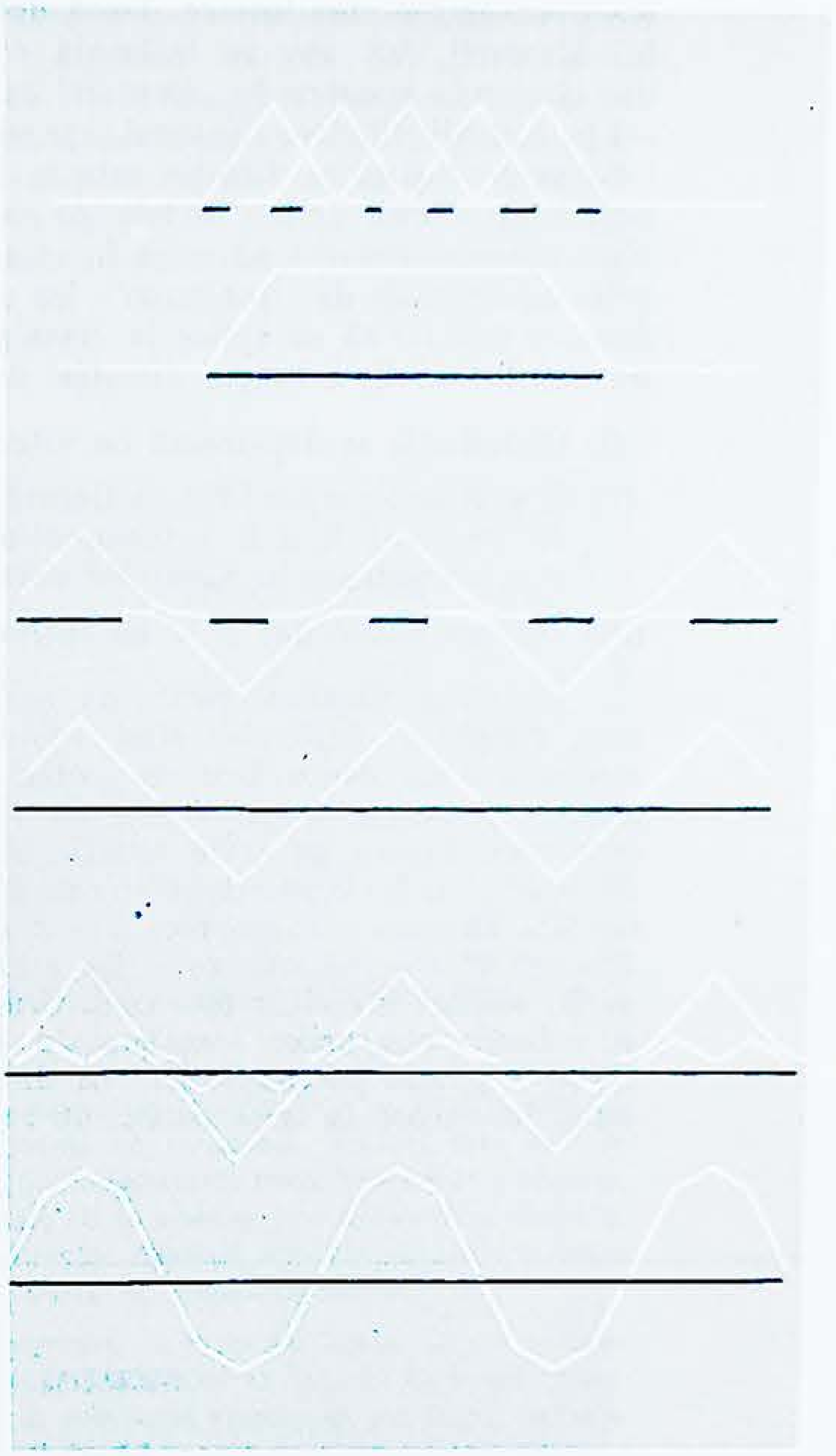


Fig.7.34. Diverse forme de undă făcute prin superpunere de „frontoane".

„Frontonul" nostru mişcător vă poate surprinde ca un exemplu destul de special de undă. De fapt, acest exemplu simplu dezvăluie tot ceea ce este esenţial despre *orice* undă electromagnetică. Doar avem nevoie să ne gîndim la *superpoziţie*. După cum am accentuat frecvent, ecuaţiile cîmpului

electromagnetic sînt lineare. Dacă două seturi de cîmpuri satisfac ecuațiile lui Maxwell, tot așa se întîmplă cu suma lor. Putem avea orice număr din cîmpurile noastre de „fronton" care se propagă prin spațiu, în aceeași, ori în direcții diferite. (Natural, cîmpurile nu ne interesează cum sînt orientate axele — și orice direcție este la fel de bună ca și axa y.) Figura 7.34 sugerează cîteva dintre undele pe care le-ați putea face din „frontoane". Este aproape evident că *orice* funcție ar putea fi exprimată oricît de bine prin superpoziție de „frontoane". De aceea, ceea ce am învățat despre unda fronton trebuie să se aplice la orice undă în care **E** și **B** sînt funcții doar de coordonate de-a lungul direcției de mișcare. Aceste fapte generale sînt:

(i) Distribuția se deplasează cu viteza c, cu formă neschimbătoare

(ii) **E** și **B** sînt perpendiculare fiecare pe celălalt și pe direcția de deplasare cu vectorul $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ totdeauna orientat în direcția de deplasare, așa cum se petrece în exemplul nostru

(iii) Într-un punct dat și la un moment dat, $\mathbf{E} = c\ \mathbf{B}$.

Un cîmp electromagnetic cu aceste proprietăți se transformă într-un mod simplu și rezonabil cînd schimbăm sistemele de coordonate. În capitolul 6 am dedus formule pentru transformările Lorentz ale cîmpurilor electric și magnetic (ec. 6.58). Să folosim rezultatele din Problema 6.11, care erau bazate pe acele ecuații, după care cele două cantități scalare, $E^2 - B^2 c^2$ și $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ rămîn *invariante* într-o transformare la un alt referențial inerțial. În acest caz, deoarece $E = c\ B$ în orice punct, cantitatea invariantă $E^2 - c^2 B^2$ are valoarea zero. De asemenea, deoarece **E** este perpendicular pe **B**, celălalt invariant este zero. Urmează că în orice alt sistem intensitatea și inducția cîmpurilor transformate **E** și **B** diferă în mărime printr-un factor c și sînt perpendiculare ca direcție. O undă luminoasă arată ca o undă luminoasă în orice sistem de referință.

PROBLEME

7.1. Care este forța electromotoare maximă indusă într-o bobină de 4000 de spire, rază medie 12 cm, în rotație cu 30 de revoluții pe secundă în cîmpul magnetic al pămîntului unde intensitatea cîmpului este 5×10^{-5} tesla?

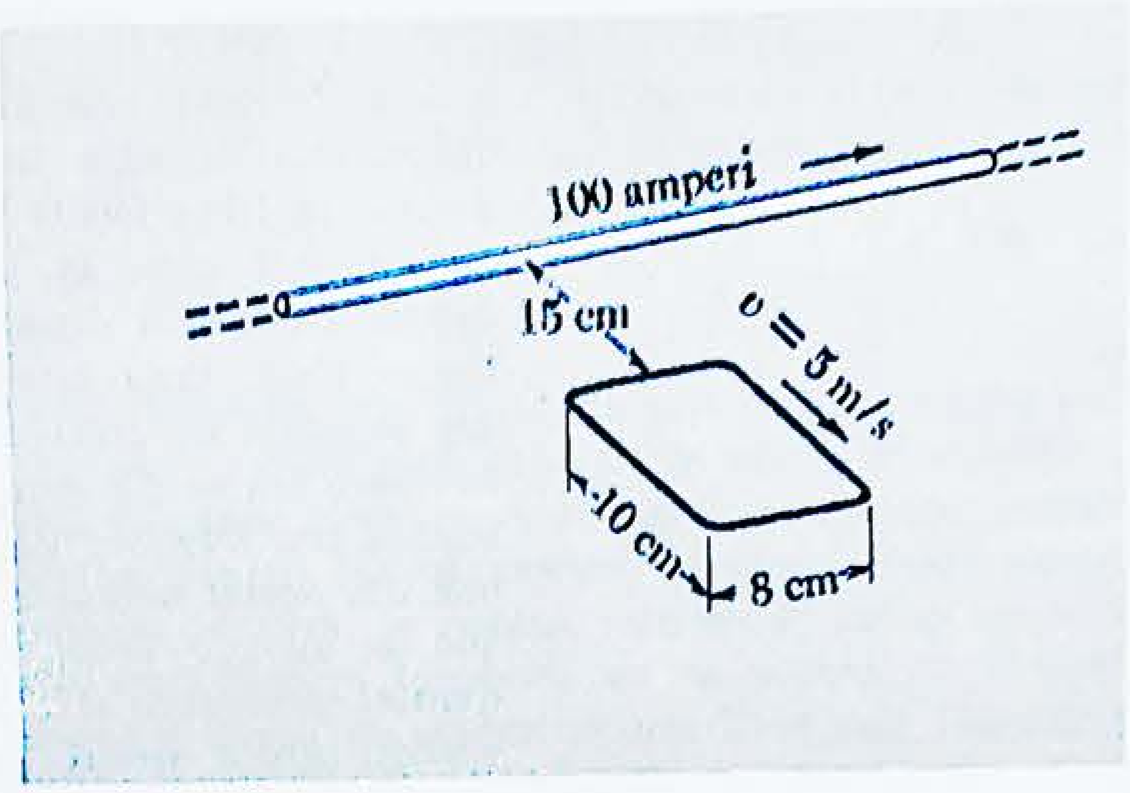
R. 1,70 volt

7.2. O buclă dreptunghiulară se mișcă printr-un cîmp magnetic astfel încît forța electromotoare este, și rămîne zero. Descrieți modurile în care bucla s-ar putea mișca.

Relație între schimbarea de flux și transferul de sarcină.

7.3. O bobină în formă de inel cu N spire și arie A este situată în cîmpul unui magnet. Ea este conectată la un circuit exterior printr-o pereche de conductori răsuciți. Rezistența circuitului, incluzînd bobina însăși este R. Să presupunem că fluxul prin bobină este schimbat

într-un mod oarecare de la valoarea staționară inițială Φ_i la o valoare staționară finală Φ_f. Arătați că sarcina totală Q care trece prin circuit, drept rezultat, este independentă de *viteza* de variație a fluxului. O bobină ca aceasta este adesea folosită pentru a măsura intensitatea cîmpului într-un magnet. Să presupunem că bobina este situată cu planul ei perpendicular pe **B**. Care este relația dintre B, NA, R și sarcina Q cînd bobina este rotită cu 90°? cu 180°?



Problema 7.4

7.4. Calculați forța electromotoare din bucla în mișcare din figură în momentul la care este în poziția arătată acolo. Presupuneți că rezistența bobinei este atît de mare încît efectul curentului în bucla însăși este neglijabil. Estimați în mare cît de mare ar fi o rezistență suficientă, în această privință. Indicați direcția în care ar trece curentul prin buclă, la momentul arătat.

Verificarea conservării energiei.

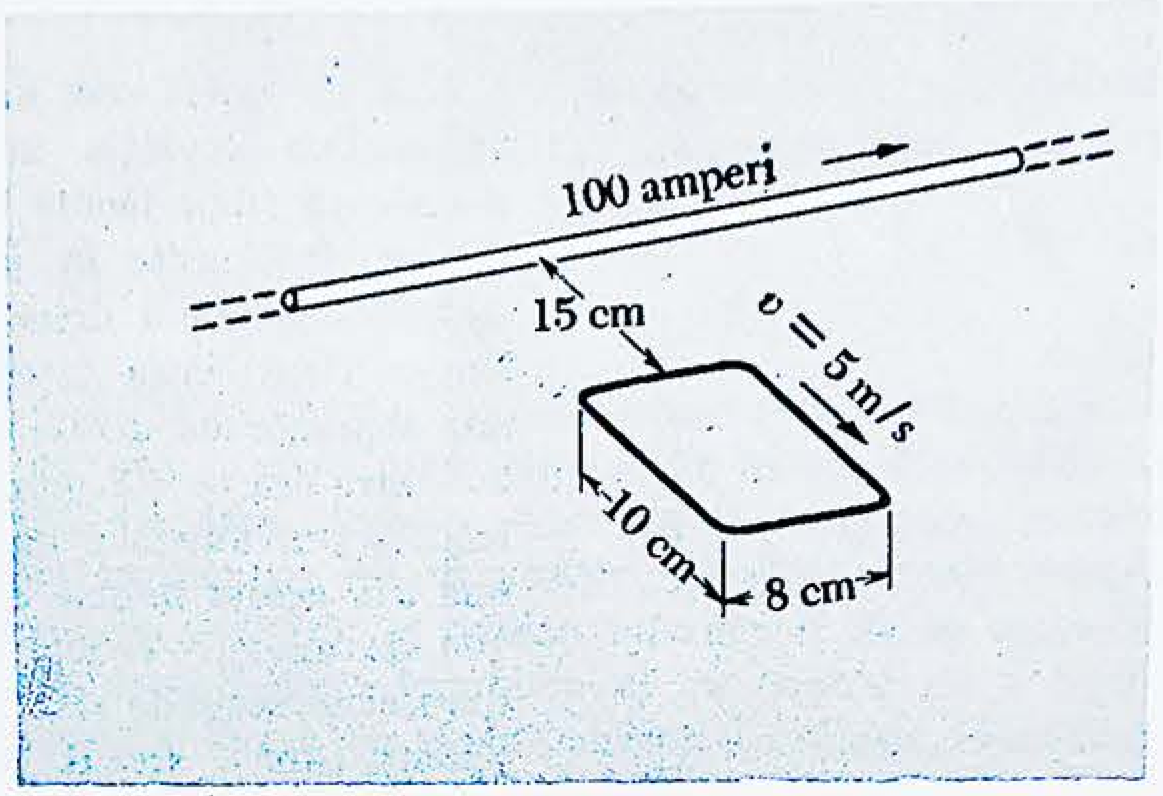
7.5. Să presupunem că bucla din figura 7.6 are o rezistență R. Arătați că oricare ar fi acel ceva care trage bucla cu viteză constantă efectuează un lucru mecanic în intervalul dt care se acordă exact cu energia dirijată în rezistență în acest interval, presupunînd că auto-inductanța buclei se poate neglija. Care este sursa energiei în figura 7.14 unde bucla este staționară?

7.6. Depinde prezicerea unei variații sinusoidale simple a forței electromotoare pentru bucla din figura 7.13 de faptul că bucla este dreptunghiulară, de uniformitatea cîmpului magnetic, sau de amîndouă? Explicați. Puteți sugera un aranjament cu o buclă rotitoare și bobine staționare care să dea o t.e.m. nesinusoidală? Schițați curba tensiune — timp pe care v-ați aștepta să o vedeți la osciloscop, cu acel aranjament.

Autoinductanța unui solenoid lung.

7.7. Calculați autoinductanța unui solenoid cilindric 10 cm în diametru și 2 metri lung. Are un singur strat de înfășurare conținînd un total de 1200 spire. Presupuneți

într-un mod oarecare de la valoarea staționară inițială Φ_i la o valoare staționară finală Φ_f. Arătați că sarcina totală Q care trece prin circuit, drept rezultat, este independentă de *viteza* de variație a fluxului. O bobină ca aceasta este adesea folosită pentru a măsura intensitatea cîmpului într-un magnet. Să presupunem că bobina este situată cu planul ei perpendicular pe **B**. Care este relația dintre B, NA, R și sarcina Q cînd bobina este rotită cu 90°? cu 180°?



Problema 7.4

7.4. Calculați forța electromotoare din bucla în mișcare din figură în momentul la care este în poziția arătată acolo. Presupuneți că rezistența bobinei este atît de mare încît efectul curentului în bucla însăși este neglijabil. Estimați în mare cît de mare ar fi o rezistență suficientă, în această privință. Indicați direcția în care ar trece curentul prin buclă, la momentul arătat.

Verificarea conservării energiei.

7.5. Să presupunem că bucla din figura 7.6 are o rezistență R. Arătați că oricare ar fi acel ceva care trage bucla cu viteză constantă efectuează un lucru mecanic în intervalul dt care se acordă exact cu energia dirijată în rezistență în acest interval, presupunînd că auto-inductanța buclei se poate neglija. Care este sursa energiei în figura 7.14 unde bucla este staționară?

7.6. Depinde prezicerea unei variații sinusoidale simple a forței electromotoare pentru bucla din figura 7.13 de faptul că bucla este dreptunghiulară, de uniformitatea cîmpului magnetic, sau de amîndouă? Explicați. Puteți sugera un aranjament cu o buclă rotitoare și bobine staționare care să dea o t.e.m. nesinusoidală? Schițați curba tensiune — timp pe care v-ați aștepta să o vedeți la osciloscop, cu acel aranjament.

Autoinductanța unui solenoid lung.

7.7. Calculați autoinductanța unui solenoid cilindric 10 cm în diametru și 2 metri lung. Are un singur strat de înfășurare conținînd un total de 1200 spire. Presupuneți

într-o primă aproximaţie că în interiorul solenoidului cîmpul magnetic este uniform pînă la capete. Estimaţi mărimea erorii pe care o veţi introduce prin aceea. Este adevăratul L mai mare sau mai mic decît rezultatul dumneavoastră aproximativ?

7.8. Cum aţi înfăşura o bobină de rezistenţă astfel încît autoinductanţa ei să fie *mică*?

Inductanţa mutuală a buclelor circulare coaxiale.

7.9. Deduceţi o formulă aproximativă pentru inductanţa mutuală a două inele circulare de aceeaşi rază a, montate ca roţi pe acelaşi ax cu centrele la b cm depărtare. Folosiţi o aproximaţie bună pentru $b \gg a$.

Reconstituire istorică implicînd inductanţa mutuală.

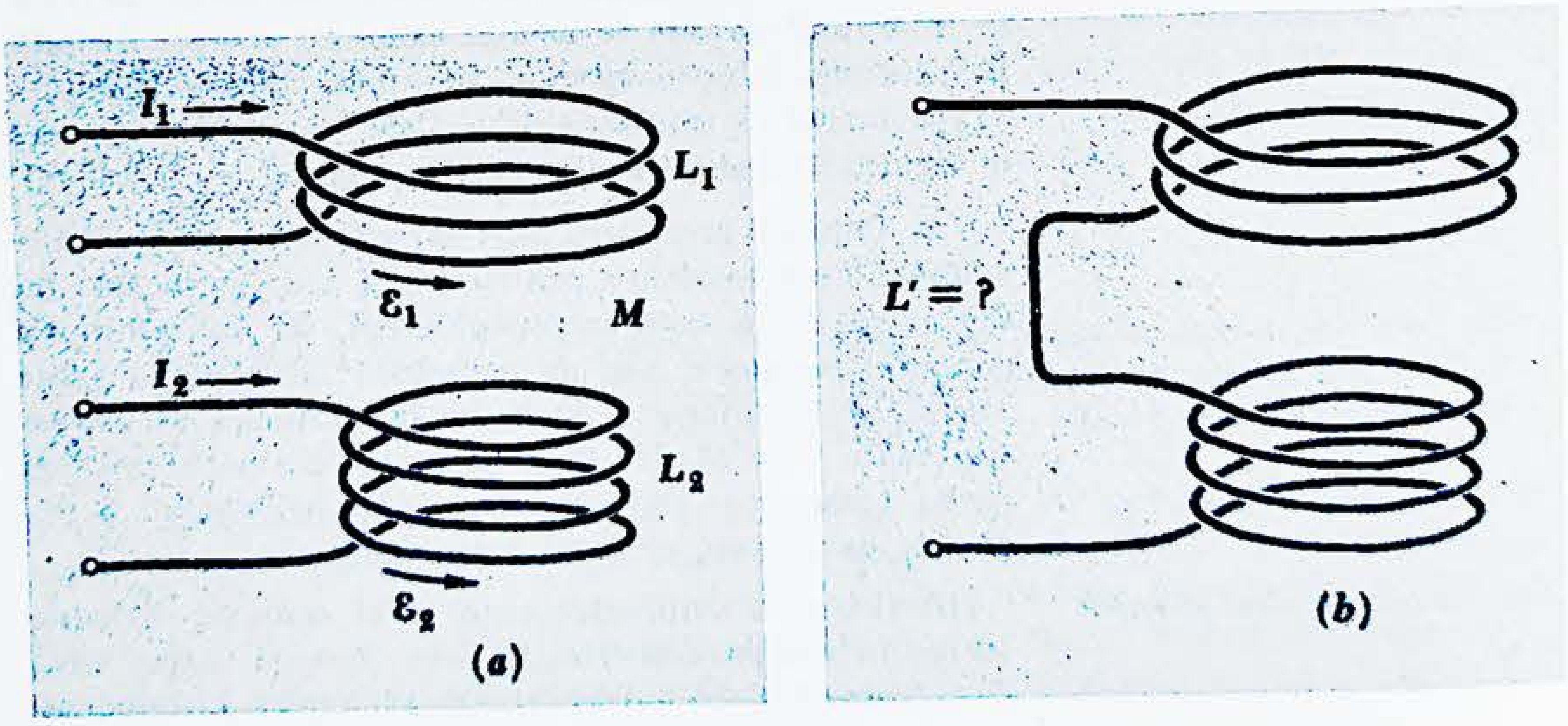
7.10. Bobinele care au produs întîia oară o uşoară dar detectabilă deviaţie în detectorul lui Faraday, el le descrie ca fiind făcute din 62 metri de sîrmă de cupru fiecare, înfăşurate în jurul unui bloc mare de lemn. Spirele celei de-a doua înfăşurări (adică, bobine cu un singur strat) erau interpuse printre acelea ale primei, dar separate de acestea prin izolaţie. Diametrul sîrmei de cupru era de 1,2 mm. El nu dă dimensiunile blocului lemnos sau numărul de spire în bobine. În experienţă, una din aceste bobine a fost conectată la o „baterie de 100 de anozi". Vedeţi dacă puteţi face o estimare a duratei în secunde şi a mărimii în amperi a pulsului de curent care a trecut prin galvanometrul său.

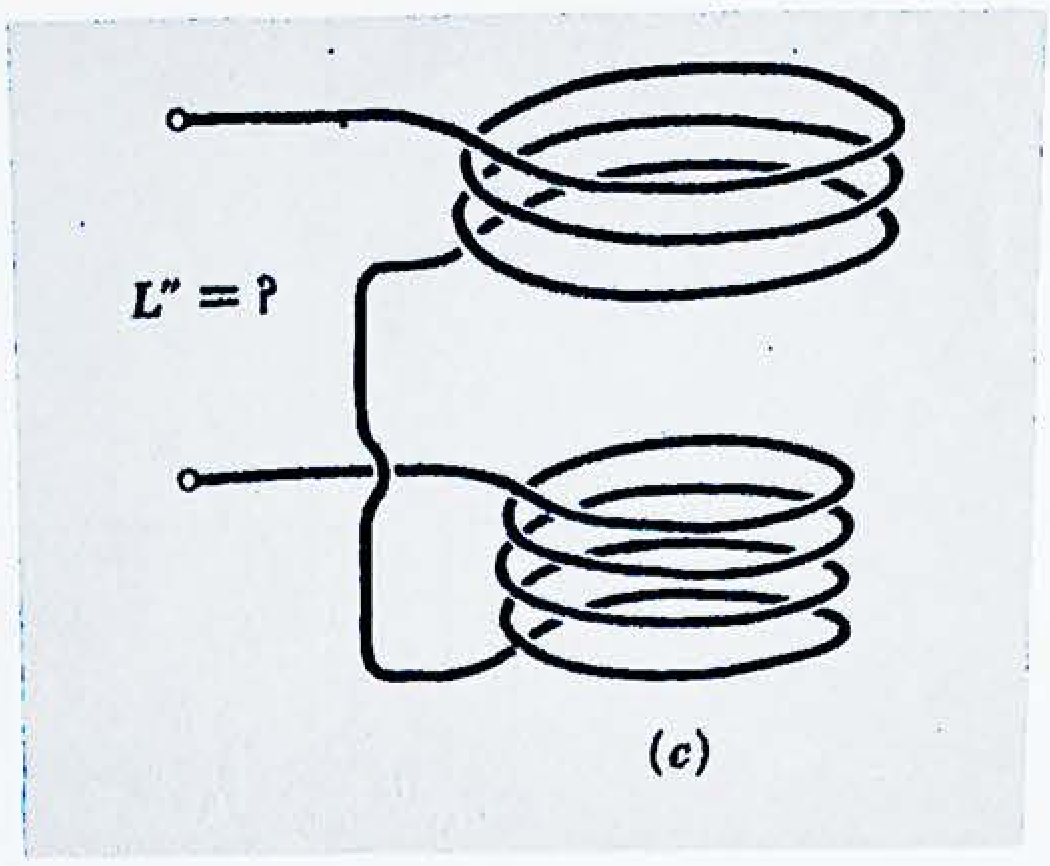
Inductanţa combinată a bobinelor în serie, şi o regulă generală despre L şi M.

7.11. Partea (a) a figurii arată două bobine cu autoinductanţe L_1 şi L_2. În poziţia relativă arătată acolo inductanţa mutuală este M. Direcţia pozitivă a curentului şi direcţia pozitivă a forţei electromotoare în fiecare bobină sînt definite de către săgeţile din figură. Ecuaţiile care leagă curenţii şi forţele electromotoare sînt:

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \underset{?}{\pm} M \frac{dI_2}{dt} \text{ şi } \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \underset{?}{\pm} M \frac{dI_1}{dt}.$$

Problema 7.11, *a*, *b*





Problema 7.11, c

Fiind dat că M este totdeauna luat ca o constantă pozitivă, cum trebuie alese semnele în aceste ecuații? Ce se întîmpla dacă alegeam, cum am fi putut face, cealaltă direcție pentru curent pozitiv, și pentru forță electromotoare pozitivă, în bobina inferioară? Acum conectați cele două bobine împreună ca în partea (*b*) a figurii pentru a forma un singur circuit. Care este inductanța L' a acestui circuit, exprimată în funcție de L_1, L_2 și M? Care este inductanța L'' a circuitului format prin conectarea bobinelor ca în (*c*)? Care circuit, (*b*) sau (*c*), are inductanța mai mare? Considerînd că autoinductanța oricărui circuit trebuie să fie o mărime pozitivă (de ce nu ar putea fi negativă?), încercați dacă puteți trage o concluzie generală, valabilă pentru orice pereche imaginabilă de bobine, privitor la mărimea relativă a lui L_1, L_2 și M.

Problemă astrofizică implicînd energia în cîmpul magnetic.

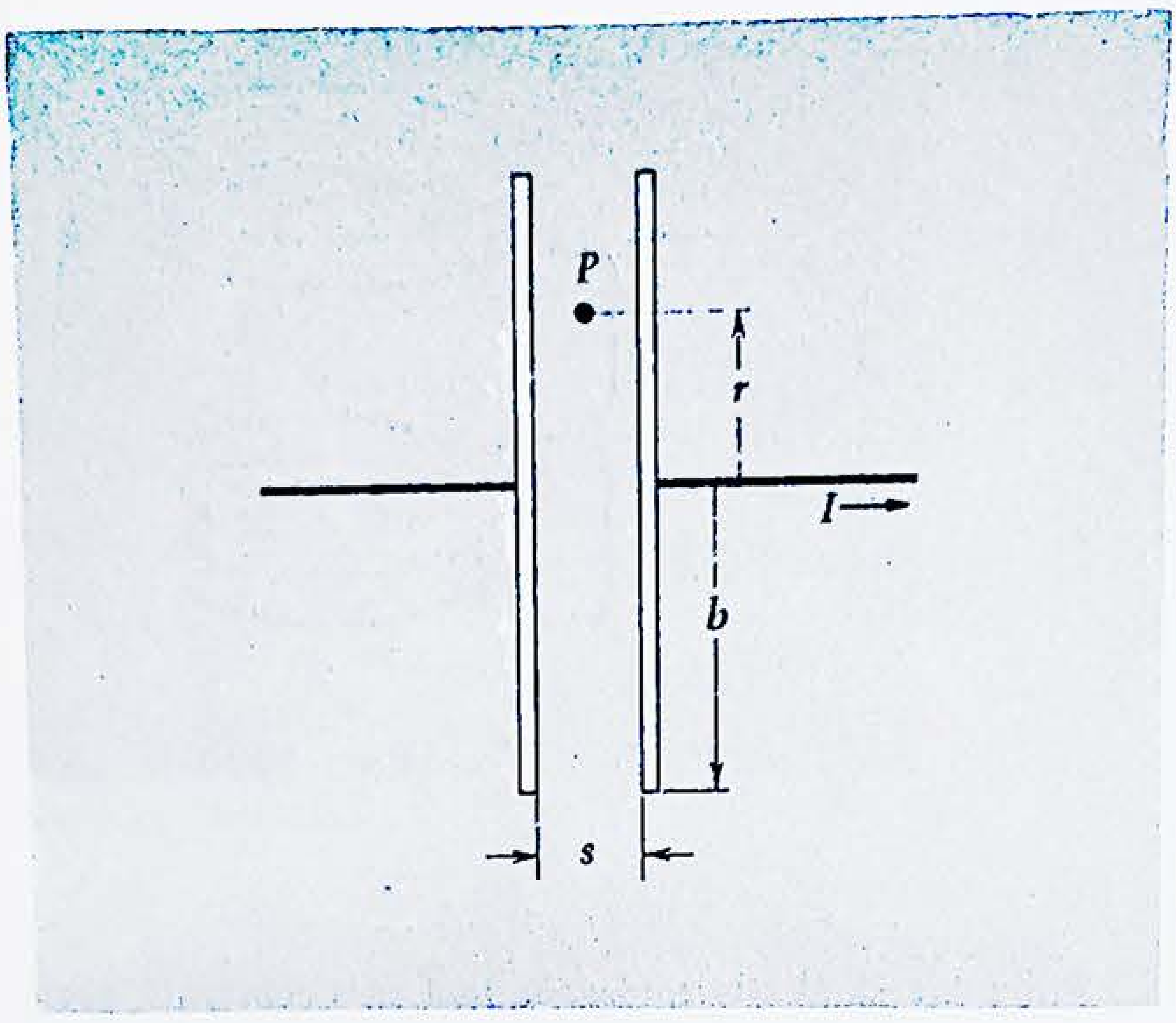
7.12. În spațiul interstelar din Galaxia noastră se crede că în general cîmpul magnetic este de ordinul de mărime a 10^{-10} tesla. Materia în acest spațiu nu este nimic mai mult decît atomii de hidrogen, aproximativ unul pe centimetru cub, cu viteze termice de ordinul a 10^5 cm/s. Cum se compară cantitatea de energie înmagazinată în cîmpul magnetic, într-un volum dat, cu aceea înmagazinată ca energie cinetică a materiei?

Studiul unui circuit LR.

7.13. O bobină cu rezistența 0,01 ohm și autoinductanță 0,50 milihenry, este conectată la o baterie de 12 volți cu rezistența internă neglijabilă. După cît timp de la închiderea comutatorului, va crește curentul la 90 procente din valoarea sa finală? Cîtă energie, în joule, este înmagazinată în cîmpul magnetic? Cît de multă energie a fost extrasă din baterie pînă la acel moment?

Curentul de deplasare.

7.14. Cîmpul magnetic înăuntrul condensatorului în descărcare arătat în figura 7.27 poate fi calculat în



Problema 7.14

principiu prin sumarea contribuţiilor de la toate elementele curentului de conducţie, cum s-a indicat în figura 7.31. Aceea ar putea fi o treabă lungă. Dacă putem presupune simetrie în jurul acestei axe, este mult mai uşor a găsi inducţia **B** într-un punct prin folosirea legii integrale

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2}\int\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}\right) \cdot d\mathbf{a}$$

aplicată pe o traiectorie circulară prin punct. Avem nevoie numai să ştim curentul total cuprins de această traiectorie. Folosiţi aceasta pentru a găsi cîmpul în P, care este la mijlocul drumului dintre plăcile condensatorului şi la o distanţă r de axa de simetrie. (Comparaţi aceasta cu calculul cîmpului electric indus **E**, în exemplul din figura 7.16.)

R. $2\pi r B = \frac{I}{\varepsilon_0 c^2} \frac{r^2}{b^2}$, $B = \frac{Ir}{2\pi\varepsilon_0 c^2 b^2}$.

Ecuaţiile lui Maxwell.

7.15. Arătaţi că următorul cîmp electromagnetic satisface ecuaţiile lui Maxwell:

$$E_x = E_y = 0, E_z = \cos(y - ct)$$

$$B_x = \frac{1}{c}\cos(y - ct),\ B_y = B_z = 0.$$

Capitolul 8

Circuite de curent alternativ

8.1. Un circuit rezonant 290
8.2. Curentul alternativ 294
8.3. Reţele de curent alternativ 301
8.4. Admitanţa şi impedanţa 303
8.5. Puterea şi energia în circuite de curent alternativ 306
Probleme 310

8.1. UN CIRCUIT REZONANT

Un circuit conţinînd inductanţă, capacitate şi rezistenţă a fost unul dintre exemplele de oscilator armonic amortizat discutate în vol. I, cap. 7. Acum putem vedea în mod precis ceea ce se petrece în acel sistem. Schema de circuit din figura 8.1 reprezintă un astfel de circuit *RLC* serie.

Fie Q sarcina, la momentul t, pe condensatorul din acest circuit. Diferenţa de potenţial, sau tensiunea pe condensator, este U, care este aceeaşi ca tensiunea de-a lungul combinaţiei-serie de inductanţă L şi rezistenţă R. Convenim ca U să fie pozitiv cînd placa superioară a condensatorului este încărcată pozitiv, şi definim direcţia pozitivă a curentului prin săgeata din figura 8.1. Cu semnele alese astfel, relaţiile care leagă sarcina Q, curentul I şi tensiunea de-a lungul condensatorului sînt

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad Q = CU, \quad U = L\frac{dI}{dt} + RI. \tag{1}$$

Vrem să eliminăm două din cele trei variabile, Q, I şi U. Din primele două ecuaţii obţinem $I = -\mathrm{C}dU/dt$ şi a treia ecuaţie devine

$$U = -LC(d^2U/dt^2) - RC\,(dU/dt),$$

sau

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dU}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)U = 0. \tag{2}$$

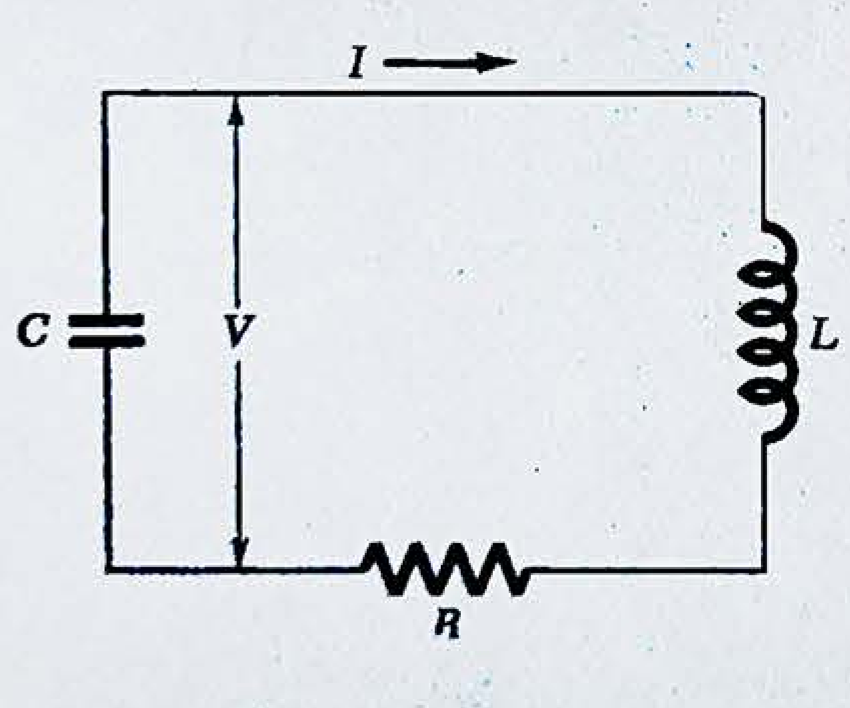


Fig. 8.1. Un circuit *RLC* serie.

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Vom încerca o soluţie de forma

$$U = A\,e^{-\alpha t}\cos\omega t \tag{3}$$

unde A, α şi ω sînt constante. Derivatele acestei funcţii sînt

$$\frac{dU}{dt} = A\,e^{-\alpha t}(-\alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t) \tag{4}$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = A\,e^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\,\alpha\omega\sin\omega t)]. \tag{5}$$

Introducînd în ecuaţia 2, simplificăm factorul comun $Ae^{-\alpha t}$ şi rămînem cu

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2 \alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

$$+ \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0. \tag{6}$$

Aceasta va fi îndeplinită la toţi t dacă, şi numai dacă, coeficienţii lui $\sin \omega t$ şi $\cos \omega t$ sînt ambii zero. Adică, trebuie să cerem:

$$2 \alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \tag{7}$$

şi

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \tag{8}$$

Prima dintre aceste ecuaţii dă o condiţie pentru α:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \tag{9}$$

în timp ce a doua ecuaţie cere ca

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \tag{10}$$

Deoarece constanta ω este un număr real, ω^2 nu poate fi negativ. De aceea reuşim să obţinem o soluţie de forma presupusă în ecuaţia 3 numai dacă $R^2/4L^2 \leqslant 1/LC$. De fapt tocmai cazul de „amortizare uşoară", adică, de rezistenţă mică, este acela pe care vrem să îl discutăm, astfel încît vom presupune că valorile lui R, L şi C din circuit sînt astfel încît inegalitatea $R < 2\sqrt{L/C}$ se observă.

Funcţia $A\, e^{-\alpha t} \cos \omega t$ nu este singura soluţie posibilă. $B\, e^{-\alpha t} \sin \omega t$ merge la fel de bine, cu aceleaşi condiţii, ecuaţia 9 şi ecuaţia 10, pentru α şi ω respectiv. Soluţia generală este suma acestora:

$$U(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \tag{11}$$

Constantele arbitrare A şi B ar putea fi potrivite pentru a îndeplini condiţii iniţiale. Aceasta nu este foarte interesant. Faptul că soluţia pentru un caz oarecare dat implică funcţia sinus ori funcţia cosinus, ori o superpoziţie, este o chestiune banală de potrivire a ceasului. Fenomenul esenţial este o oscilaţie sinusoidală amortizată.

Variaţia tensiunii cu timpul este arătată în figura 8.2, *a*. Desigur, aceasta nu se poate observa pentru tot timpul *trecut*. La un timp oarecare în trecut, circuitul trebuie să fi fost alimentat cumva cu energie, şi apoi lăsat să meargă. De exemplu, condensatorul putea fi încărcat, cu circuitul deschis, şi apoi conectat la bobină.

În figura 8.2, b scala timpului a fost mărită şi a fost adăugată curba punctată arătînd variaţia curentului I. Să luăm pentru U cosinusul amortizat, ecuaţia 3. Atunci curentul ca funcţie de timp este dat de

$$I = -C\frac{dU}{dt} = AC\,\omega\left(\sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos \omega t\right)e^{-\alpha t}. \tag{12}$$

Raportul α/ω este o măsură a amortizării. Dacă α/ω este foarte mic, au loc multe oscilaţii în timp ce amplitudinea descreşte numai puţin. Pentru figura 8.2 alegem un caz în care $\alpha/\omega \simeq 0{,}04$. Atunci termenul cosinus în ec. 12 nu contează prea mult. Tot ceea ce face, efectiv, este să deplaseze faza printr-un mic unghi, $\mathrm{tg}^{-1}(\alpha/\omega)$. Astfel oscilaţia curentului este defazat cu aproape un sfert de ciclu faţă de oscilaţia tensiunii.

Oscilaţia implică un transfer de energie înainte şi înapoi de la condensator la inductanţă, sau de la cîmpul electric la cîmpul magnetic. La timpii notaţi 1 în figura 8,2. b toată energia este în cîmpul electric. Un sfert de ciclu mai tîrziu, la 2, condensatorul este descărcat şi aproape toată această energie se găseşte în cîmpul magnetic al bobinei. Între timp, rezistenţa R a circuitului îşi ia partea, şi pe măsură ce oscilaţia continuă, energia care rămîne în cîmp se micşorează treptat.

Amortizarea relativă într-un oscilator este adesea exprimată dînd un număr numit Q. Acesta a fost introdus în discuţia generală a oscilatorilor armonici în volumul I, capitolul 7. Q (să nu fie confundat cu sarcina pe condensator!) este numit „factor de calitate". Cu cît amortizarea este mai mică, cu atît este mai mare numărul Q. Pentru un oscilator de frecvenţă ω, Q este raportul adimensional format după cum urmează:

$$Q = \omega\frac{\text{energia înmagazinată}}{\text{puterea medie disipată}}. \tag{13}$$

Sau poate preferaţi să vă reamintiţi că Q este numărul de radiani ai argumentului ωt (adică, de 2π ori numărul de ciclii) necesari pentru ca energia în oscilator să se micşoreze prin factorul $1/e$.

În circuitul nostru energia înmagazinată este proporţională cu U^2 sau I^2, şi de aceea, cu $e^{-2\alpha t}$. Energia scade prin $1/e$ în timpul $t = 1/2\alpha$, care acoperă $\omega/2\alpha$ radiani. Deci pentru circuitul nostru RLC

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}. \tag{14}$$

Ca o estimare în mare, care este Q pentru oscilaţia reprezentată în figura 8.2?

În mod limpede, cazul general pe care tocmai l-am studiat include cîteva cazuri speciale simple. Dacă $R = 0$ avem oscilatorul complet neamortizat, a cărui frecvenţă este dată de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{15}$$

În cea mai mare parte ne ocupăm de sisteme în care amortizarea este destul de mică pentru a fi neglijată în calcularea frecvenţei. Aşa cum va arăta problema 8.9, amortizarea are numai un efect de ordinul al doilea asupra lui ω.

Pentru completitudine trecem în revistă pe scurt ce se petrece în circuitul hiper-amortizat, în care $R > 2\sqrt{L/C}$. Ecuaţia 2 are atunci o

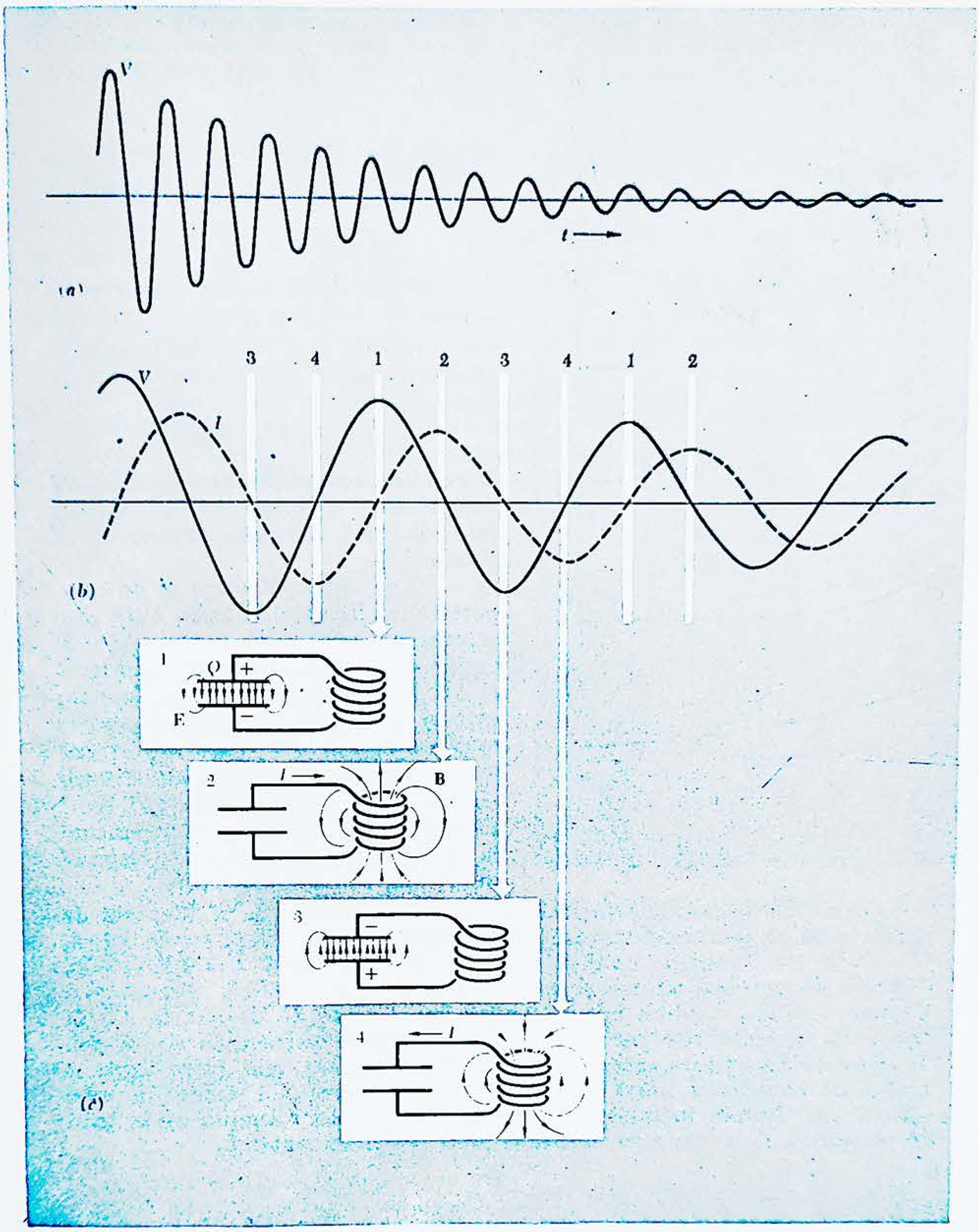


Fig. 8.2. *(a)* Oscilaţia sinusoidală amortizată a tensiunii în circuitul *RLC*.

(b) O parte din *(a)* cu scara temporală lărgită şi cuprinzînd reprezentarea curentului *I*.

(c) Transferul periodic al energiei de la cîmpul electric la cîmpul magnetic şi invers. Fiecare desen reprezintă situaţia la momente notate prin numărul corespunzător în *(b)*.

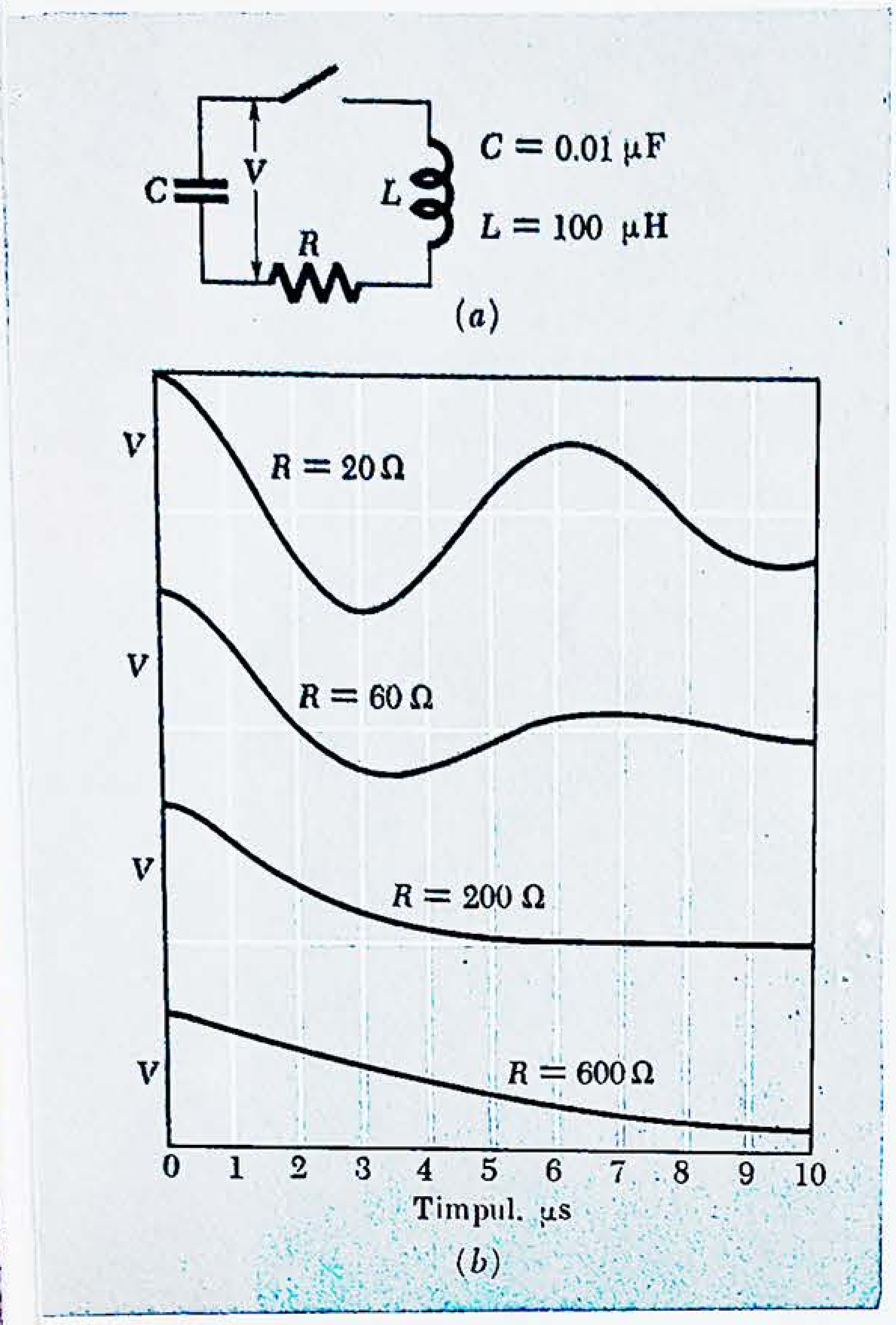


Fig. 8.3. *(a)* Cu condensatorul încărcat, se închide comutatorul la $t = 0$.
(b) Sînt arătate patru cazuri, dintre care unul, E = 200 ohmi, este cazul de amortizare critică.

soluție de forma $V = A\,e^{-\beta t}$ pentru două valori ale lui β, soluția generală fiind

$$U(t) = A\,e^{-\beta_1 t} + B\,e^{-\beta_2 t}. \quad (16)$$

Nu există oscilații, numai o descreștere monotonă. În cazul special al „amortizării critice", $R = 2\sqrt{L/C}$, $\beta_1 = \beta_2$ și soluția ecuației diferențiale, ec. 2, ia forma

$$U(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (17)$$

Aceasta este condiția, pentru L și C dați, în care energia totală din circuit este disipată cel mai repede (vezi Probl. 8.8).

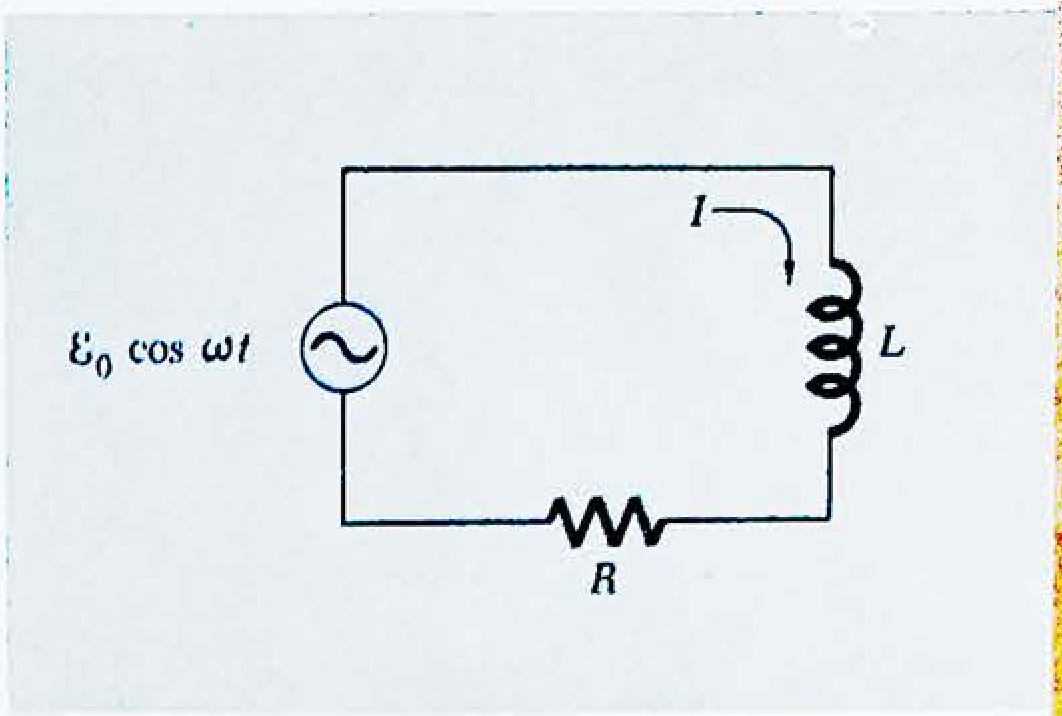
Puteți vedea tot acest șir de comportări în figura 8.3, unde $U(t)$ este reprezentat pentru două circuite preamortizate, un circuit critic-amortizat și un circuit hiperamortizat. Condensatorul și inductanța rămîn aceleași; este schimbată doar rezistența. Frecvența unghiulară naturală a acestui circuit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ este 10^6 sec^{-1} pentru acest circuit, corespunzînd la o frecvență în cicli pe secundă de $10^6/2\pi$, sau 159 kilocicli/s.

Circuitul este pornit prin încărcarea condensatorului la o diferență de potențial de, să spunem, 1 volt și închizînd apoi comutatorul la $t = 0$. Adică, $U = 1$ la $t = 0$ este o condiție inițială. De asemenea, $I = 0$ la $t = 0$, deoarece inductanța nu va permite curentului să crească, discontinuu. De aceea, cealaltă condiție inițială asupra lui U este $dU/dt = 0$, la $t = 0$. Observați că toate cele patru curbe de amortizare pornesc în același fel. În cazul de amortizare puternică ($R = 600$ ohmi), cea mai mare parte a curbei de amortizare arată ca descreșterea exponențială simplă a unui circuit RC. Numai începutul însuși unde curba este rotunjită astfel încît să pornească cu panta zero, trădează prezența inductanței L.

8.2. CURENTUL ALTERNATIV

Circuitul rezonant pe care tocmai l-am discutat nu conținea nici o sursă de energie și era de aceea destinat unei activități *tranzitorii*, o oscilație care trebuie mai devreme sau mai tîrziu să se stingă. Într-un circuit de curent alternativ ne ocupăm cu o *stare staționară*, un curent și o tensiune

Fig. 8.4. Un circuit cu inductanţă sub o tensiune electromotoare alternativă.



oscilînd sinusoidal fără schimbare de amplitudine. O forţă electromotoare oarecare acţionează sistemul.

Să aplicăm o forţă electromotoare $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ unui circuit conţinînd inductanţă şi rezistenţă. Am putea genera $\mathcal{E}$ printr-o maşină, schematic ca cea din figura 7.13, înzestrînd-o cu un motor care să rotească trunchiul la viteza unghiulară constantă ω. În figura 8.4 această forţă electromotoare este reprezentată ca fiind conectată în circuit. Vom neglija orice rezistenţă internă în generator, sau o vom include în R. Punem ca suma căderilor de potenţial peste elementele acestui circuit să egaleze forţa electromotoare $\mathcal{E}$, exact cum am făcut la deducerea ecuaţiei 7.61. Ecuaţia care controlează curentul este atunci:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \tag{18}$$

Acum poate exista o oarecare comportare tranzitorie, depinzînd de condiţiile iniţiale, adică, de cum şi cînd este conectat generatorul. Dar sîntem interesaţi numai în soluţia staţionară, cînd curentul este în oscilaţie la frecvenţa forţei exterioare, cu amplitudine şi faza necesare pentru a menţine ecuaţia 18 satisfăcută. Pentru a arăta că aceasta este posibil, să considerăm un curent descris de

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \tag{19}$$

Pentru a determina constantele I_0 şi φ, introducem aceasta în ecuaţia 18:

$$-LI_0\,\omega \sin(\omega t + \varphi) - RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \tag{20}$$

Funcţiile $\cos \omega t$ şi $\sin \omega t$ pot fi separate:

$$-LI_0\,\omega(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + $$
$$+ RI_0(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \tag{21}$$

Punînd coeficienţii lui $\cos \omega t$ şi $\sin \omega t$ separat egali cu zero,

$$-LI_0\,\omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0 \tag{22}$$

care dă

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}. \tag{23}$$

$$-LI_0\,\omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0 \tag{24}$$

care dă

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \sin \varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R} \tag{25}$$

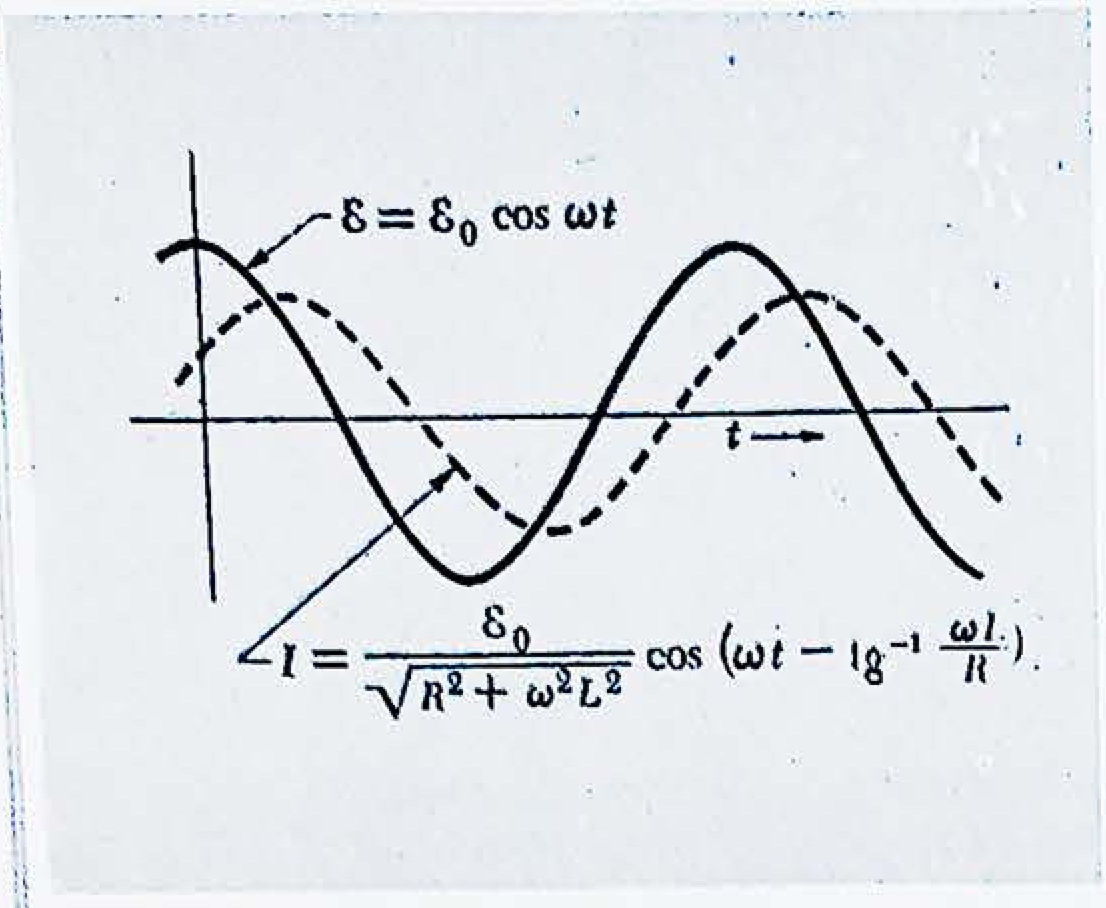


Fig. 8.5. Curentul I, în circuitul din fig. 8.4, reprezentat împreună cu tensiunea electromotoare ε în aceeaşi scară temporală. De notat diferenţa de fază.

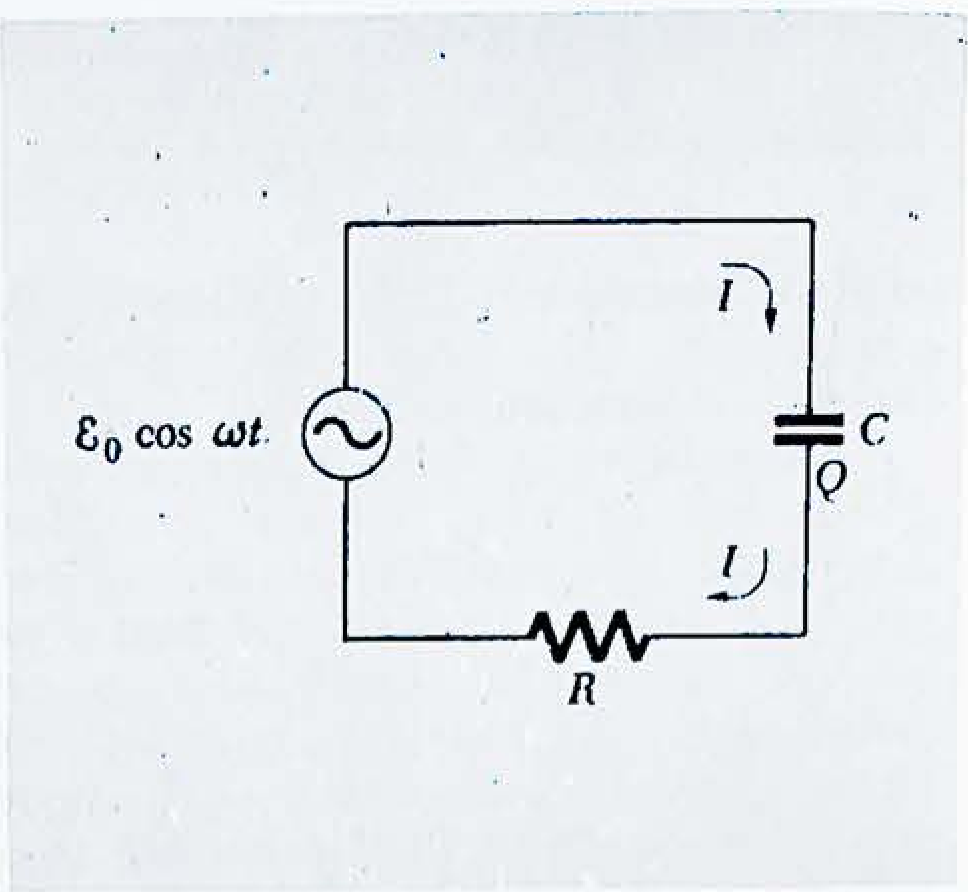


Fig. 8.6. O forţă electromotoare alternativă într-un circuit conţinînd rezistenţă şi capacitate.

sau deoarece

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ (din ecuaţia 23).} \tag{26}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \tag{27}$$

În figura 8.5 oscilaţiile lui $\mathcal{E}$ şi I sînt reprezentate pe acelaşi grafic. Deoarece φ este un unghi negativ, curentul îşi atinge maximul ceva *mai tîrziu* decît forţa electromotoare. Se spune „curentul rămîne în urma tensiunii într-un circuit inductiv". Cantitatea ωL care are dimensiunile de rezistenţă şi poate fi exprimată în ohmi este numită *reactanţă inductivă.*

Dacă înlocuim inductanţa L printr-un condensator C, ca în figura 86, avem un circuit controlat de ecuaţia

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \tag{28}$$

Considerăm soluţia staţionară

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{29}$$

Deoarece $I = -\,\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, avem

$$Q = -\int I \,\mathrm{d}t = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi). \tag{30}$$

De notat că trecînd de la I la Q prin integrare, nu se pune problema de a aduna o constantă de integrare, deoarece ştim că Q trebuie să oscileze simetric în jurul lui zero în starea staţionară.

Substituirea în ecuația 28 conduce la

$$\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \qquad (31)$$

Exact ca înainte, obținem condiții asupra lui φ și I_0 cerînd coeficienților lui $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$ să se anuleze separat. În acest caz, rezultatele sînt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} \qquad (32)$$

și

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}. \qquad (33)$$

Notați că unghiul de fază este acum pozitiv. Cum se spune, curentul „e înaintea tensiunii" într-un circuit capacitiv. Ce înseamnă aceasta este vizibil în graficul din figura 8.7.

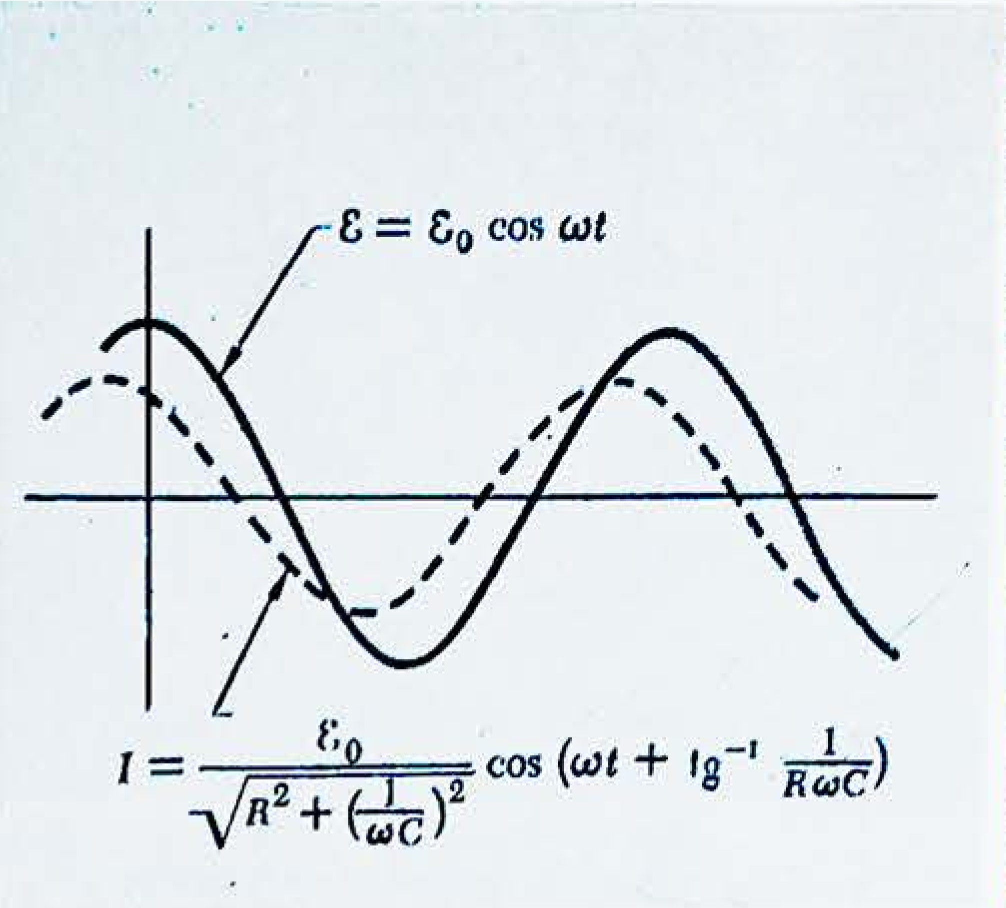


Fig. 8.7. Curentul în circuitul *RC*. De comparat defazajul aici cu defazajul în circuitul inductiv din fig. 8.5.

Matematic vorbind, funcția

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \qquad (34)$$

este o *integrală particulară* a ecuației diferențiale, ecuația 18. La aceasta se poate adăuga o *funcție complementară*, adică, orice soluție a ecuației diferențiale omogene

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0. \qquad (35)$$

Acum aceasta este tocmai ecuația 7.65, a cărei soluție am găsit-o, în § 7.9, ca fiind o funcție exponențială descrescătoare

$$I \sim \mathrm{e}^{-(R/L)t}.$$

Semnificația fizică este aceasta: O tranziție, determinată de niște condiții inițiale, este reprezentată de o componentă descrescătoare a lui $I(t)$ de forma ec. 36. După un timp $t \gg L/R$, aceasta se va fi anulat lăsînd numai oscilația sinusoidală staționară la frecvența de comandă, reprezentată de integrala particulară, ecuația 34.

Asemănarea rezultatelor pentru circuitul *RL* și circuitul *RC* sugerează o cale de a privi la inductanța și capacitatea în serie. Să presupunem că un curent alternativ $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ este făcut într-un mod oarecare să treacă printr-o astfel de combinație (arătată în fig. 8.8). Tensiunea de-a lungul bobinei, U_L, va fi

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -I_0\,\omega L \sin(\omega t + \varphi). \qquad (37)$$

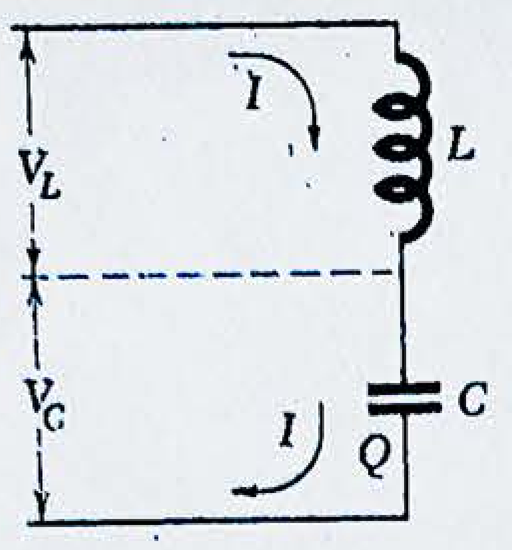


Fig. 8.8. Bobina şi condensatorul în serie sînt echivalente cu un element reactiv care este fie o bobină, fie un condensator după cum $\omega^2 LC$ este mai mare sau mai mic decît 1.

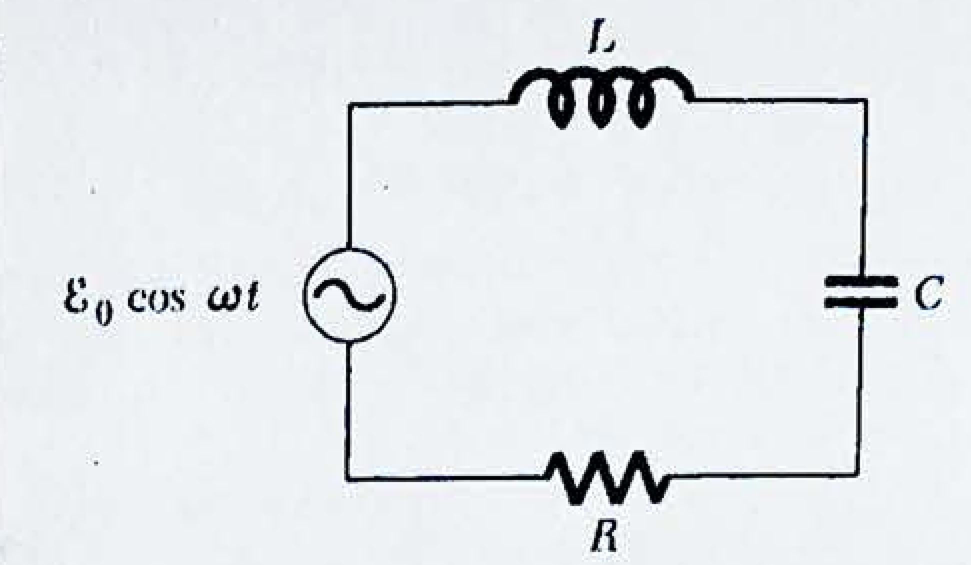


Fig. 8.9. Circuitul RLC acţionat de o forţă electromotoare sinusoidală.

Tensiunea U_C la bornele condensatorului, cu semnul compatibil cu semnul lui U_L, este

$$U_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I \, dt = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi). \tag{38}$$

Tensiunea pe combinaţie este atunci

$$U = U_L + U_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{39}$$

Pentru un ω *dat*, combinaţia este evident echivalentă cu un singur element, fie inductanţă fie capacitate, depinzînd de faptul dacă expresia $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ este pozitivă sau negativă. Să presupunem, de exemplu, că $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. Atunci combinaţia este echivalentă unei inductanţe L' astfel încît

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \tag{40}$$

Echivalenţa înseamnă *numai* că relaţia între curent şi tensiune, pentru oscilaţii staţionare la frecvenţa particulară ω, este aceeaşi. Aceasta ne permite că înlocuim L şi C prin L' în orice circuit acţionat la acea frecvenţă.

Aceasta se poate aplica la circuitul simplu RLC din figura 8.9. Avem numai nevoie să reluăm ecuaţiile 23 şi 27, soluţia pentru circuitul RL acţionat de o forţă electromotoare $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$, şi să înlocuim ωL prin $\omega L - 1/\omega C$:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \tag{41}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}. \tag{42}$$

Pentru o amplitudine fixă $\mathcal{E}_0$ a tensiunii electromotoare, şi elemente de circuit L, C şi R date, obţinem cel mai mare curent cînd frecvenţa purtătoare ω este astfel încît

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{43}$$

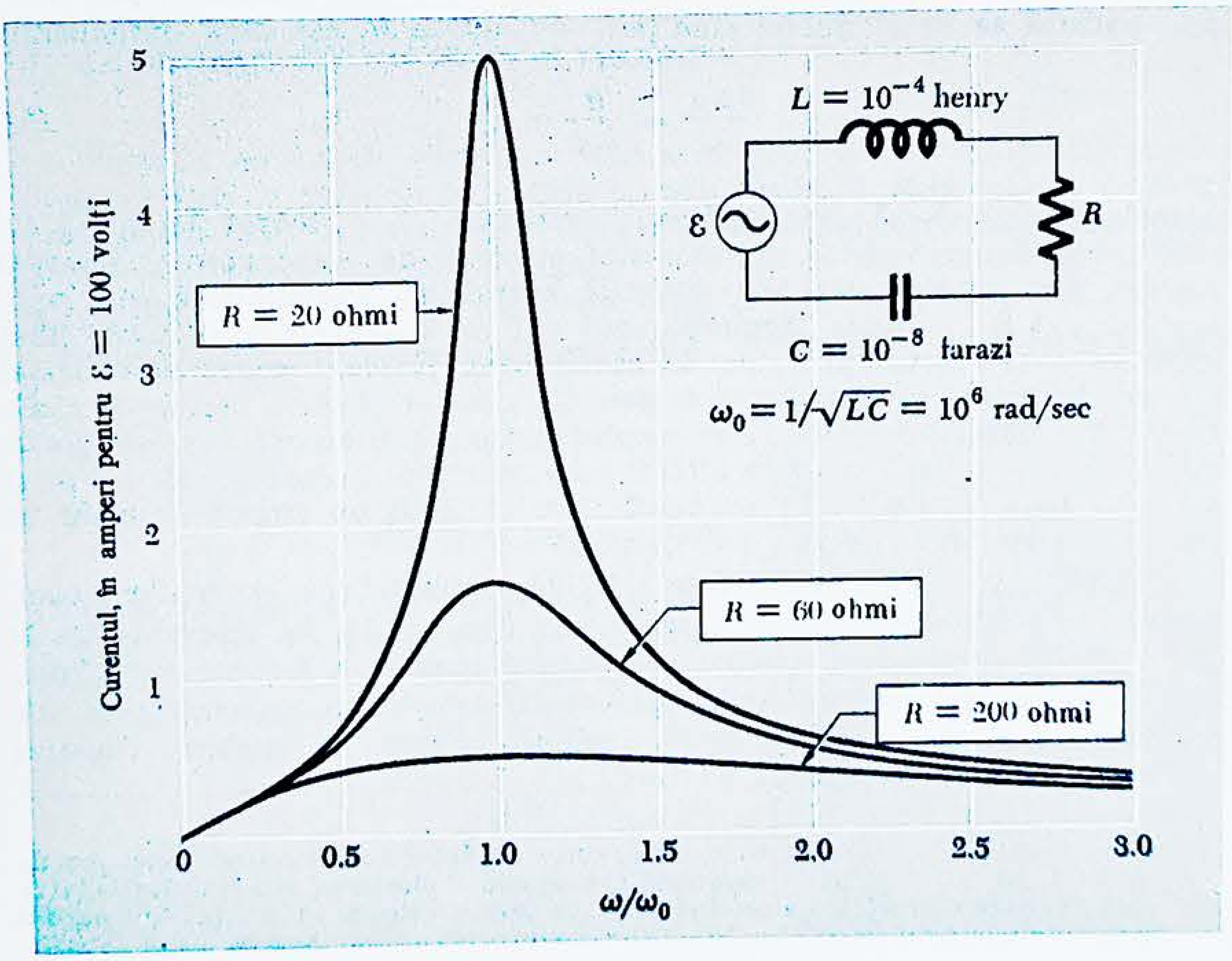
care este acelaşi lucru cu a spune că $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, frecvenţa rezonantă a circuitului LC neamortizat. În acest caz ecuaţia 39 se reduce la

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R}. \tag{44}$$

Acesta este exact curentul care ar trece dacă circuitul conţinea o singură rezistenţă.

Ca exemplu, să considerăm circuitul din figura 8.3, *a*, conectat acum la o sursă sau generator de t.e.m. alternativă, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Frecvenţa de comandă ω poate fi diferită de frecvenţa de rezonanţă $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, care, pentru capacitatea (0,01 microfarazi) şi inductanţa (100 microhenry) date

Fig. 8.10. O t.e.m. de amplitudine 100 volţi este aplicată unui circuit serie *RLC*. Elementele de circuit sînt aceleaşi ca în exemplul circuitului amortizat din fig. 8.3. Amplitudinea curentului este calculată prin ecuaţia 41 şi este reprezentată, ca funcţie de ω/ω_0, pentru trei valori diferite ale rezistenţei.



este 10^6 radiani/s. (sau $10^6/2\pi$ cicli/s). Figura 8.10 arată amplitudinea curentului oscilant, ca funcții de frecvențe purtătoare, pentru trei valori diferite ale rezistenței R a circuitului. Se presupune că amplitudinea $\mathcal{E}_0$ a t.e.m. este 100 volți în fiecare caz. Observați vîrful de rezonanță la $\omega=\omega_0$, care este cel mai reliefat și ascuțit pentru valoarea cea mai scăzută a lui R pentru care, funcționînd ca oscilator amortizat fără nici o t.e.m. de comandă, circuitul se comportă ca în primul grafic din figura 8.3, *b*.

Q-ul circuitului, definit prin ec. 14 ca $\omega_0 L/R$* este $\frac{(10^6\times10^{-4})}{20}$ sau 5, în acest caz. General vorbind, cu cît Q al unui circuit este mai mare, cu atît vîrful răspunsului său ca funcție de frecvența de comandă ω este mai îngust și mai înalt. Pentru a fi mai preciși, să considerăm frecvența în vecinătatea lui ω_0, scriind $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Atunci în primul ordin în ω/ω_0, expresia $\omega L - 1/\omega C$ care intervine în numitorul din ecuația 41 se poate aproxima astfel:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C(1+\Delta\omega/\omega_0)} \tag{45}$$

și deoarece ω_0 este $1/\sqrt{LC}$, aceasta devine

$$\omega_0 L\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1+\Delta\omega/\omega_0}\right] \approx \omega_0 L\left(2\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \tag{46}$$

Exact la rezonanță, cantitatea în interiorul rădăcinii pătrate în ecuația 41 este tocmai R^2. Pe măsură ce ω este scos din rezonanță cantitatea sub rădăcina pătrată se va fi dublat cînd $|\omega L - 1/\omega C| = R$, sau cînd, aproximativ

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}. \tag{47}$$

Aceasta înseamnă că amplitudinea curentului va fi scăzut la $1/\sqrt{2}$ ori vîrful cînd $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2Q$. Acestea sînt punctele de „semiputere", deoarece energia, sau puterea este proporțională pătratului amplitudinii, cum vom explica în § 8.5. Adesea lărgimea unui vîrf de rezonanță se exprimă dînd lărgimea totală între punctele de semiputere. Evident aceea este tocmai $1/Q$ ori frecvența de rezonanță însăși. Circuite cu Q mult mai mare decît acesta sînt absolut comune. Un receptor radio poate selecta o stație particulară și discrimina împotriva altelor prin intermediul unui circuit cu un Q de mai multe sute. Este cu totul ușor de făcut un circuit rezonant de microunde cu un Q de 10^4, sau chiar 10^5.

Unghiul φ, care exprimă faza relativă a curentului și oscilațiilor t.e.m., variază cu frecvența în maniera arătată în figura 8.11. La frecvențe foarte joase condensatorul este piedica dominantă împotriva trecerii curentului, și φ este pozitiv. La rezonanță, $\varphi = 0$. Cu cît Q este mai mare, cu atît mai abrupt se deplasează φ de la unghiuri pozitive la unghiuri negative cînd frecvența trece prin ω_0.

---

* Frecvența ω în ecuația 14 era frecvența oscilatorului amortizat liber, practic aceeași ca ω_0 pentru amortizare moderată sau ușoară. Folosim ω_0 aici în definiția lui Q. În discuția prezentă ω este *orice* frecvență pe care o alegem să o aplicăm acestui circuit.

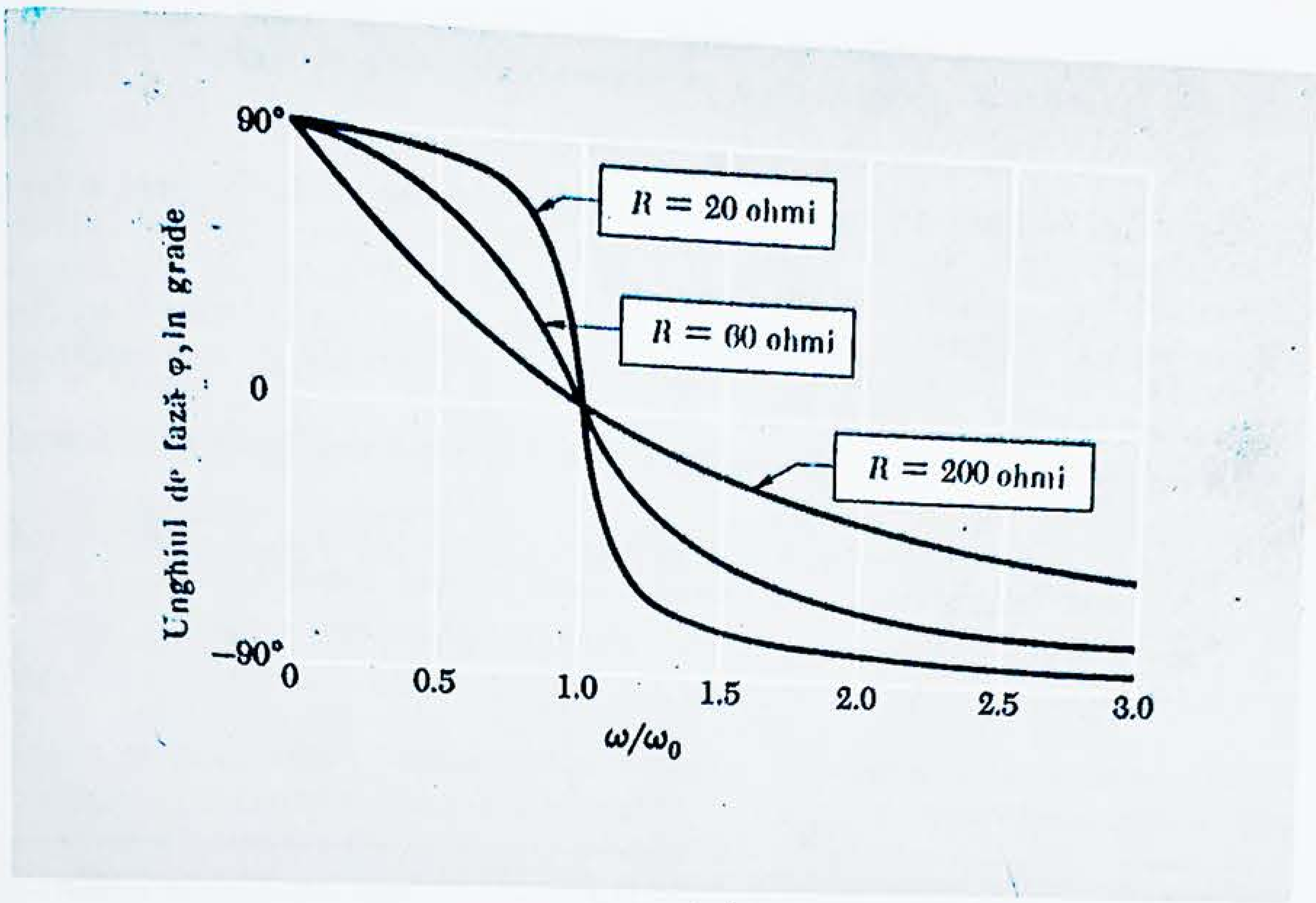


Fig. 8.11. Variaţia unghiului de fază cu frecvenţa, în circuitul din fig. 8.10.

8.3. REŢELE DE CURENT ALTERNATIV

O reţea de curent alternativ este orice grupare de rezistenţe, condensatori şi bobine în care trec curenţi care oscilează staţionar la frecvenţa constantă ω. Una sau mai multe surse de tensiune electromotoare, la această frecvenţă, întreţin oscilaţia. Figura 8.12 este o schemă a unei astfel de reţele. Sursa tensiunii electromotoare alternative este reprezentată prin simbolul -(~)- . Într-o ramură a reţelei, de exemplu ramura care include inductanţa L_2, curentul în funcţie de timp este

$$I_2 = I_{02}\cos(\omega t + \varphi_2). \tag{48}$$

Deoarece frecvenţa este constantă pentru întreaga reţea, două numere, ca amplitudinea I_{02} şi constanta de fază φ_2 de mai sus, sînt suficiente pentru a determina la

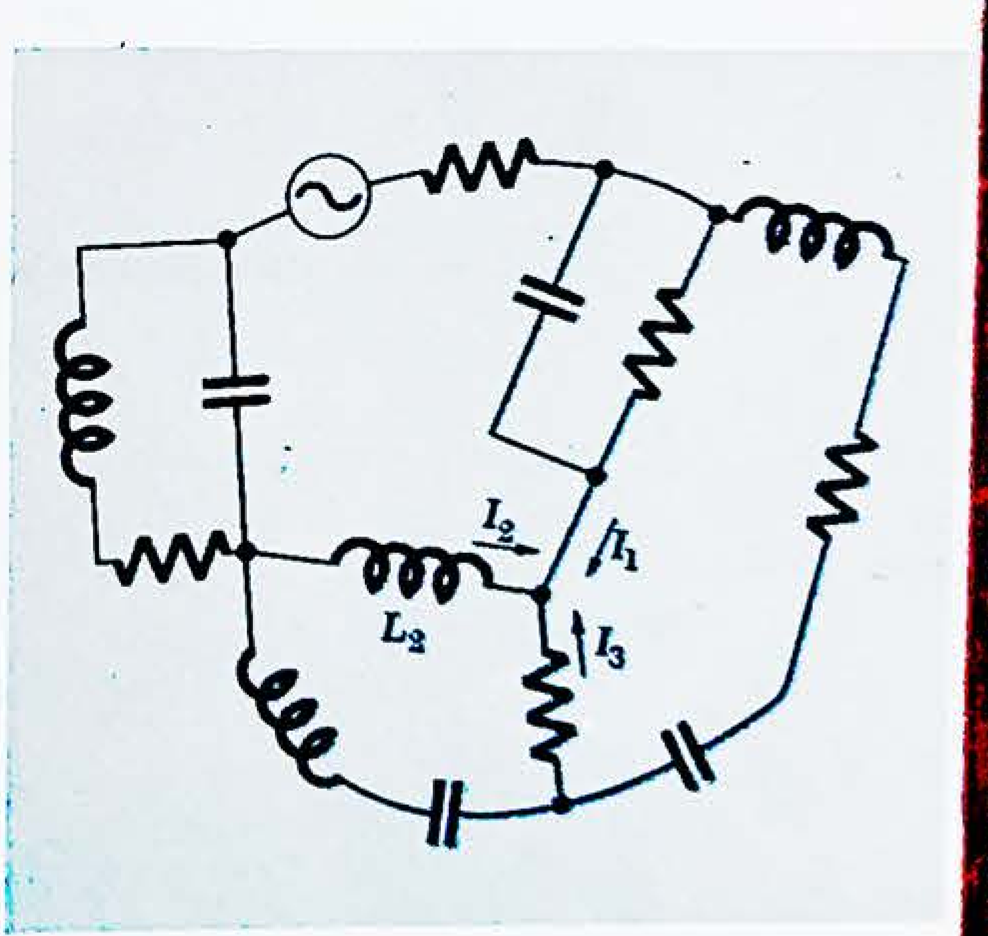


Fig. 8.12. O schemă de curent alternativ.

orice moment curentul într-o ramură particulară. În mod asemănător, tensiunea pe ramură oscilează cu o oarecare amplitudine și fază:

$$U_2 = U_{02} \cos(\omega t + \theta_2). \tag{49}$$

Dacă am determinat curenții și tensiunile în toate ramurile unei rețele, am analizat-o complet. A le găsi prin construirea și rezolvarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare este, desigur, posibil, și dacă ne ocupăm cu comportarea tranzitorie a rețelei, aveam de făcut așa ceva. Pentru soluția staționară, totuși, putem folosi o metodă mult mai simplă și mai elegantă. Aceasta se bazează pe două idei:

(I) Un curent sau o tensiune alternativă se pot *reprezenta* printr-un număr complex.

(II) Orice ramură sau element din circuit pot fi caracterizate, la o frecvență dată, prin relația între tensiune și curent în acea ramură.

Prima idee folosește acea identitate matematică remarcabilă

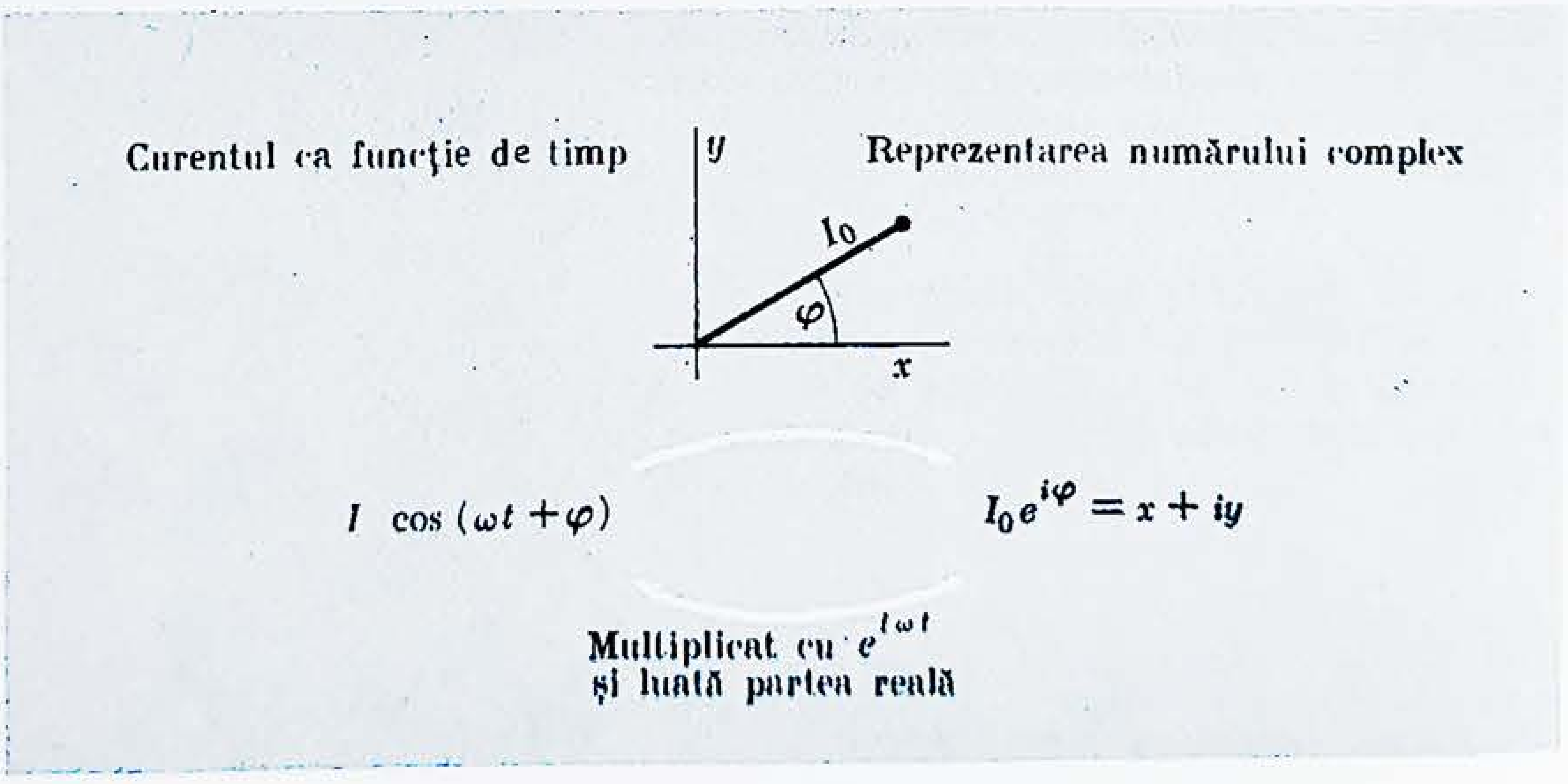
$$e^{i\nu} = \cos \nu + i \sin \nu \tag{50}$$

cu $i^2 = -1$. Pentru a preciza această idee, adoptăm următoarea *regulă* pentru reprezentare:

> Un curent alternativ $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ se va *reprezenta* prin numărul complex $I_0 e^{i\varphi}$, adică, numărul a cărui parte reală este $I_0 \cos \varphi$ și a cărui parte imaginară este $I_0 \sin \varphi$.
>
> De altă parte, dacă numărul complex $x + iy$ *reprezintă* un curent I, atunci curentul ca funcție de timp este dat de partea reală a produsului $(x + iy)e^{i\omega t}$.

Figura 8.13 ilustrează această dublă corespondență. Deoarece un număr complex $z = x + iy$ poate fi reprezentat grafic în planul bi-dimensional, este ușor de vizualizat constanta de fază drept unghiul $\mathrm{tg}^{-1}\, y/x$, și amplitudinea I_0 ca modulul $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Fig. 8.13. Reguli pentru reprezentarea unui curent alternativ printr-un număr complex.



Ceea ce face toate acestea să fie utile este următorul fapt: *Reprezentarea sumei a doi curenți este suma reprezentărilor lor.* Să considerăm suma a doi curenți I_1 și I_2 care se întîlnesc la un nod de fire în figura 8.12. La orice moment t suma curenților este:

$$I_1 + I_2 = I_{01}\cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02}\cos(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= (I_{01}\cos\varphi_1 + I_{02}\cos\varphi_2)\cos\omega t - (I_{01}\sin\varphi_1 + I_{02}\sin\varphi_2)\sin\omega t. \quad (51)$$

De altă parte, suma numerelor complexe care, după regula noastră, reprezintă I_1 și I_2 este:

$$I_{01}\,e^{i\varphi_1} + I_{02}\,e^{i\varphi_2} = (I_{01}\cos\varphi_1 + I_{02}\cos\varphi_2) + i(I_{01}\sin\varphi_1 + I_{02}\sin\varphi_2). \quad (52)$$

Dacă înmulțiți membrul drept al ecuației 52 prin $(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ și luați partea reală a rezultatului, veți obține tocmai ceea ce apare la dreapta în ecuația 51.

Aceasta înseamnă că în loc de a aduna sau scădea înseși funcțiile periodice de timp, putem aduna sau scădea numerele complexe care le reprezintă. Sau altfel spus, algebra curenților alternativi apare ca fiind aceeași ca algebra numerelor complexe, privitor la adunare. Corespondența *nu* se extinde la înmulțire. Numărul complex $I_{01}I_{02}\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ *nu* reprezintă produsul celor două funcții de curent în ecuația 51.

Totuși, doar de adunarea de curenți și tensiuni avem nevoie pentru a analiza rețeaua. De exemplu, la nodul unde I_1 întîlnește I_2 în figura 8.12, apare cerința ca *în fiecare moment* curgerea netă de curent în joncțiune să fie zero. De aici, condiția

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (53)$$

trebuie să fie îndeplinită, unde I_1, I_2 și I_3 sînt *funcțiile periodice de timp reale.* Mulțumită corespondenței noastre, aceasta se poate exprima în forma algebrică simplă că suma de trei numere complexe este zero. Tensiunile pot fi mînuite în același fel. În mod instantaneu, suma căderilor de tensiune în jurul oricărei bucle în rețea trebuie să fie egală cu forța electromotoare în buclă la acel moment. Această condiție care leagă funcții de tensiune periodice se pot înlocui de asemenea prin afirmații despre suma unor numere complexe, reprezentările diverselor funcții oscilante, $U_1(t)$, $U_2(t)$ etc.

8.4. ADMITANȚA ȘI IMPEDANȚA

Relația între curgerea de curent printr-un element de circuit și tensiunea pe element poate fi exprimată ca o relație între numerele complexe care reprezintă tensiunea și curentul. Să privim la combinația de inductanță rezistență din figura 8.4. Oscilația tensiunii este reprezentată prin $\mathcal{E}_0$ și curentul prin $I_0\,e^{i\varphi}$, unde $I_0 = \mathcal{E}_0/\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$ și $\operatorname{tg}\varphi = -\omega L/R$. Diferența de fază φ și raportul amplitudinii curentului la amplitudinea tensiunii sînt proprietăți ale circuitului la această frecvență. Definim un număr complex y astfel:

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \quad \text{cu } \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right). \quad (54)$$

Atunci relaţia

$$I = YU \tag{55}$$

are loc, unde U este numărul complex care reprezintă tensiunea pe combinaţia serie de R şi L, şi Y este numărul complex care reprezintă curentul. Y este numit *admitanţă*. Aceeaşi relaţie se poate exprima cu inversul lui Y, notat prin Z şi numit impedanţă:

$$U = \left(\frac{1}{Y}\right) I = ZI. \tag{56}$$

Aici ne folosim de produsul a două numere complexe, dar numai unul dintre numere este reprezentarea unui curent alternativ sau a unei tensiuni. Celălalt este impedanţa sau admitanţa.*

Impedanţa se măsoară în ohmi. Într-adevăr, dacă elementul de circuit era alcătuit doar din rezistenţa R, impedanţa ar fi fost reală şi egală cu R, astfel încît ecuaţia 56 ar avea aceeaşi formă cu legea lui Ohm pentru un circuit de curent continuu: $U = RI$.

Admitanţa unei inductanţe fără rezistenţă este cantitatea imaginară $Y = -i/\omega L$. Aceasta se poate vedea făcînd R să se apropie de zero în ecuaţia 54. Factorul $-i$ arată că oscilaţia curentului rămîne în urma oscilaţiei tensiunii prin $\frac{\pi}{2}$ în fază. În diagrama numerelor complexe, dacă tensiunea este reprezentată prin U (fig. 8.14, *b*) curentul ar putea fi reprezentat prin I, situat cum se arată acolo. Pentru capacitate, $Y = i\omega C$, după cum se poate vedea din expresia pentru curent în figura 8.7. În acest caz U şi I sînt legate după cum se indică în figura 8.14, *c*. În fiecare figură se arată de asemenea cum trebuie ales semnul relativ al lui U şi I. Dacă aceasta nu se face în mod corespunzător, „înainte“

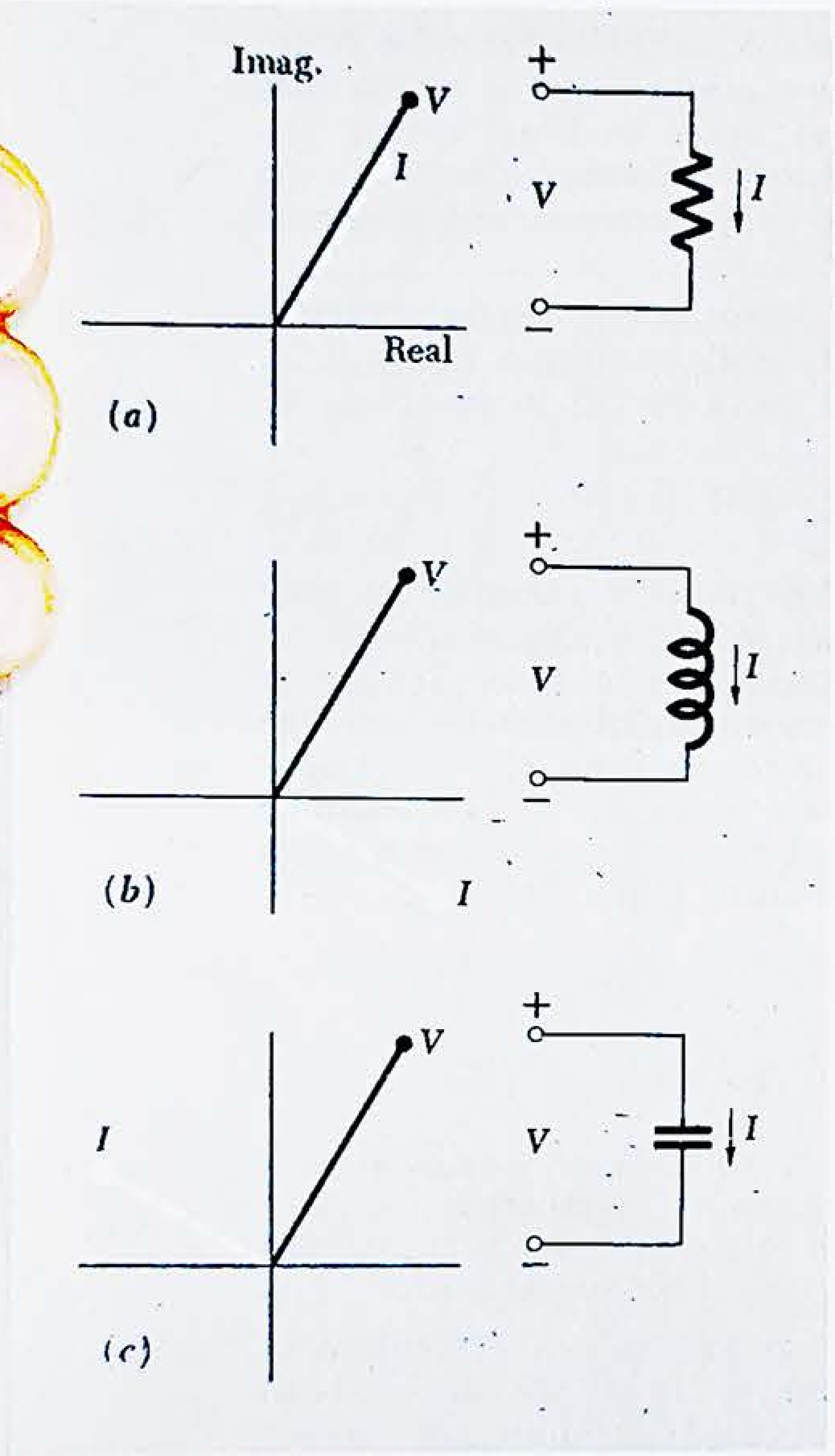


Fig. 8.14. *V* şi *I* sînt numere complexe care reprezintă tensiunea de-a lungul unui element de circuit şi curentul prin el. Faza relativă a oscilaţiei curentului şi tensiunii apare aici în unghiul dintre „vectori“. *(a)* În rezistenţă, curentul şi tensiunea sînt în fază. *(b)* În inductanţă, curentul rămîne în urma tensiunii. *(c)* În capacitate, curentul este înaintea tensiunii.

* Algebra noastră conţine astfel două categorii de numere complexe, acelea care reprezintă impedanţe, de exemplu, şi acelea care reprezintă curenţi. Produsul a două *„numere de impedanţă“*, ca şi produsul a două *„numere de curent“* nu reprezintă nimic.

și „în urmă“ sînt expresii fără sens. Observați că definim totdeauna sensul pozitiv al curentului astfel încît o tensiune pozitivă aplicată unei rezistențe să genereze curent pozitiv (fig. 8.14, *a*).

Proprietățile celor trei elemente de circuit de bază sînt rezumate mai jos:

Simbol	Admitanța, Y	Impedanța, $Z = \frac{1}{Y}$
R	$\frac{1}{R}$	R
L	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YU$	$U = ZI$

Putem alcătui orice circuit din aceste elemente. Cînd elementele sau combinațiile elementelor sînt legate în paralel, este convenabil de folosit admitanțele, deoarece în acest caz admitanțele se însumează. În figura 8.15 două „cutii negre“ cu admitanțe Y_1 și Y_2 sînt legate în paralel. Avem atunc

$$I = I_1 + I_2 = Y_1U + Y_2U = (Y_1 + Y_2)U \tag{57}$$

care implică faptul că o singură cutie neagră echivalentă are admitanța $Y_1 + Y_2$. Din figura 8.16 va fi limpede că *impedanțele* se adună pentru

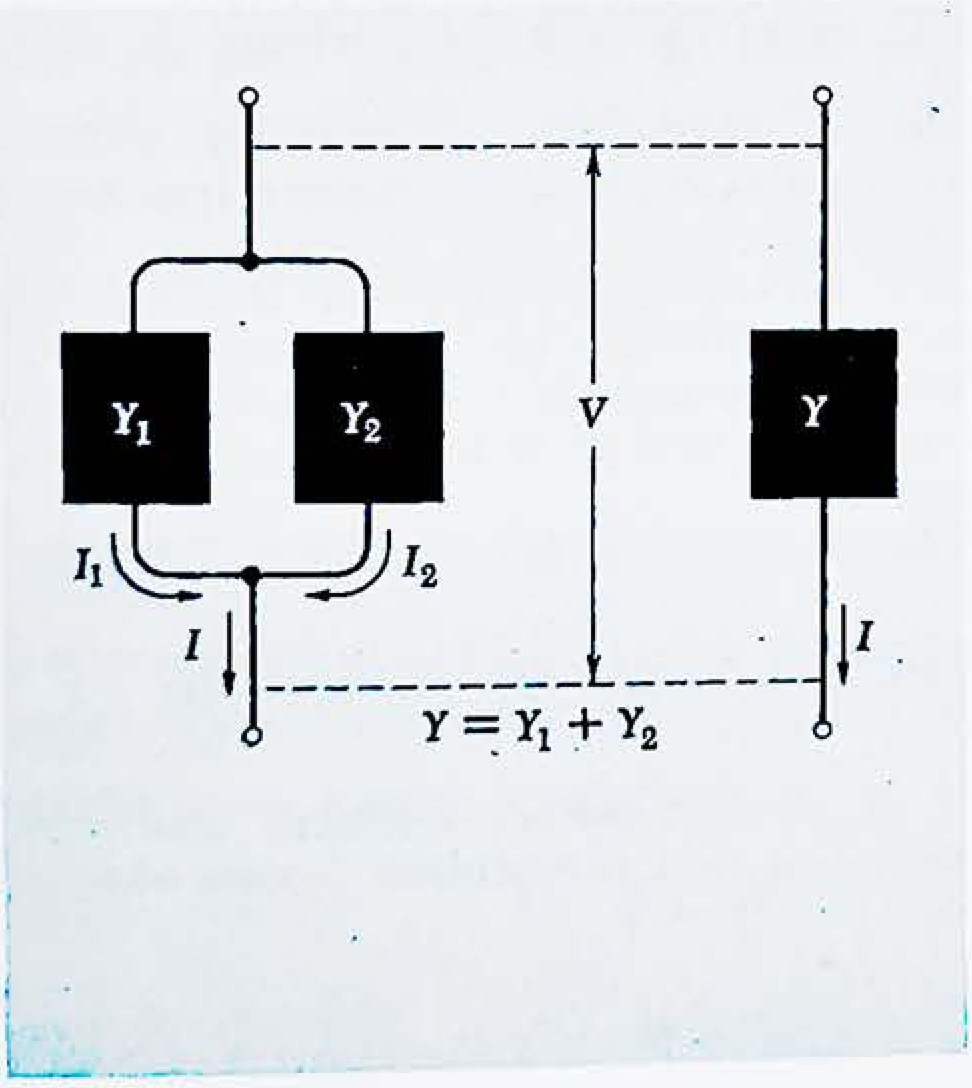


Fig. 8.15. Legarea în paralel a admitanțelor.

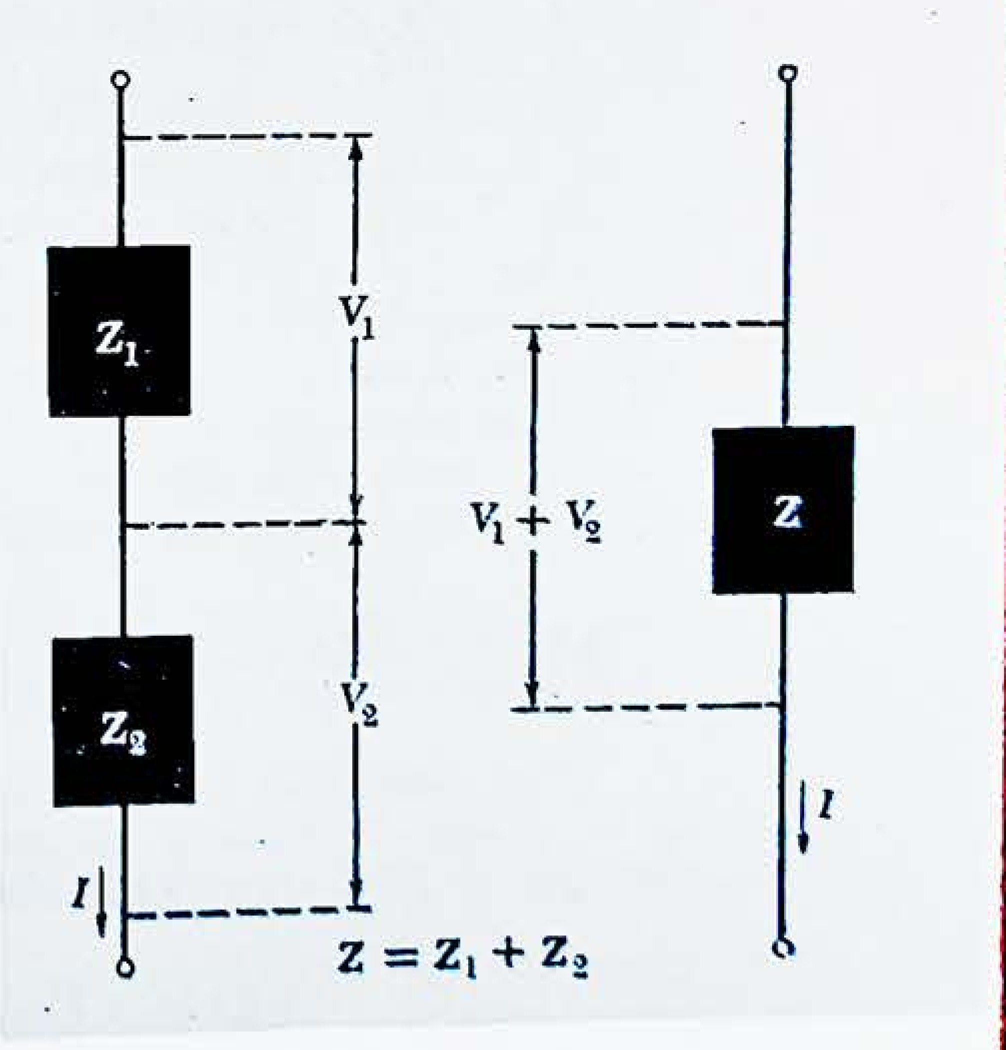


Fig. 8.16. Legarea în serie a impedanțelor.

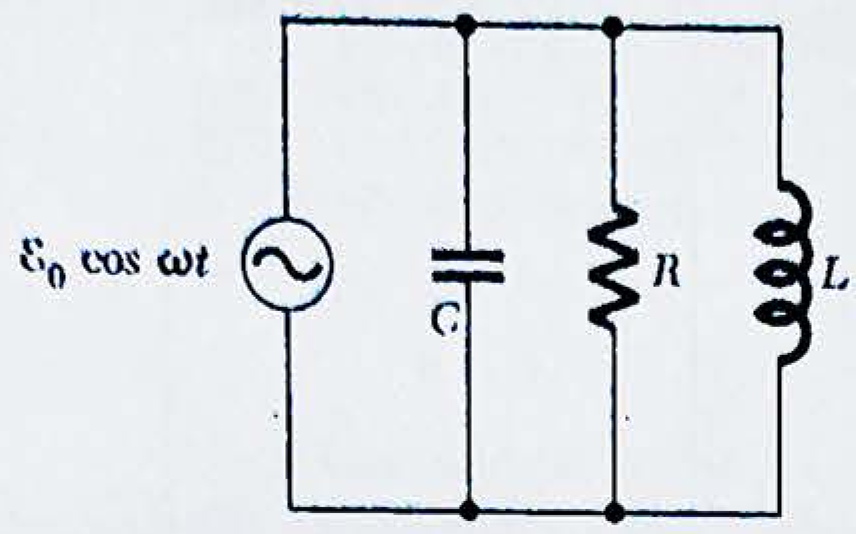


Fig. 8.17. Un circuit rezonant paralel. Însumați admitanțele complexe ale celor trei elemente, ca în ec. 58.

elemente legate *în serie*. Este ca și cum am vorbi de rețele de curent continuu! De fapt, am redus acum problema rețelei de curent alternativ la problema rețelei de curent continuu, cu această diferență: numerele cu care operăm sînt numere complexe.

Ca exemplu, să privim la circuitul „RLC paralel" în figura 8.17. Admitanța combinată a celor trei ramuri paralele este

$$Y = \frac{1}{R} + \mathrm{i}\,\omega C - \frac{i}{\omega L}. \tag{58}$$

Tensiunea este simplu $\mathcal{E}_0$, astfel curentul complex este

$$I = YU = \mathcal{E}_0\left[\frac{1}{R} + \mathrm{i}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]. \tag{59}$$

Amplitudinea oscilației de curent este modulul numărului complex I, care este $\mathcal{E}_0[(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L^2)]^{1/2}$, și unghiul de fază este $\tan^{-1}(R\omega C - R/\omega L)$.

Putem trata în acest fel numai elemente de circuit *lineare*, elemente în care curentul este proporțional tensiunii. Cu alte cuvinte, circuitul nostru trebuie să fie descris de o ecuație diferențială lineară. Nici măcar nu puteți defini o impedanță pentru un element nelinear. Elementele de circuit nelineare sînt componente foarte importante și interesante. Ați studiat unele în laborator, și puteți vedea de ce nu se pretează la acest gen de analiză.

Aceasta este afirmat, de asemenea, despre oscilația continuă la frecvență constantă. Comportarea tranzitorie a unui circuit este o problemă diferită. Totuși, pentru circuite lineare uneltele pe care tocmai le-am dezvoltat au o oarecare utilitate, chiar și pentru stări tranzitorii. Motivul este că prin superpoziția oscilațiilor staționare de mai multe frecvențe putem reprezenta o comportare nestaționară, și răspunsul la fiecare frecvență individuală se poate calcula ca și cînd acea frecvență ar fi fost singura. Aceasta se poate foarte bine lăsa pentru volumul III.

8.5. PUTEREA ȘI ENERGIA ÎN CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

Dacă tensiunea pe o rezistență R este $U_0 \cos \omega t$, curentul este $I = (U_0/R)\cos \omega t$. Puterea instantanee, adică rata instantanee la care energia este disipată în rezistență este

$$P = RI^2 = \frac{U_0^2}{R}\cos^2 \omega t. \tag{60}$$

Deoarece media lui $\cos^2 \omega t$ pe multe cicluri este $\frac{1}{2}$, puterea medie disipată în circuit este

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}. \tag{61}$$

Se obișnuiește a exprima tensiunea și curentul în circuite de curent alternativ dînd nu amplitudinea ci $1/\sqrt{2}$ ori amplitudinea. Aceasta este adesea numit valoarea efectivă sau eficace (ef). Aceasta ține seama de factorul $\frac{1}{2}$ în ecuația 61, astfel încît

$$\bar{P} = \frac{U_{ef}^2}{R}. \tag{62}$$

De exemplu, tensiunea uzuală în rețele publice, 120 volți, corespunde la o *amplitudine* $120 \cdot \sqrt{2}$ volți. Diferența de potențial între bornele prizei electrice din camera dumneavoastră (dacă tensiunea este normală) este*

$$U(t) = 170 \cos 377\, t \tag{63}$$

cu U în volți și t în secunde. Un ampermetru de curent alternativ este calibrat să arate 1 amper cînd amplitudinea curentului este 1,414 amperi.

În general, rata instantanee la care energia este debitată unui element de circuit este UI, produsul tensiunii și curentului instantaneu, cu semnul potrivit. Să considerăm acest aspect al curgerii de curent în circuitul simplu LR din figura 8.4. În figura 8.18 am redesenat graficele curentului și tensiunii și am adăugat o curbă proporțională cu produsul UI. Valori UI pozitive înseamnă că energia este transferată în combinația LR de la sursa de forță electromotoare, sau generator. Observați că UI este negativ în anumite părți ale ciclului. În acele perioade o oarecare energie este înapoiată în generator. Aceasta se explică prin oscilația în energie înmagazinată în cîmpul magnetic al inductanței. Această energie înmagazinată, $\frac{1}{2} LI^2$, trece printr-un maxim de două ori în fiecare ciclu complet.

Puterea *medie*, $\bar{P}$, corespunde liniei punctate orizontale. Pentru a calcula valoarea ei, să privim la produsul UI, cu $U = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ și $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$UI = \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi) \tag{64}$$

Termenul proporțional cu $\cos \omega t \sin \omega t$ are media temporală zero, cum este evident dacă îl scrieți ca $\frac{1}{2} \sin 2\omega t$, în timp ce media lui $\cos^2 \omega t$ este $\frac{1}{2}$. Astfel avem pentru media temporală

$$\bar{P} = \overline{UI} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi. \tag{65}$$

* În rețelele electrice din SUA frecvența este 60 Hz (N. Trad.).

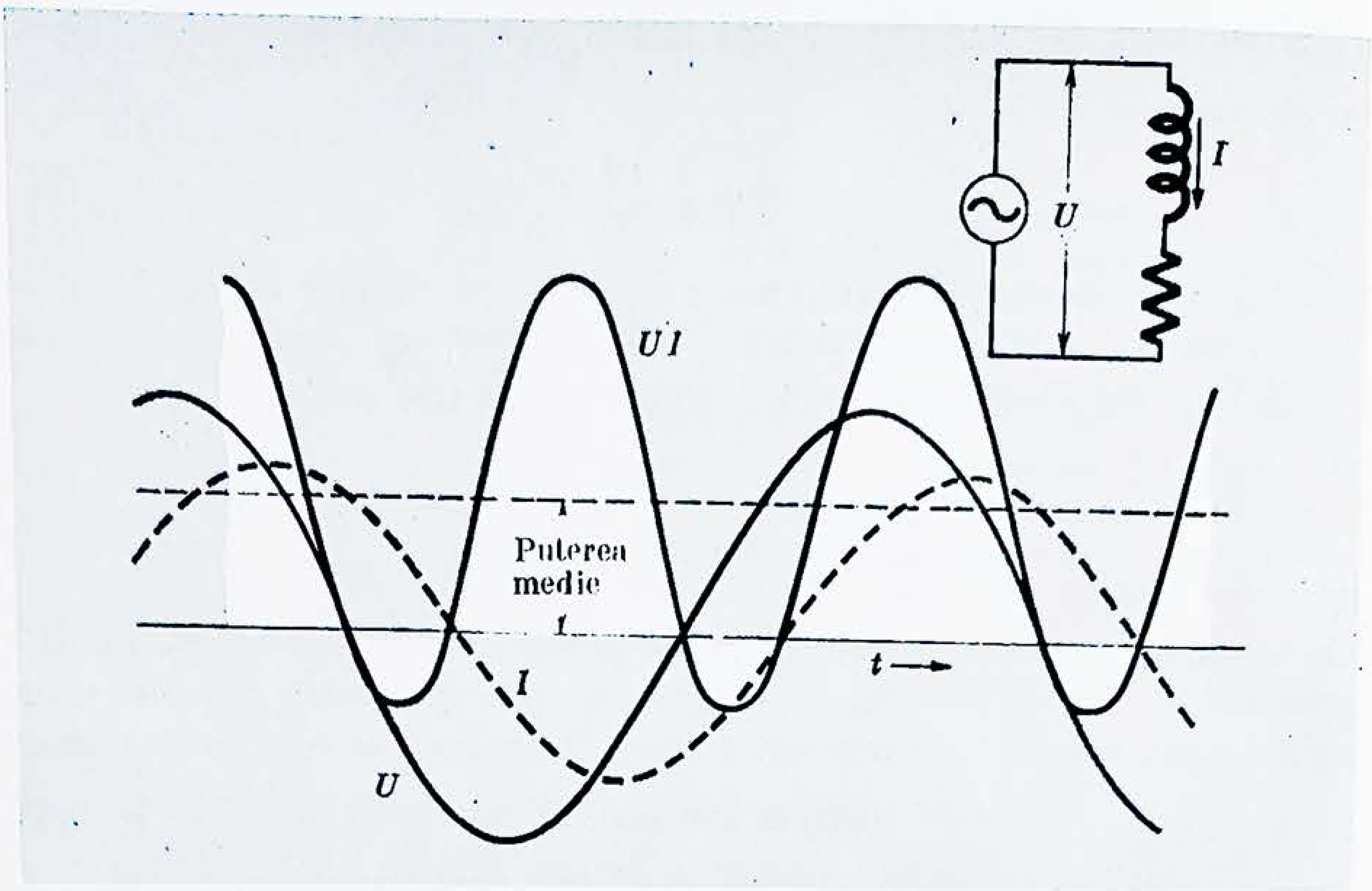


Fig. 8.18. Puterea instantanee UI este energia transferată în unitatea de timp de la sursa de tensiune electromotoare din stînga la elementele de circuit din dreapta. Media temporală a acesteia este indicată prin linia punctată orizontală.

Dacă atît curentul cît şi tensiunea sînt exprimate ca valori eficace în volt şi amper respectiv,

$$\underset{\text{(watti)}}{\overline{P}} = \underset{\text{(volţi)}}{U_{ef}}\ \underset{\text{(amperi)}}{I_{ef}}\ \cos\varphi. \tag{66}$$

În acest circuit toată energia este disipată în rezistorul R. Natural, orice bobină reală are o oarecare rezistenţă. În scopul de a analiza circuitul, am inclus-o pe aceea în rezistenţa R. Desigur căldura se dezvoltă la poziţia reală a rezistenţei.

Pentru a exersa metodele pe care le-am dezvoltat în § 8.4, vom analiza circuitul din figura 8.19, *a*. O rezistenţă de 10 000 ohmi şi 1 watt a fost legată cu doi condensatori de capacitate 0,2 şi 0,5 microfarazi (μF). Propunem să conectăm aceasta la o priză de 120 volţi, 60 cicli.

Întrebare: va deveni rezistorul de 1 watt prea fierbinte? În cursul analizei dacă puterea medie disipată în R depăşeşte 1 watt, vom calcula unii dintre curenţii şi tensiunile pe care le-am putea măsura în circuit. Un mod de a discuta circuitul este schiţat mai jos.

(I) Admitanţa lui $C_2 = \mathrm{i}\omega C_2 = (377)(2 \times 10^{-7})\mathrm{i} = 0{,}754 \times 10^{-4}\ \mathrm{i\ ohm^{-1}}$.

(II) Admitanţa rezistenţei $= \frac{1}{R} = 10^{-4}\ \mathrm{ohm^{-1}}$.

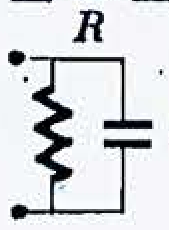
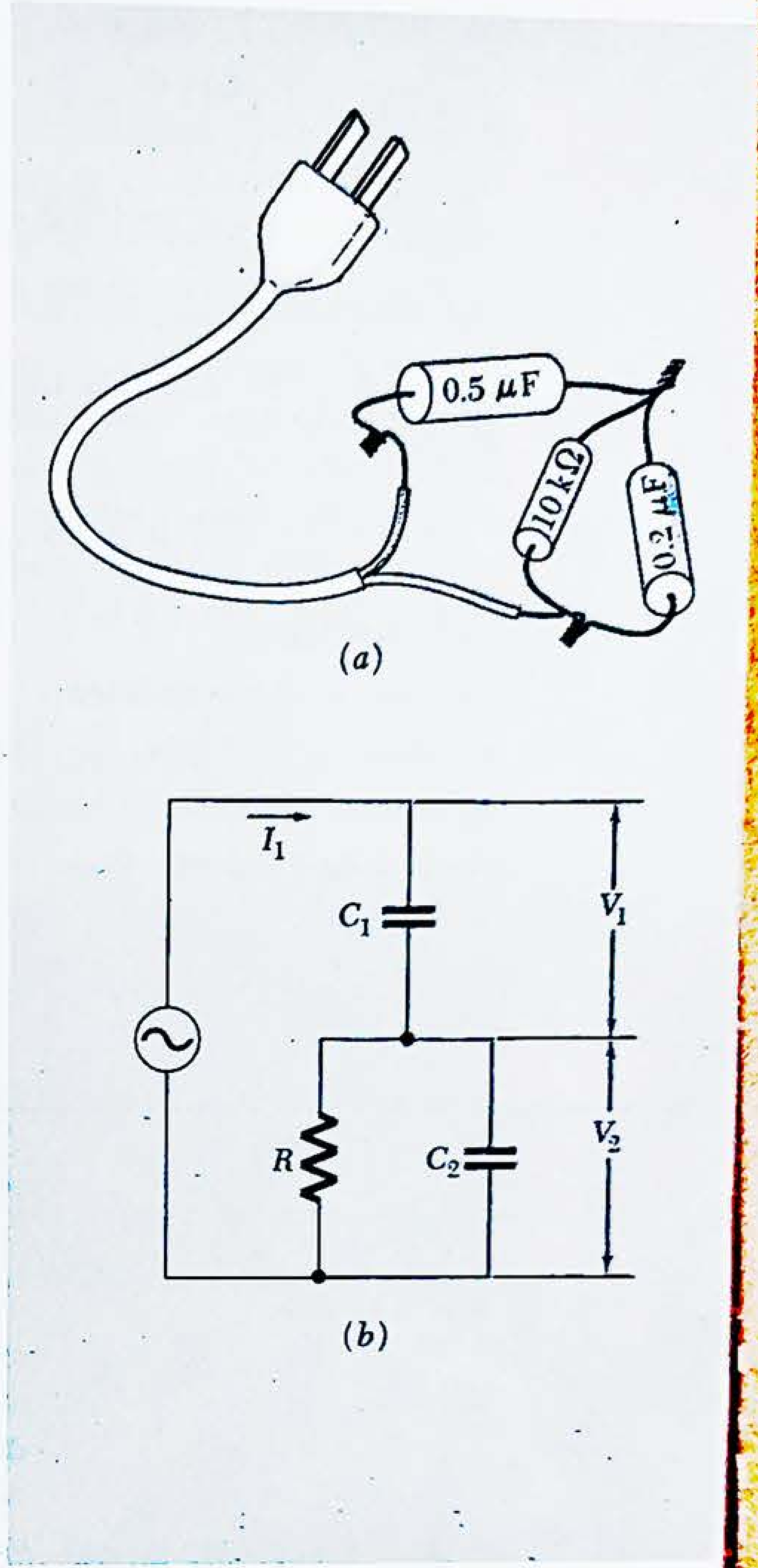
(III) Admitanţa lui  $= 10^{-4}(1 + 0{,}754\ \mathrm{i})\ \mathrm{ohm^{-1}}$

Fig. 8.19. O rețea reală *(a)* gata spre a fi conectată la o sursă de tensiune electromotoare, și *(b)* diagrama circuitului.



(IV) Impedanța lui [R ∥ C_2] $= \dfrac{1}{10^{-4}(1+0{,}754\,i)}$

$$= \frac{10^4(1-0{,}754\,i)}{1^2+0{,}754^2}$$

$$= (6\,360-4800\,i)\ \text{ohmi}$$

(V) Impedanța lui $C_1 = -\dfrac{i}{\omega C_1} =$

$$= -\frac{i}{(377)\,(5\times10^{-7})}$$

$$= -5\,300\,i\ \text{ohmi}$$

(VI) Impedanța întregului circuit $=$

$$= (6\,360 - 10\,100\ i)\ \text{ohmi}$$

(VII) $I_1 = \dfrac{120}{6\,360-10\,100\,i} =$

$$= \frac{120(6\,360+10\,100\,i)}{(6\,360)^2+(10\,100)^2}$$

$$= (5{,}37+8{,}53\ i)\times10^{-3}\ \text{amperi.}$$

Deoarece am folosit 120 volți, care este tensiunea eficace, obținem curentul eficace. Aceasta înseamnă că modulul numărului complex I_1, care este $[(5{,}37)^2+(8{,}53)^2]^{1/2}\times10^{-3}$ amperi sau 10,0 miliamperi (mA), este curentul eficace în amperi. Un miliampermetru de curent alternativ introdus în serie ar arăta 10 mA. Acest curent are un unghi de fază $\varphi = \text{tg}^{-1}\,(0{,}853/0{,}537)$ sau 1,01 radiani față de linia de tensiune. Puterea medie debitată întregului circuit este atunci:

(VIII) $\bar{P} = (120\ \text{volt})\ (0{,}010\ \text{amp})\cos 1{,}01 = 0{,}64\ \text{watt}$

În acest circuit rezistența este singurul element disipativ, astfel încît aceasta trebuie să fie puterea medie disipată în ea.

Ca verificare, putem găsi tensiunea U_2 pe rezistență:

$$\text{(IX)}\quad U_1 = I_1\left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5{,}37 + 8{,}53\ i)\,(-5300\ i)10^{-3}$$

$$= (45{,}2 - 28{,}4\ i)\ \text{volt}$$

$$\text{(X)}\quad U_2 = 120 - U_1 = (74{,}8 + 28{,}4\ i)\ \text{volt}$$

Curentul I_2 în R va fi în fază cu U_2, desigur, astfel puterea medie în R va fi

$$\bar{P} = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(74{,}8)^2 + (28{,}4)^2}{10^4} = 0{,}64\ \text{watt},$$

care verifică.

Astfel clasa rezistenței nu este depășită, deoarece acea asigurare este valabilă. În realitate, faptul dacă rezistența va deveni prea fierbinte depinde nu numai de puterea medie disipată în ea dar și de cît de ușor se poate elibera de căldură. Clasa de putere a unei rezistențe este doar o ghidare în mare.

PROBLEME

R și L în serie

8.1. Ce inductanță, în henry, trebuie legată în serie cu un bec de 120 volți, 60 wați, dacă acesta trebuie să lucreze normal cînd combinația este legată la o rețea de 240 volți, 60 cicli pe secundă? (Determinați mai întîi reactanța inductivă necesară. Puteți neglija rezistența inductorului și inductanța becului.)

R și C în serie

8.2. O rezistență de 2000 ohm și un condensator de 1 microfarad sînt legate în serie la o rețea de 120 volți (rpm) și 60 cicli.

a) Care este impedanța?

b) Care este valoarea eficace a curentului?

c) Care este puterea disipată în circuit?

d) Care va fi citirea unui voltmetru de curent alternativ legat pe rezistență? legat pe capacitate?

e) Plăcile orizontale ale unui tub de raze catodice sînt legate pe rezistență și plăcile verticale pe capacitate. Schițați figura pe care vă așteptați să o vedeți pe ecran.

R, L și C în paralel

8.3. O rezistență de 1000 ohm, o capacitate de 500 pF și o inductanță de 2 mH sînt legate în paralel. Care este impedanța acestei combinații la o frecvență de 10 kc/sec? La o frecvență de 10 Mc/sec? Care este frecvența la care valoarea absolută a impedanței este maximă?

8.4. În circuitul rezonant din figură elementul disipativ este o rezistență R' legată în paralel, și nu în serie, cu combinația LC. Dezvoltați ecuația, analoagă ecuației 2, care se aplică acestui circuit. Găsiți de asemenea condițiile asupra soluției analoage acelora care au loc în circuitul RLC serie. Dacă un circuit RLC serie și un circuit $R'LC$ au același L, C și Q, cum se leagă R' de R?

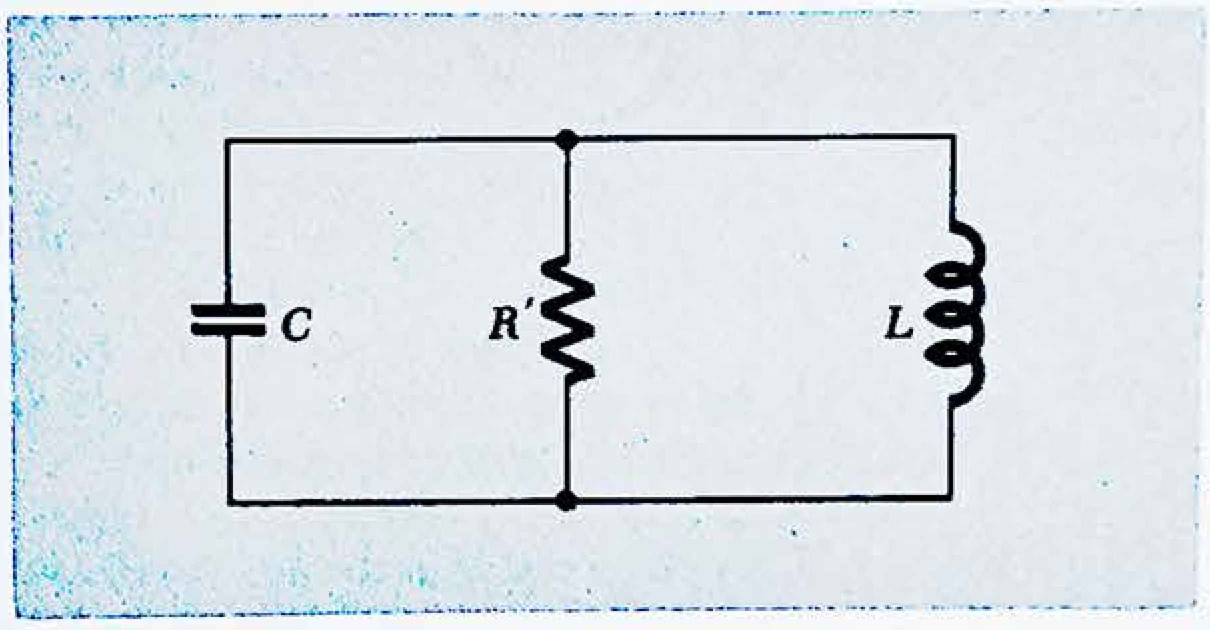


Fig. la problema 8.4

8.5. Să presupunem că curentul din circuitul în figura 8.1 este dat de ecuația 12. Calculați energia înmagazinată în circuit la $t = 0$. Apoi calculați energia înmagazinată în circuit un sfert de ciclu mai tîrziu, la $t = \pi/2\omega$. Verificați că diferența este egală cu energia disipată în rezistența R pe durata acestui interval. Pentru această problemă, presupuneți că amortizarea este mică, adică $\alpha/\omega \ll 1$, și neglijați termenii proporționali cu α^2.

8.6. Pentru circuitul din figura 8.3 *a*, determinați valorile lui β_1 și β_2 în cazul hiper-amortizat, cu $R = 600$ ohmi. Determinați de asemenea raportul lui B la A, constantele din ecuația 16.

8.7. O cavitate rezonantă de forma ilustrată în figură este o parte esenţială a multor oscilatori de microunde. Ea poate fi privită ca un circuit „*LC*" simplu. Inductanţa este aceea a unui toroid cu o spiră; această inductanţă este legată direct la condensatori cu plăci paralele. Găsiţi o expresie pentru frecvenţa de rezonanţă a acestui circuit, şi arătaţi printr-o schiţă configuraţia cîmpurilor magnetic şi electric.

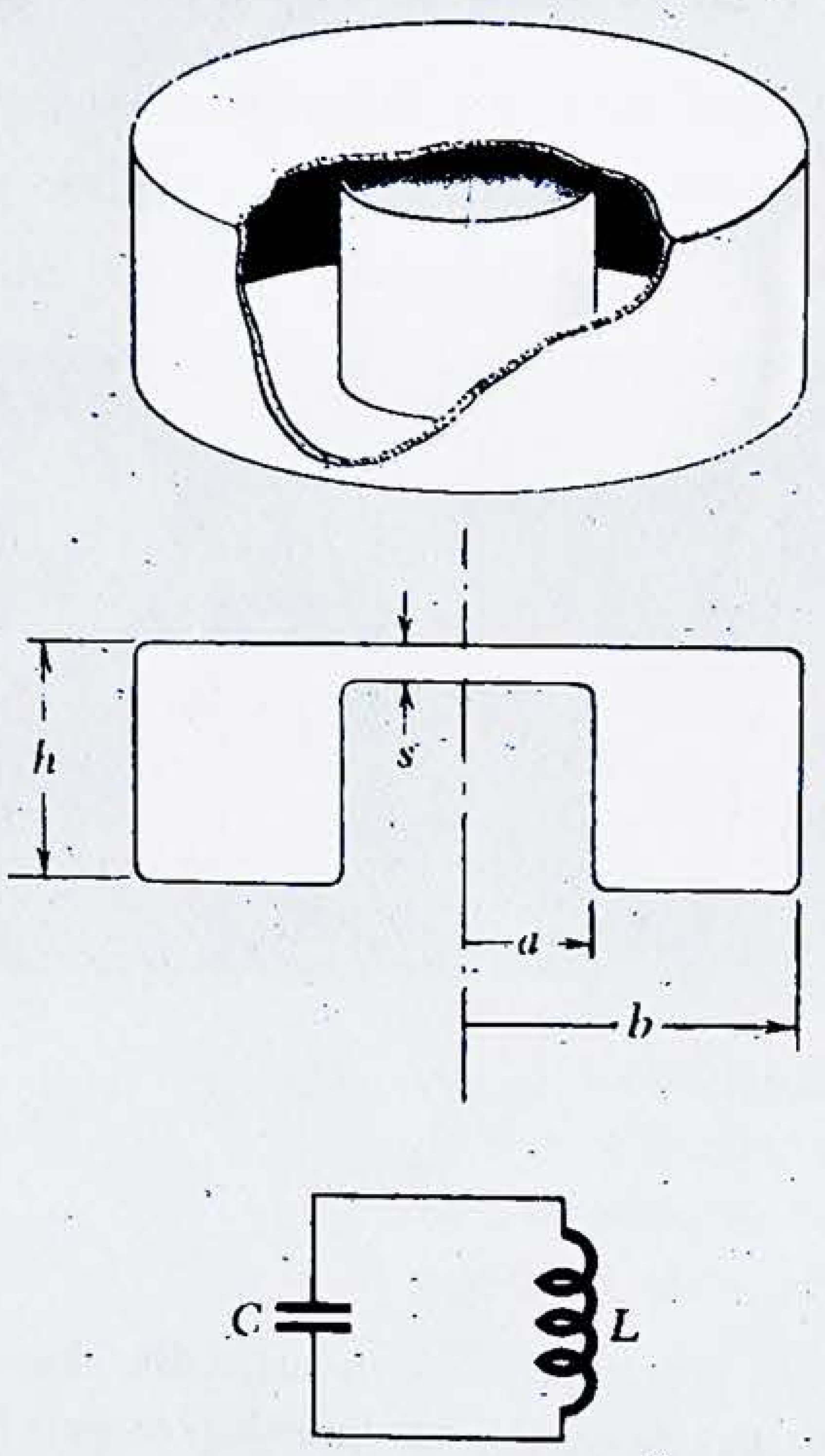


Fig. la problema 8.7

Capitolul 9

Cîmpuri electrice în substanță

9.1. Dielectrici 314
9.2. Momentele unei distribuții de sarcină 317
9.3. Potențialul și cîmpul unui dipol 320
9.4. Cuplul și forța asupra unui dipol într-un cîmp exterior 323
9.5. Dipoli atomici și moleculari. Momente dipolare induse 325
9.6. Tensorul de polarizabilitate 329
9.7. Momente dipolare permanente 331
9.8. Cîmpul electric produs de materia polarizată 334
9.9. Condensatorul umplut cu dielectric 340
9.10. Cîmpul unei sfere polarizate 342
9.11. O sferă dielectrică într-un cîmp uniform 346
9.12. Cîmpul unei sarcini într-un mediu dielectric și legea lui Gauss 348
9.13. Legătura între susceptibilitatea electrică și polarizabilitatea atomică 351
9.14. Variații de energie la polarizare 355
9.15. Dielectrici alcătuiți din molecule polare 357
9.16. Polarizarea în cîmpuri variabile 358
9.17. Curentul de sarcină legată 359
Probleme 363

9.1. DIELECTRICI

Condensatorul pe care l-am studiat în capitolul 3 era alcătuit din doi conductori, izolați unul de altul, neavînd nimic între ei. Sistemul de doi conductori a fost caracterizat printr-o anumită capacitate C, o constantă care corelează mărimea sarcinii Q pe condensator (sarcina pozitivă Q pe o placă, sarcină negativă egală pe cealaltă) cu U_{12}, diferența de potențial electric între cei doi conductori:

$$C = \frac{Q}{U_{12}}. \tag{1}$$

Pentru condensatorul cu plăci paralele, două plăci plane de arie A și separate printr-o distanță t, am găsit capacitatea

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{t}. \tag{2}$$

Condensatori ca acesta se pot găsi în unele aparate electrice. Ei sînt numiți *condensatori cu vid* și sînt alcătuiți din plăci introduse într-un tub vidat. Ei sînt folosiți în principal cînd sînt implicate potențiale extrem de înalte și rapid variabile. De departe mult mai uzuali, totuși, sînt condensatorii în care spațiul dintre plăci este umplut cu o oarecare substanță neconductoare solidă sau lichidă. Cei mai mulți dintre condensatorii cu care ați lucrat în laborator sînt de felul acesta; există duzine de asemenea condensatori în orice receptor de televiziune. Pentru conductori implantați într-un mediu material, ecuația 2 nu se potrivește cu experiența. Să presupunem că umplem spațiul dintre cele două plăci arătate în figura 9.1, *a* cu un strat de plastic, ca în figura 9.1, *b*. Experimentînd acest nou tip de condensator,

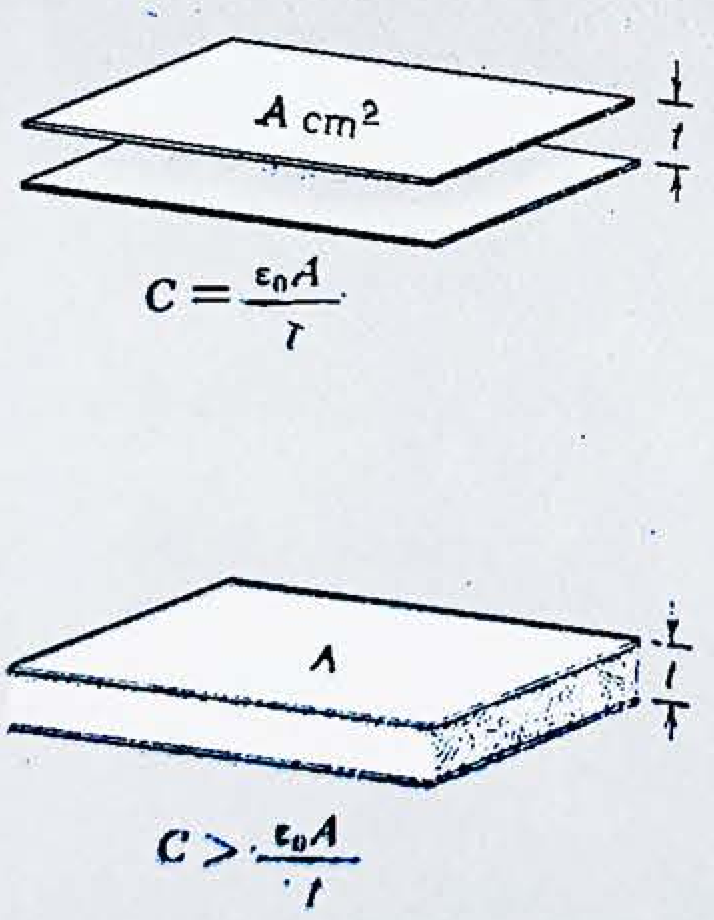


Fig. 9.1. *(a)* Un condensator format din plăci conductoare plane. *(b)* Aceleași plăci cu un strat izolator între ele.

încă găsim o proporționalitate între sarcină și diferența de potențial, astfel putem încă *defini* o capacitate prin ecuația 1. Dar găsim că C este considerabil *mai mare* decît ar prezice ecuația 2.

Nu numai în dispozitivele speciale numite condensatori, dar aproape oriunde în lumea din jurul nostru, cîmpurile electric și magnetic există în prezența materiei și nu în vid — dacă nu în materia densă, atunci cel puțin într-un gaz, anume aerul. Toate acestea ne reamintesc că, exceptînd digresiunea din capitolul 4 în domeniul conductivității electrice, am studiat de fapt cîmpul electromagnetic în spațiul vid, populat doar prin anumite sarcini punctuale sau distribuții de sarcină continue. Trebuie să căutăm acum să înțelegem interacțiile cîmpurilor electrice și magnetice cu materia.

Ne sînt deschise două moduri de abordare diferite. Menținînd un punct de vedere la scară largă, sau *macroscopic*, am putea vedea în ce fel prezența unui bloc de material omogen ca stratul de plastic din figura 9.1, *b* modifică cîmpul electric din spațiul din afară, unde putem măsura cîmpul. Am putea încerca să descoperim legi simple care ar descrie în mod adecvat astfel de efecte în orice sistem de conductori sau izolatori. Am găsi că, comportarea electrică macroscopică a substanțelor omogene poate fi într-adevăr caracterizată foarte simplu și complet. Ecuația *2*, de exemplu, are nevoie doar de înlocuirea constantei ε_0 printr-o constantă ε, caracteristică substanței particulare, pentru a da corect capacitatea oricărui condensator umplut cu acel material. ε este numit *constanta dielectrică* sau *permitivitate* a acelei substanțe, și materialul însuși este în general numit drept *dielectric* cînd considerăm comportarea sa într-un cîmp electric. Constantele dielectrice ale cîtorva substanțe uzuale sînt înscrise în tabelul 9.1 (v. mai jos) Odată constanta dielectrică a unui material particular determinată, poate prin măsurarea capacității unui condensator umplut cu el, sîntem în măsură să prezicem comportarea, nu numai a condensatorilor cu două plăci, dar a *oricărui* sistem electrostatic alcătuit din conductori și bucăți din acel dielectric de orice formă. Adică, putem prezice toate cîmpurile electrice care vor exista în vid în afara dielectricilor pentru sarcini sau potențiale date pe conductorii din sistem.

Tabel 9.1

Constantele dielectrice ale diverselor substanțe

Substanța	Condiții	Constanta dielectrică
Aer	Gaz, 0°C, 1 atm	1,00059
Acid clorhidric, HCl	Gaz, 0°C, 1 atm	1,0046
Apă, H_2O	Gaz, 110°C, 1 atm	1,0126
	Lichid, 20°C	80
Benzen, C_6H_6	Lichid, 20°C	2,28
Amoniac, NH_3	Lichid, —34°C	22
Ulei de transformator	Lichid, 20°C	2,24
Clorură de sodiu, NaCl	Cristal, 20°C	6,12
Sulf, S	Solid, 20°C	4,0
Cuarț, SiO_2	Cristal, 20°C (⊥ pe axa optică)	4,34
	Cristal, 20°C (∥ axa optică)	4,27
Polietilenă	Solid, 20°C	2,25—2,3
Neopren	Solid, 20°C	4,1
Porțelan	Solid, 20°C	6,0—8,0
Parafină transparentă	Solid, 20°C	2,1—2,5
Sticlă Pyrex 7070	Solid, 20°C	4,00

Teoria care ne îngăduie să facem aceasta a fost dezvoltată de către fizicienii secolului al nouăsprezecelea. Neavînd o imagine completă a structurii atomice a materiei, ei au fost mai mult sau mai puțin obligați să adopte o descriere macroscopică. Din acest punct de vedere, interiorul unui dielectric este un domeniu fără particularități al unei „gelatine matematice" perfect omogene, a cărui singură proprietate electrică care îl distinge de vid este o constantă dielectrică diferită de ε_0.

Dacă dezvoltăm doar o descriere macroscopică a materiei într-un cîmp electric, ne va fi greu să răspundem la unele întrebări care se impun destul de firesc — sau mai degrabă, greu să punem aceste întrebări încît să li se poată răspunde cu înțeles. De exemplu, care este intensitatea cîmpului electric în *interiorul* stratului de plastic din figura 9.1, *b* cînd pe armături se află niște sarcini? Intensitatea cîmpului electric este definită prin forța asupra unei sarcini de încercare. Cum putem pune o sarcină de încercare în interiorul unui solid dens perfect, fără a deranja *nimic și să măsurăm* forța asupra ei? Ce ar însemna acea forță, dacă am *fi măsurat-o? Ați* putea gîndi să faceți o gaură și să puneți sarcina de încercare în gaură cu oarecare spațiu în care să se miște, astfel încît să puteți măsura forța asupra ei ca asupra unei particule libere. Dar atunci ați măsura, nu cîmpul electric în interiorul dielectricului, ci cîmpul electric într-o cavitate în dielectric, ceea ce este un lucru cu totul diferit.

În mod fericit avem la dispoziție o altă linie de atac, care pleacă de la nivelul microscopic sau *atomic*. Știm că materia este alcătuită din atomi și molecule; la rîndul lor, acestea sînt compuse din particule elementare încărcate. Cunoaștem ceva despre mărimea și structura acestor atomi și cunoaștem ceva despre aranjarea lor în cristale, fluide și gaze. În loc să descriem stratul nostru dielectric ca un volum fără structură de gelatină, care nu e totuși vid, îl vom descrie ca o mulțime de molecule care populează vidul.

Dacă putem afla ce fac sarcinile electrice într-o *singură* moleculă cînd acea moleculă este doar ea într-un cîmp electric, am fi în măsură să înțelegem comportarea a două astfel de molecule separate printr-o distanță în vid. Doar va fi necesar să includem influența, asupra fiecărei molecule, a oricărui cîmp electric provenind de la cealaltă. Aceasta este o problemă de vid. Acum tot ceea ce avem de făcut este să extindem aceasta la o populație de, să spunem, 10^{20} molecule ocupînd un centimetru cub de vid, și avem dielectricul nostru real. Sperăm să facem aceasta fără a crea 10^{20} probleme separate. Dacă îl ducem la bun sfîrșit, acest program ne va recompensa în două moduri. Vom fi în măsură să spunem la sfîrșit ceva despre cîmpurile electrice și magnetice în materie, răspunzînd la întrebări ca aceea ridicată mai înainte. Ceea ce este mai important, vom înțelege cum fenomenele macroscopice electrice și magnetice din materie apar, și prin aceasta dezvăluie, natura structurii atomice de bază. Urmează să studiem efectele electrice și magnetice separat. Începem cu dielectricii. Deoarece primul nostru obiectiv este să descriem cîmpul electric produs de un atom sau o moleculă, va fi de folos să facem cîteva observații generale despre cîmpul electrostatic în exteriorul oricărui sistem de sarcini.

9.2. MOMENTELE UNEI DISTRIBUŢII DE SARCINĂ

Un atom sau moleculă constă din sarcini electrice ocupînd un mic volum, poate cîţiva angstromi cubici (10^{-24} cm^3) de spaţiu. Sîntem interesaţi în cîmpul electric în exteriorul acelui volum, care provine de la această distribuţie de sarcină destul de complicată. Ne vom ocupa în particular cu cîmpul departe de sursa prin care înţelegem la depărtare în comparaţie cu mărimea sursei însăşi. Ce trăsături ale structurii de sarcină determină în principal cîmpul în puncte îndepărtate? Pentru a răspunde, să privim la o distribuţie arbitrară de sarcini şi să vedem cum am putea face să calculăm cîmpul într-un punct în afara ei. Figura 9.2 arată o oarecare distribuţie de sarcină localizată în vecinătatea originii coordonatelor. Ar putea fi o moleculă alcătuită din mai multe nuclee pozitive şi un număr mare de electroni. În orice caz o vom presupune descrisă de o funcţie de densitate de sarcină $\rho(x, y, z)$ dată. ρ este negativ unde se află electroni şi pozitiv unde se află nuclee.

Pentru a găsi cîmpul electric în puncte depărtate, putem începe prin calcularea potenţialului distribuţiei de sarcină. Pentru a ilustra, să luăm un oarecare punct A pe axa z. (Deoarece nu presupunem vreo simetrie specială în distribuţia de sarcină, nu există nimic particular în axa z.) Fie r distanţa lui A de la origine. Potenţialul electric în A, notat φ_A, se obţine, ca de obicei, prin însumarea contribuţiilor de la toate elementele distribuţiei de sarcină:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x', y', z')\,dv'}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (3)$$

În integrală, dv' este un element de volum în interiorul distribuţiei de sarcină, $\rho(x', y', z')$ este densitatea de sarcină acolo, şi R la numitor este distanţa de la A la acest element de sarcină particular. Integrarea este efectuată în coordonatele x', y', z', desigur, şi este extinsă la toată regiunea care conţine sarcină. Putem exprima R prin r şi distanţa r' de la origine la elementul de sarcină. Folosind legea cosinusului cu θ unghiul între r' şi axa pe care se află A:

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}. \quad (4)$$

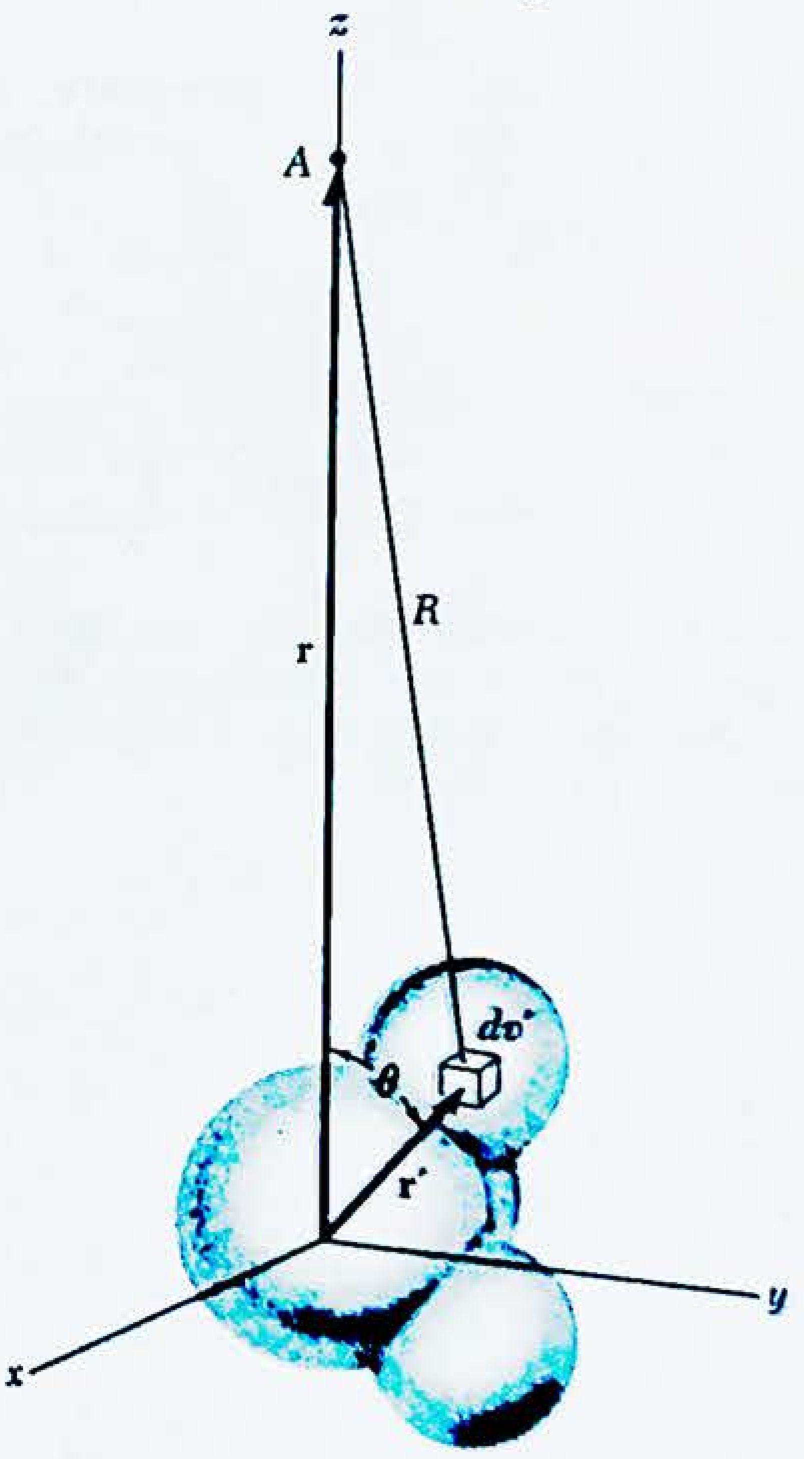


Fig. 9.2. Calcularea potenţialului, în punctul A, a unei distribuţii de sarcină moleculare.

Cu această expresie pentru R, integrala devine:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho dv'}{4\pi\varepsilon_0} [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2}. \tag{4a}$$

Vrem acum să ne folosim de faptul că pentru un punct depărtat ca A, r' este mult mai mic decît r pentru toate regiunile distribuției de sarcină. Aceasta sugerează să dezvoltăm rădăcina pătrată din ecuația 4 în puteri ale lui r'/r. Scriind

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta\right)\right]^{-1/2} \tag{5}$$

și folosind dezvoltarea $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \ldots$, obținem, după gruparea termenilor de aceeași putere în r'/r:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(\begin{matrix}\text{termeni de}\\ \text{puteri mai mari}\end{matrix}\right)\right]. \tag{6}$$

Acum r este constant în integrare, astfel încît îl putem scoate în afară și scriem ecuația pentru potențialul în A cum urmează:

$$\varphi_A = \frac{1}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int \rho dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho dv'}_{K_1} +$$
$$+ \frac{1}{r^3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int r'^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho dv'}_{K_2} + \ldots \tag{7}$$

Fiecare din integralele de mai sus, K_0, K_1, K_2 are o valoare care depinde numai de structura distribuției de sarcină. Deci potențialul pentru toate punctele de-a lungul axei z se poate scrie ca o serie de puteri în $1/r$ cu coeficienți constanți:

$$\varphi_A = \frac{K_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{K_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots \tag{8}$$

Pentru a termina problema, am avea de obținut cîmpul electric în toate celelalte puncte, pentru a calcula cîmpul electric ca — grad φ. Am mers destul de departe, totuși, pentru a înfățișa punctul esențial: comportarea potențialului la distanțe mari de la sursă va fi dominată de primul termen în serie al cărui coeficient nu este zero.

Să privim la acești coeficienți mai îndeaproape. Coeficientul K_0 este $\int \rho dv'$, care nu este altceva decît sarcina totală în distribuție. Dacă avem cantități egale de sarcină pozitivă și negativă, ca într-o moleculă neutră, K_0 va fi zero. Pentru o moleculă odată ionizată, K_0 va avea valoarea e. Dacă K_0 nu este zero, atunci oricît de mari ar fi K_1, K_2 etc., dacă ne îndepărtăm la o distanță suficient de mare, termenul K_0/r se va impune. Mai departe, potențialul se va apropia de acela al unei sarcini punctuale

în origine şi tot aşa va face şi cîmpul. Aceasta nu este deloc surprinzător.

Să presupunem că avem o moleculă neutră, astfel încît K_0 este zero. Interesul nostru se deplasează acum la cel de-al doilea termen, cu coeficientul $K_1 = \int r' \cos\theta \, \rho \, dv'$. Deoarece $r' \cos\theta$ este simplu z', acest termen măsoară deplasarea relativă, pe direcţia către A, a sarcinii pozitive şi negative. El are o valoare nenulă pentru distribuţiile schiţate în figura 9.3, unde densităţile de sarcină pozitivă şi negativă au fost indicate separat. De fapt, toate distribuţiile arătate acolo au aproximativ aceeaşi valoare a lui K_1.

Merită să notăm că dacă distribuţia este neutră, valoarea lui K_1 este independentă de poziţia originii. Adică, dacă înlocuim z' prin $(z' + z_0')$, astfel deplasînd de fapt originea, valoarea integralei nu este schimbată: $\int (z' + z_0') \rho \, dv' = \int z' \rho \, dv' + z_0' \int \rho \, dv'$ şi ultima integrală este totdeauna zero pentru o distribuţie neutră.

Evident, dacă $K_0 = 0$ şi $K_1 \neq 0$, potenţialul de-a lungul axei z va varia asimptotic (adică, în aproximaţia de distanţe mari) ca $1/r^2$. Ne aşteptăm atunci ca intensitatea cîmpului electric să se compare asimptotic ca $1/r^3$, în contrast cu dependenţa $1/r^2$ a cîmpului unei sarcini punctuale. Desigur am discutat potenţialul numai pe axa z. Ne vom întoarce la problema formei exacte a cîmpului după ce vom da o vedere generală a situaţiei.

Dacă K_0 şi K_1 sînt ambele zero, şi K_2 nu este, potenţialul se va comporta ca $1/r^3$ la distanţe mari, şi intensitatea cîmpului electric va descreşte cu inversul puterii a patra a distanţei. Figura 9.4 arată o distribuţie de sarcină pentru care K_0 şi K_1 sînt zero (şi ar fi zero oricare direcţie am fi ales-o drept axă z) în timp ce K_2 nu este zero.

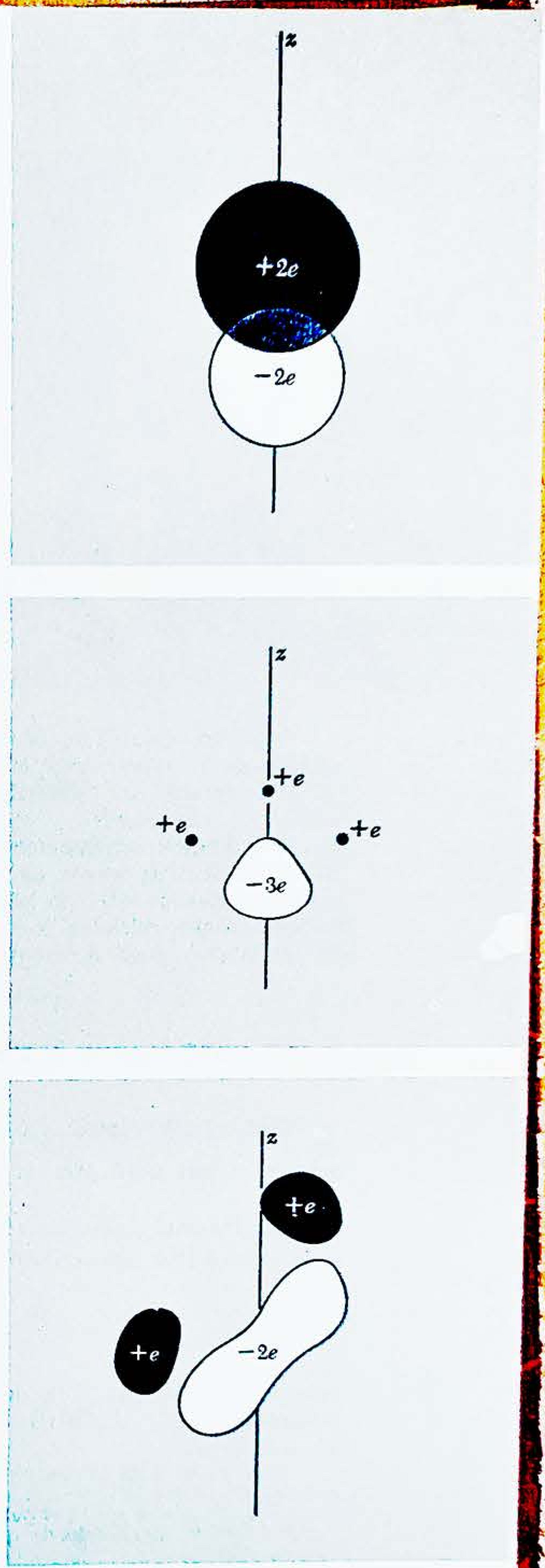


Fig. 9.3. Cîteva distribuţii de sarcină cu $K_0 = 0$, $K_1 \neq 0$. Aceasta înseamnă că fiecare are sarcina totală zero, dar moment dipolar nenul.

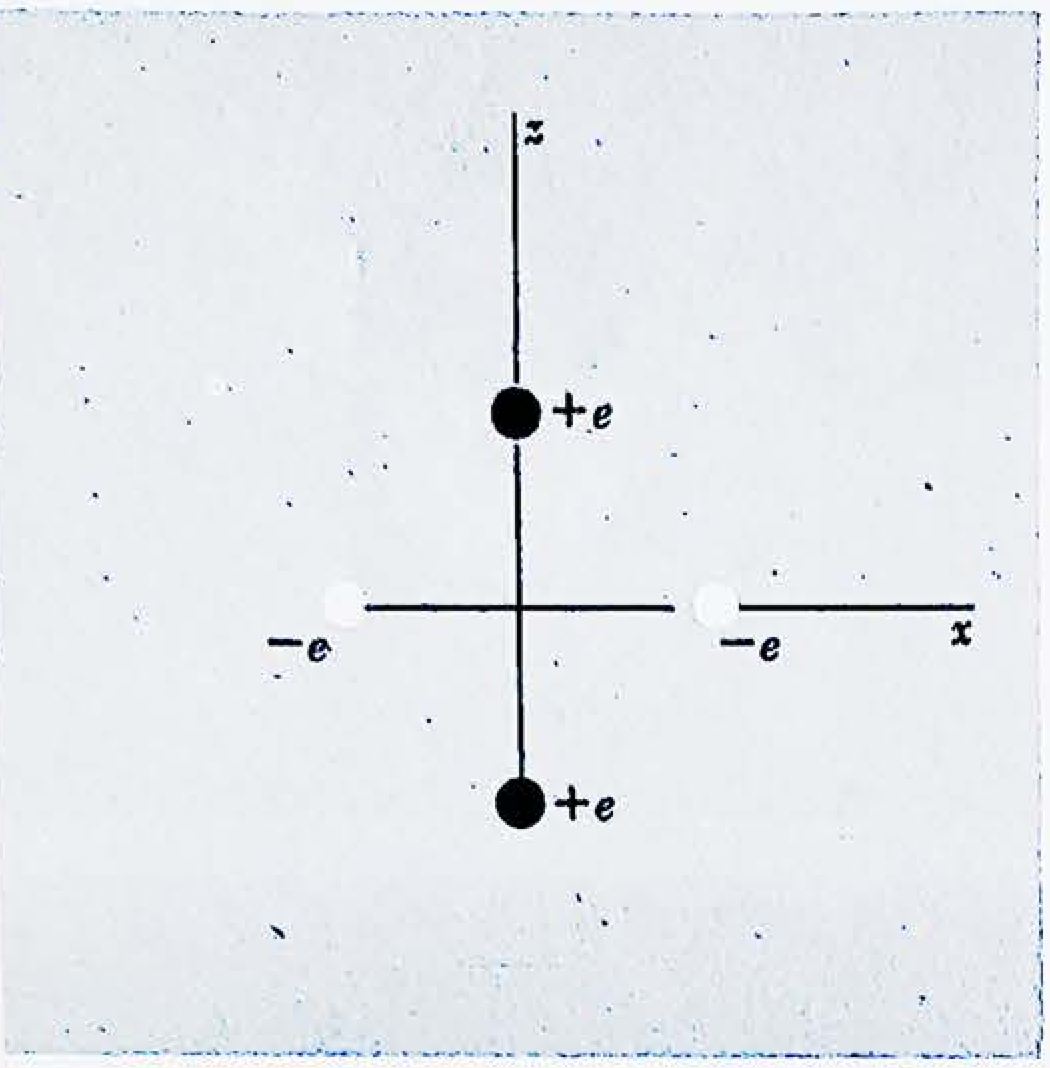


Fig. 9.4. Pentru această distribuție de sarcină, $K_0 = K_1 = 0$, dar $K_2 \neq 0$. Este o distribuție cu moment quadripolar nenul.

Cantitățile K_0, K_1, K_2 ... sînt corelate cu ceea ce se numesc *momentele* distribuției de sarcină.

Folosind această terminologie, numim K_0, care este simplu sarcina totală, *momentul de monopol*, sau *intensitatea de monopol*. K_1 este o componentă a *momentului de dipol* al distribuției. Momentul de dipol are dimensiunile *sarcină* ori *deplasare*; el este un *vector* și K_1 al nostru este componenta sa z. A treia constantă K_2 este legată de *momentul de quadripol* al distribuției, următoarea de *momentul de octopol*, și așa mai departe.*

Avantajul pentru noi de a descrie o distribuție de sarcină prin această ierarhie de momente este că ea distinge tocmai acele trăsături ale distribuției de sarcină care determină cîmpul la distanțe mari. Dacă ne ocupam cu cîmpul din imediata vecinătate a distribuției, ar fi fost un exercițiu fără rod. Pentru sarcina noastră principală, înțelegerea a ceea ce se petrece într-un dielectric, apare că *numai* intensitatea de monopol (sarcina netă) și intensitatea de dipol a părților constitutive moleculare contează. Putem nesocoti toate celelalte momente. Iar dacă moleculele sînt neutre, avem de considerat doar momentele lor dipolare.

9.3. POTENȚIALUL ȘI CÎMPUL UNUI DIPOL

Contribuția dipolară la potențialul în punctul A, distanță r de la origine, a fost dată prin $(1/4\pi\varepsilon_0 r^2)\int r' \cos\theta \; \rho \, dv'$. Putem scrie $r' \cos\theta$, care este tocmai proiecția lui $\mathbf{r}'$ pe direcția către A, ca $\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'$. Astfel putem scrie potențialul fără referință la vreo axă ca

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}' \rho dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathbf{r}'\rho dv' \tag{9}$$

care va da potențialul în orice punct. Integrala din dreapta ecuației 9 este *momentul dipolar* al distribuției de sarcină. El este un vector, evident, cu

---

* Se poate arăta că descompunerea sursei în diverși *multipoli*, dacă este efectuată complet, precizează în mod unic distribuția de sarcină. Cu alte cuvinte, dacă cunoaștem toate intensitățile de multipol putem „în principiu" deduce $\rho(x', y', z')$. Aceasta nu este foarte folositor. Momentele de quadripol sau mai înalte nu sînt vectori, dar entități mai complicate.

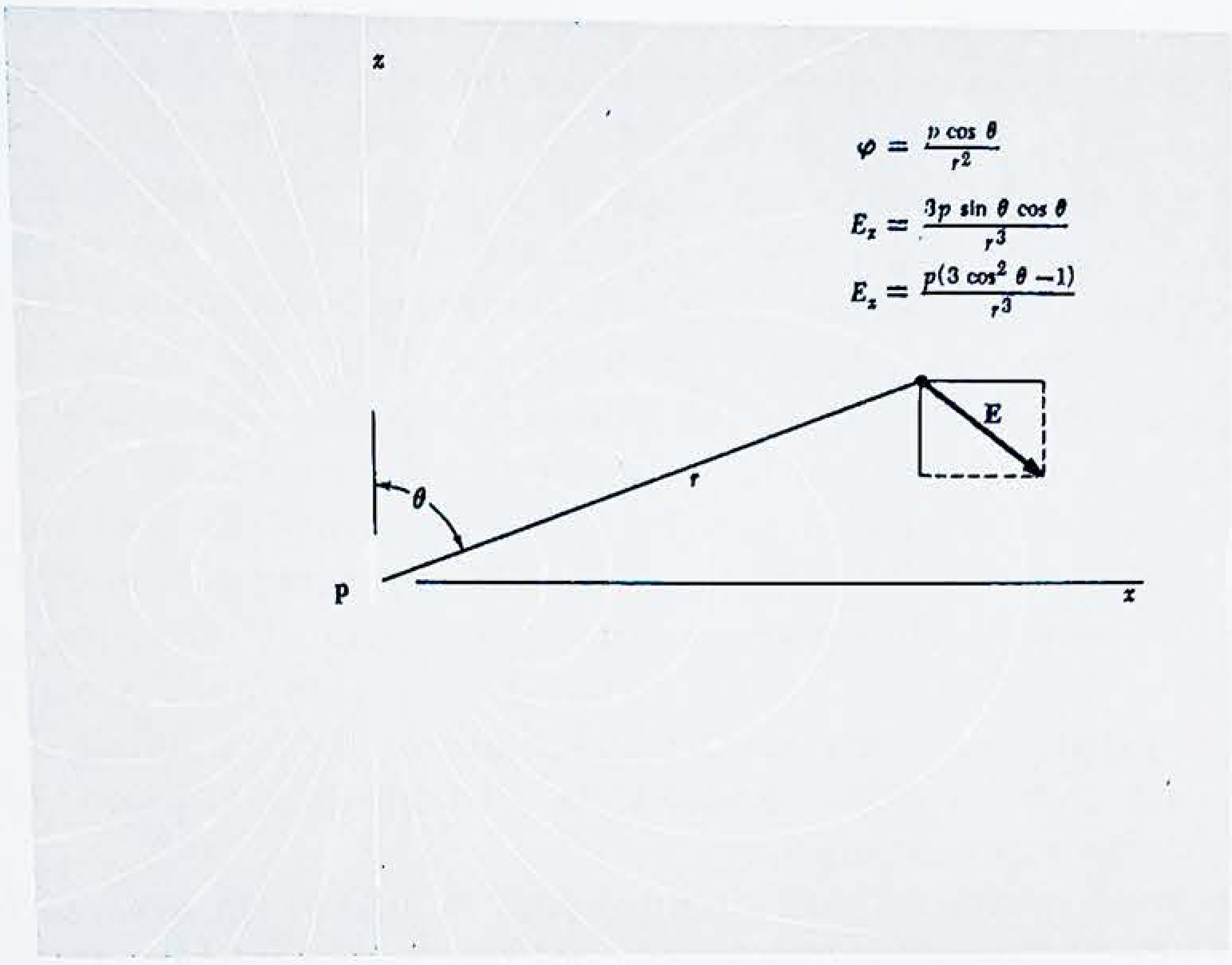


Fig. 9.5. Cîmpul electric al unui dipol, schiţat prin cîteva linii de cîmp.

dimensiunile *sarcină* ori *distanţă*. Vom nota vectorul moment dipolar prin $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\rho dv' \tag{10}$$

Folosind momentul de dipol $\mathbf{p}$, putem rescrie ecuaţia 9 ca

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{11}$$

Cîmpul electric este gradientul negativ al acestui potenţial. Pentru a vedea cum este cîmpul dipol, fixaţi un dipol $\mathbf{p}$ în origine, orientat în direcţia z (fig. 9.5). Cu acest aranjament,

$$\varphi = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{12}$$

Potenţialul şi cîmpul sînt, desigur, simetrice în jurul axei z. Să lucrăm în planul xz, unde $\cos\theta = z/(x^2 + z^2)^{1/2}$. În acest plan, atunci

$$\varphi = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{13}$$

Componentele intensităţii cîmpului electric sînt obţinute imediat:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \sin\theta \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

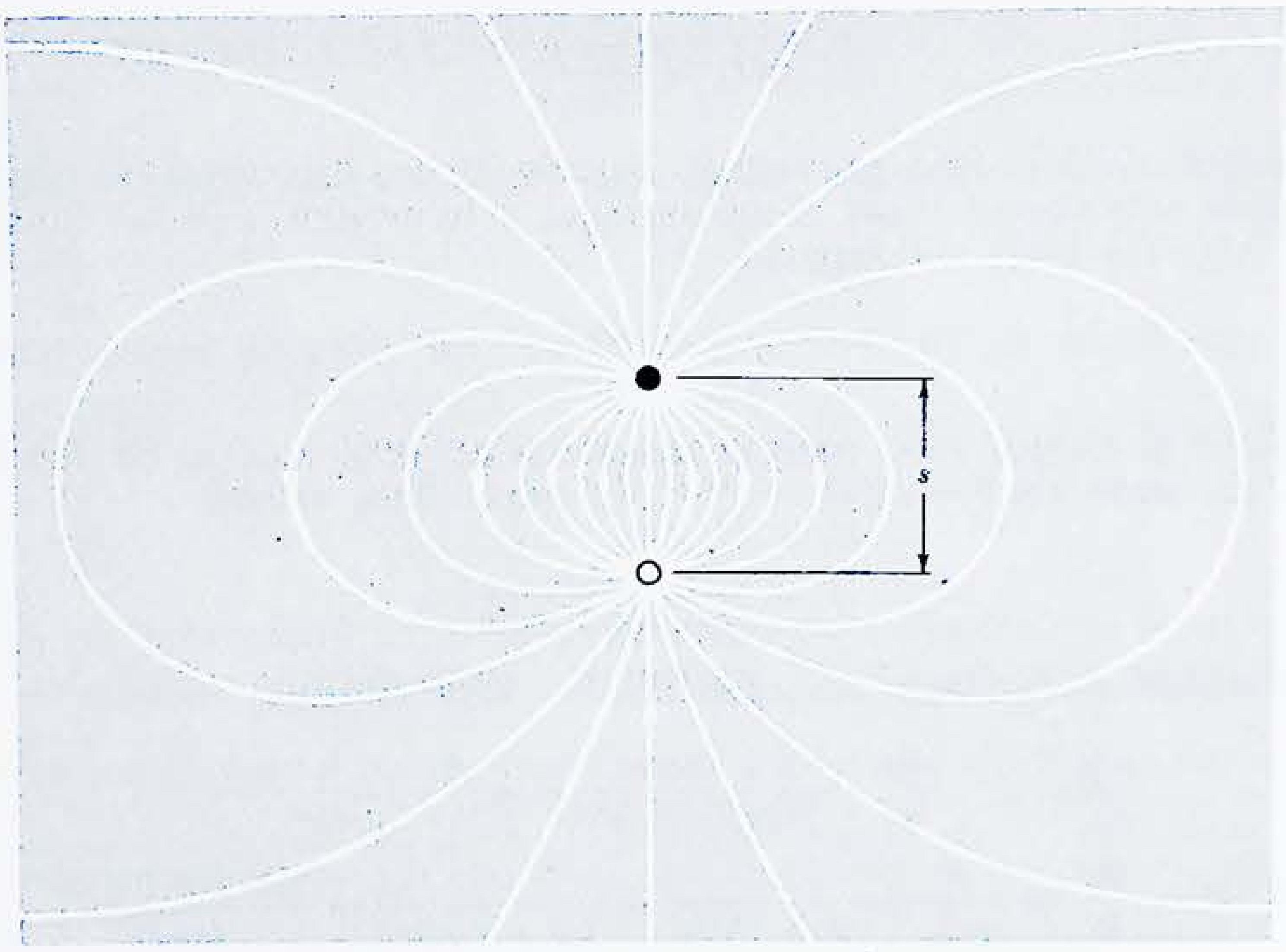
$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{14}$$

În orice direcţie de la dipol, găsim că intensitatea cîmpului electric descreşte ca $1/r^3$, cum am anticipat. De-a lungul axei z, cîmpul este paralel cu momentul dipolar **p**, şi are mărimea $2p/4\pi\varepsilon_0 r^3$. În planul ecuatorial cîmpul este orientat antiparalel faţă de **p** şi are valoarea $-\mathbf{p}/4\pi\varepsilon_0 r^3$.

Acest cîmp vă poate readuce în minte de unul pe care l-am întîlnit înainte. Amintiţi-vă sarcina punctuală în vecinătatea conductorului plan, cu „sarcina imagine". Poate cea mai simplă distribuţie de sarcină cu un moment dipolar este două sarcini punctuale, $+q$ şi $-q$, separate printr-o distanţă s. Pentru un sistem de sarcini punctuale ecuaţia 10 ia forma unei sume. Momentul dipolar al perechii de sarcini punctuale este chiar qs, şi vectorul este orientat în direcţia de la sarcina negativă la pozitivă. Am schiţat în figura 9.6 cîmpul acestei perechi de sarcini, în principal pentru a accentua că în vecinătatea sarcinilor cîmpul *nu* este de dipol. Această distribuţie de sarcină are multe momente multipolare, de fapt infinit de multe, astfel încît numai „cîmpul depărtat" la distanţe $r \gg s$ poate fi reprezentat ca un cîmp de dipol.

Pentru a genera un cîmp de dipol pînă în origine am avea să facem s să tindă la zero mărind q fără limită, astfel încît să menţinem $p = qs$ finit. Această abstracţie singulară nu este foarte interesantă. Ştim că distribuţia de sarcină moleculară va avea cîmpuri apropiate complicate, astfel încît nu am putea reprezenta regiunea apropiată în nici un caz. Din fericire nu vom avea nevoie să o facem.

Fig. 9.6. Cîmpul electric al unei perechi de sarcini punctiforme egale şi de semn contrar aproximează cîmpul unui dipol la distanţe mari în comparaţie cu distanţa s dintre sarcini.



9.4. CUPLUL ŞI FORŢA ASUPRA UNUI DIPOL ÎNTR-UN CÎMP EXTERN

Să presupunem că două sarcini q şi $-q$ sînt legate mecanic astfel încît s, distanţa dintre ele, este fixată. Puteţi gîndi despre sarcini ca fiind prinse la capătul unei scurte vergele neconductoare, de lungime s. Vom numi acest obiect un dipol. Momentul său dipolar p este simplu qs. Să punem dipolul într-un cîmp electric exterior, adică un cîmp de la o oarecare altă sursă. Cîmpul dipolului însuşi nu ne interesează acum. Să considerăm mai întîi un cîmp electric uniform, ca în figura 9.7, *a*. Capătul pozitiv al dipolului este atras spre dreapta, capătul negativ spre stînga, printr-o forţă de modul Eq. Forţa totală asupra obiectului este zero şi tot aşa este cuplul, în această poziţie. Un dipol care face un oarecare unghi θ cu direcţia cîmpului ca în figura 9.7, *b* evident este supus unui cuplu. În general, cuplul $\mathbf{N}$ este $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, unde $\mathbf{F}$ este forţa aplicată la distanţa $\mathbf{r}$ de la origine (vol. I, cap. 6). Luînd originea în centrul dipolului, astfel încît $r = s/2$, avem

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{+} + (-\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_{-} \qquad (15)$$

$\mathbf{N}$ este un vector perpendicular pe planul figurii, şi mărimea sa este

$$N = \frac{s}{2} Eq \sin\theta + \frac{s}{2} Eq \sin\theta = sqE \sin\theta = pE \sin\theta \qquad (16)$$

Aceasta se poate scrie simplu

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (17)$$

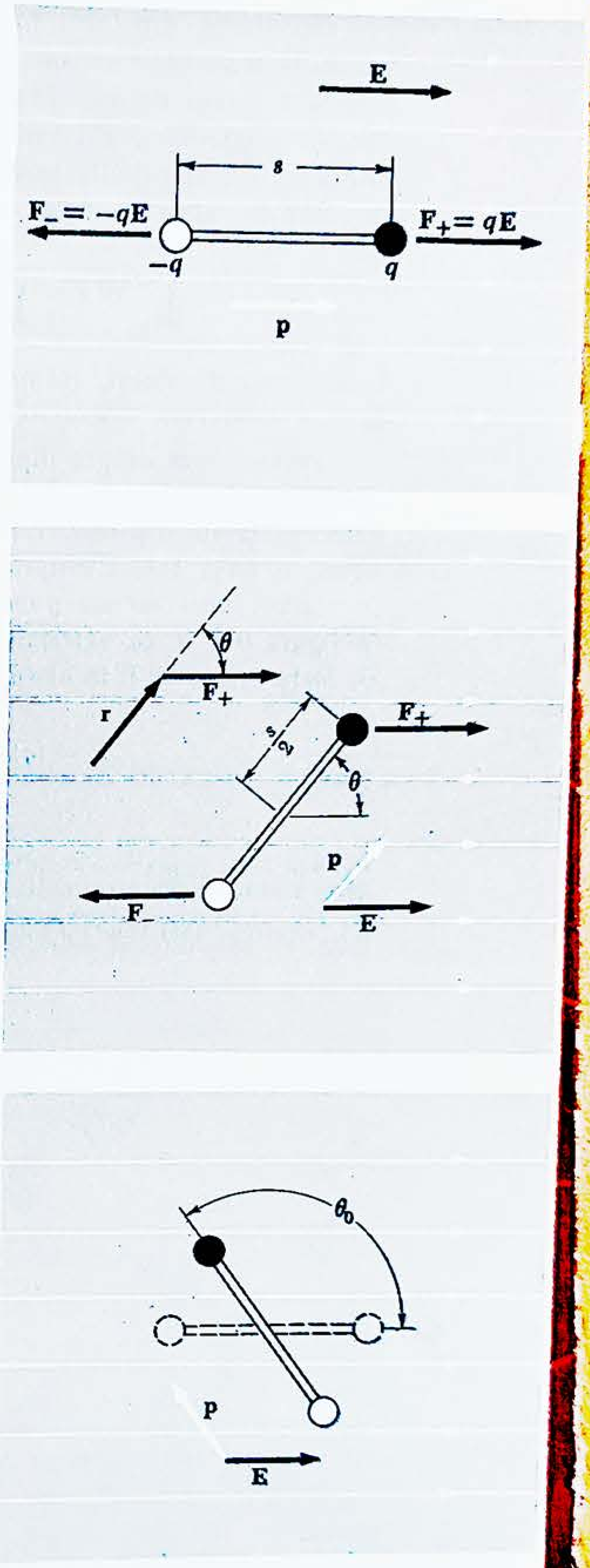


Fig. 9.7. *(a)* Un dipol într-un cîmp uniform.
(b) Cuplul asupra dipolului este $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. $\mathbf{N}$ este un vector orientat perpendicular pe pagină în jos.
(c) Lucrul mecanic efectuat pentru a roti dipolul de la o orientare paralelă cîmpului la orientarea arătată este $pE(1 - \cos\theta_0)$.

Orientarea dipolului în figura 9.7, *a* corespunde la energia cea mai joasă. Trebuie să efectuăm lucru pentru a-l roti în oricare altă poziţie. Să calculăm lucrul necesar pentru a roti dipolul dintr-o poziţie paralelă cu cîmpul, printr-un unghi oarecare θ_0, cum se arată în figura 9.7, *c*. Rotirea printr-un unghi infinitesimal $d\theta$ cere o cantitate de lucru $N d\theta$. Astfel lucrul total efectuat este

$$\int_0^{\theta_0} N d\theta = \int_0^{\theta_0} pE \sin\theta d\theta = pE\,(1 - \cos\theta_0) \tag{18}$$

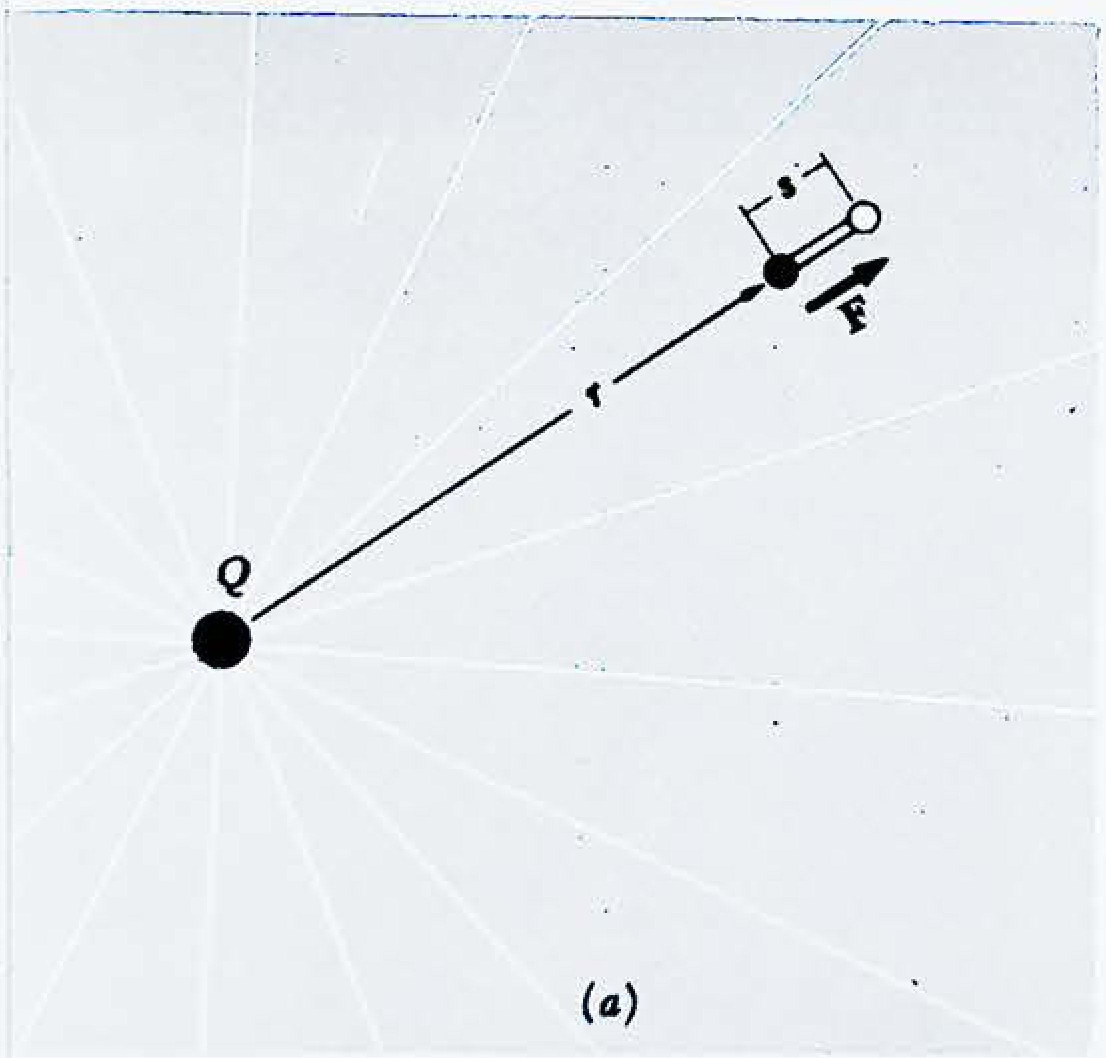
Întoarcerea dipolului, rotind capetele unul în locul celuilalt, corespunde la $\theta_0 = \pi$ şi cere o cantitate de lucru egală cu $2pE$.

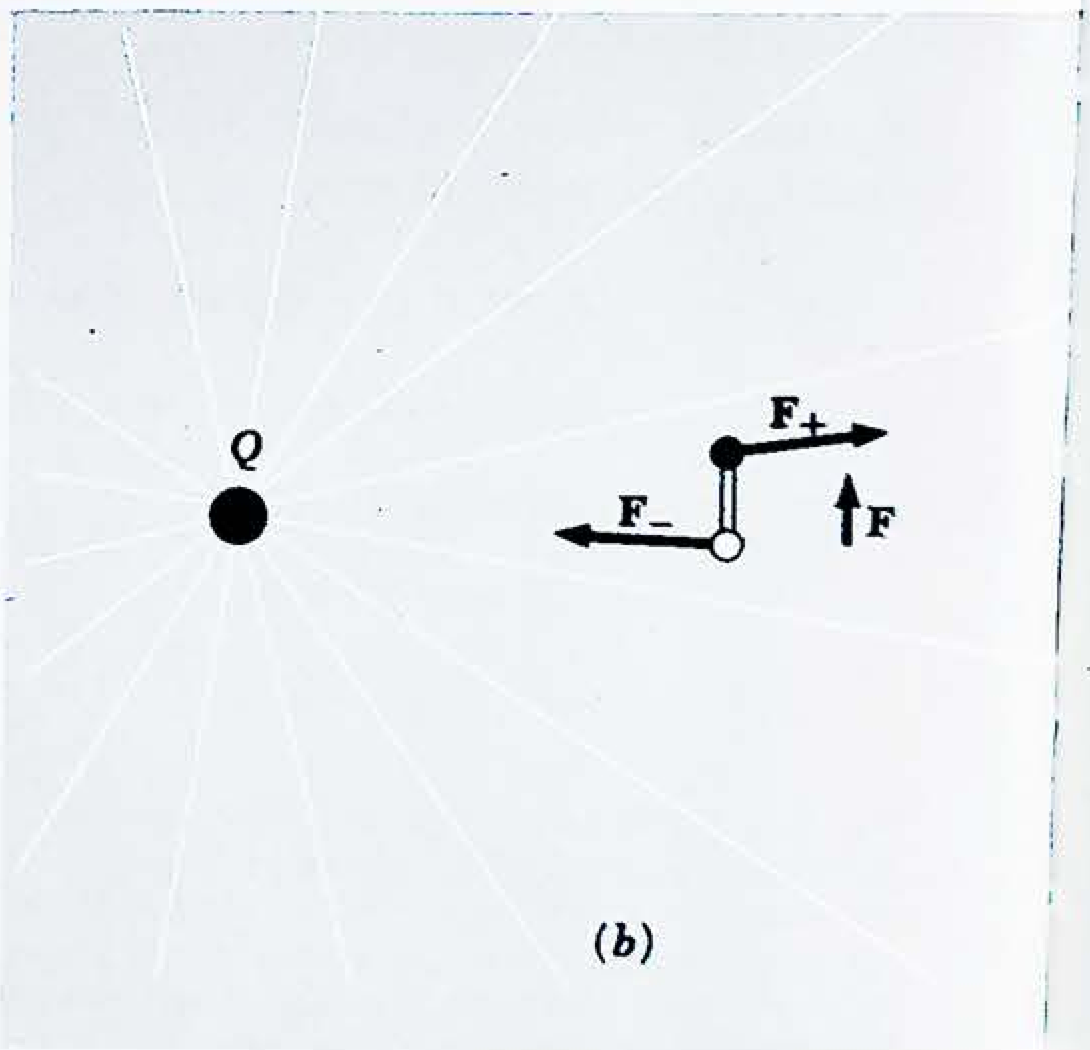
Forţa totală asupra dipolului în orice cîmp *uniform* este zero, evident, indiferent de orientare. Într-un cîmp neuniform forţele asupra celor două extremităţi ale dipolului nu vor fi în general exact egale şi opuse, şi va exista o forţă totală asupra obiectului. Un exemplu simplu este un dipol în cîmpul unei sarcini punctuale Q. Dacă dipolul este orientat radial ca în figura 9.8, *a*, cu extremitatea pozitivă mai aproape de sarcina pozitivă Q, forţa totală va fi în afară, şi mărimea sa va fi

$$F = (q)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + (-q)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r+s)^2}. \tag{19}$$

Fig. 9.8. Forţa asupra unui dipol într-un cîmp neuniform. *(a)* Forţa rezultantă asupra dipolului în această poziţie este radială înspre exterior.

(b) Forţa rezultantă asupra dipolului în această poziţie este înspre interior.





Pentru $s \ll r$, avem nevoie doar să evaluăm aceasta pînă la termeni de ordinul întîi în s/r, ceea ce facem după cum urmează:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2}\right] \approx \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2s}{r}}\right] \approx \frac{2sqQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \quad (20)$$

În funcție de momentul de dipol p, aceasta este simplu

$$F = \frac{2pQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \quad (21)$$

Cu dipolul la unghi drept față de cîmp, ca în figura 9.8, *b*, există de asemenea o forță. Acum forțele asupra celor două extremități, deși egale, nu sînt exact opuse în direcție.

Nu e greu să dezvoltăm o formulă generală pentru forța asupra unui dipol într-un cîmp electric neuniform. Forța depinde în esență de *gradienții* diverselor componente ale cîmpului. În general, componenta x a forței asupra unui dipol de moment $\mathbf{p}$ este

$$F_x = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_x \quad (22)$$

cu formule corespunzătoare pentru F_y și F_z.

9.5. DIPOLI ATOMICI ȘI MOLECULARI. MOMENTE DIPOLARE INDUSE

Descriind distribuția de sarcină dintr-un atom sau moleculă vom avea de folosit termeni clasici pentru a zugrăvi un sistem cuantic. De asemenea, vom avea de tratat ca statică o structură în care particulele sînt, într-un sens, în mișcare în mod continuu. Mai tîrziu în curs, în volumul IV, veți vedea cum mecanica cuantică, departe de a discredita imaginea pe care tocmai am schițat-o, o sprijină.

Să considerăm cel mai simplu atom, atomul de hidrogen, care constă dintr-un nucleu și un electron. Dacă vă imaginați electronul încărcat negativ rotindu-se în jurul nucleului pozitiv ca o planetă în jurul Soarelui — ca în modelul atomic al lui Niels Bohr — veți trage concluzia că atomul are, la un moment dat, un moment dipolar electric. Vectorul moment dipolar $\mathbf{p}$ este orientat paralel la raza vectoare electron-proton, și mărimea sa este e ori distanța electron-proton. Direcția acestui vector se schimbă rapid și în mod continuu pe măsură ce electronul se rotește pe orbita sa. Mai precis, *media temporală* a lui $\mathbf{p}$ va fi zero pentru o orbită circulară, dar ne-am aștepta ca componentele momentului dipolar variind periodic să genereze cîmpuri electrice rapid oscilante și radiație electromagnetică. Absența unei astfel de radiații în atomul de hidrogen normal a fost unul dintre paradoxurile fizicii cuantice timpurii. Mecanica cuantică modernă ne spune că este mai bine să gîndim despre atomul de hidrogen în starea de energie cea mai joasă (condiția uzuală a celor mai mulți dintre atomii de hidrogen din univers) ca o structură simetrică cu sarcina electronică distribuită, în media temporală, într-un nor în jurul nucleului. Nimic nu se rotește sau oscilează. Dacă am putea lua un instantaneu cu un timp de expunere mai scurt de 10^{-16} secunde, am putea distinge un electron localizat la o oarecare distanță de la nucleu. Dar pentru procese care implică timpi mult mai lungi decît acela avem, de fapt, o distribuție continuă de sarcină negativă în

jurul nucleului care se extinde în toate direcţiile cu densitate descrescătoare. Sarcina totală în această distribuţie este chiar $-e$, sarcina unui electron. Aproximativ jumătate din ea se află în interiorul unei sfere de rază 0,5 angstrom ($0{,}5 \times 10^{-8}$ cm). Densitatea descreşte exponenţial spre exterior, o sferă de numai 2,2 angstromi în rază conţine 99 de procente din sarcină.

O imagine asemănătoare este cea mai bună de luat pentru alţi atomi şi molecule. Putem trata nucleele din molecule ca sarcini punctuale; pentru scopurile noastre prezente mărimea lor este prea mică încît să conteze. Întreagă structura electronică a moleculei este de imaginat ca un singur nor de sarcină negativă de densitate variind în mod continuu. Forma acestui nor şi variaţia densităţii de sarcină în nod vor fi desigur diferite pentru diferite molecule. Dar la marginile norului densitatea va scădea totdeauna exponenţial, astfel încît are un oarecare sens să vorbim despre mărimea şi forma distribuţiei de sarcină moleculară.

Figura 9.9 reprezintă distribuţia de sarcină în atomul normal de hidrogen. Figura reprezintă o secţiune transversală prin norul de simetrie sferică, cu densitatea sugerată prin înnegrire. Evident momentul dipolar al unei astfel de distribuţii este zero. Aceeaşi afirmaţie este corectă despre orice atom în starea de energie cea mai joasă, indiferent cîţi electroni conţine, deoarece în toate aceste stări distribuţia de electroni are simetrie sferică. Este de asemenea adevărată despre orice atom ionizat, deşi un ion, desigur, are un „moment monopolar“, adică, o sarcină netă.

Pînă aici nu avem nimic foarte interesant. Dar să punem acum atomul de hidrogen într-un cîmp electric furnizat de o oarecare sursă exterioară, ca în figura 9.10. Cîmpul electric deformează atomul, trăgînd sarcina negativă



Fig. 9.9. Distribuţia de sarcină mediată în timp în atomul normal de hidrogen. Umbrirea reprezintă densitatea sarcinii (negative) electronice.

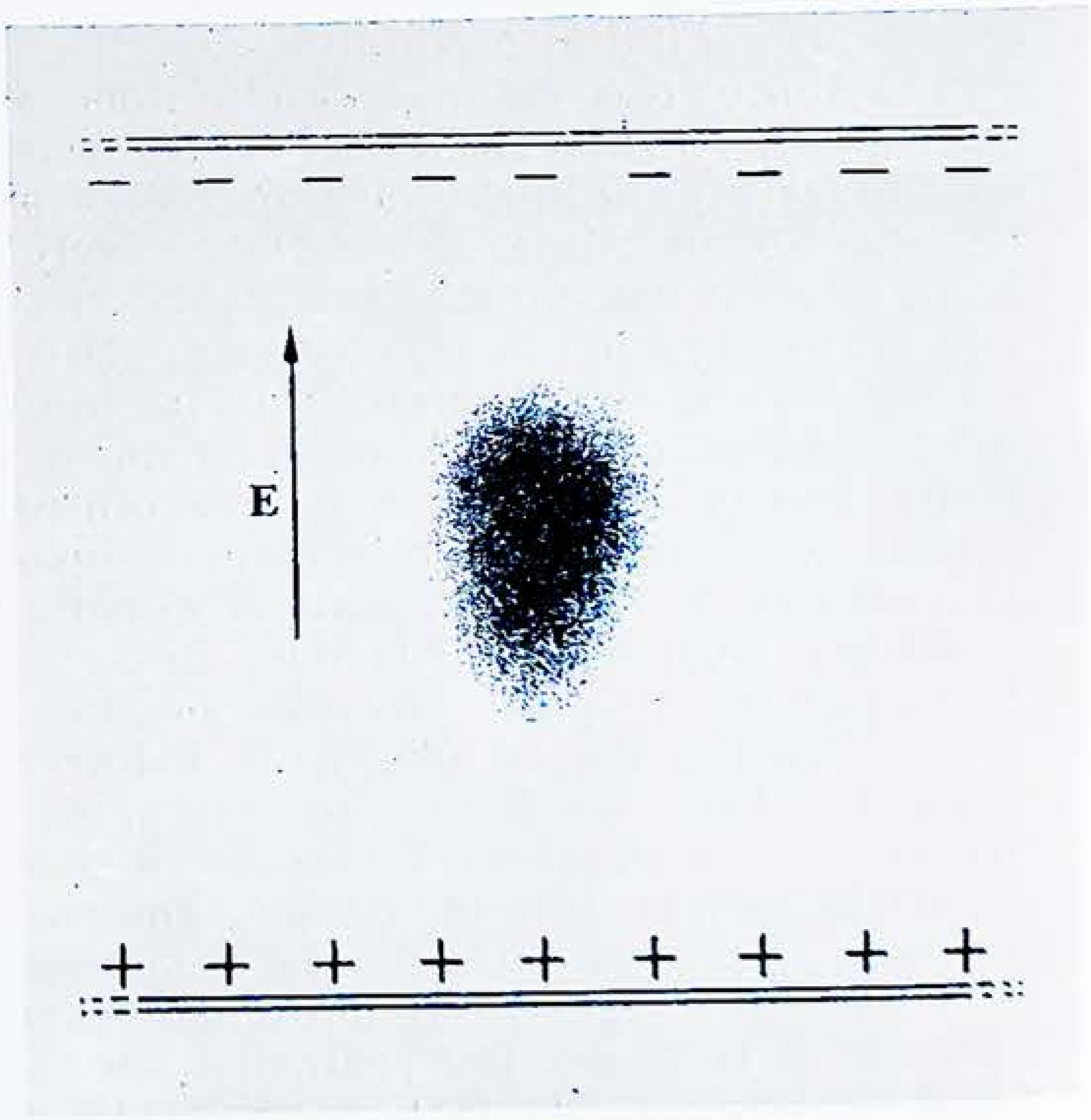


Fig. 9.10. Într-un cîmp electric sarcina negativă este trasă într-un fel, nucleul pozitiv într-alt fel. Cînd se atinge echilibrul, atomul este uşor deformat.

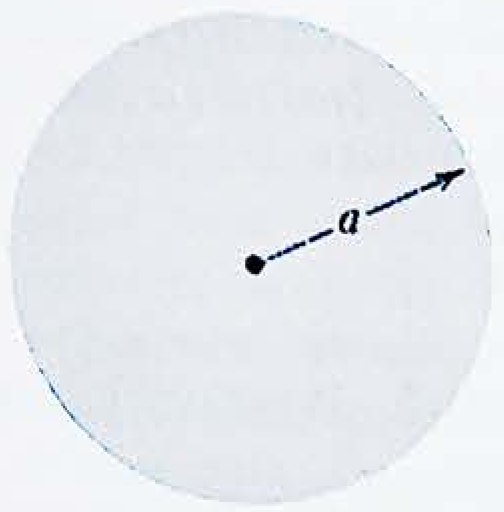


Fig. 9.11. Un model atomic primitiv. Sarcina negativă umple, cu densitate uniformă, o sferă de rază a, centrată pe nucleu.

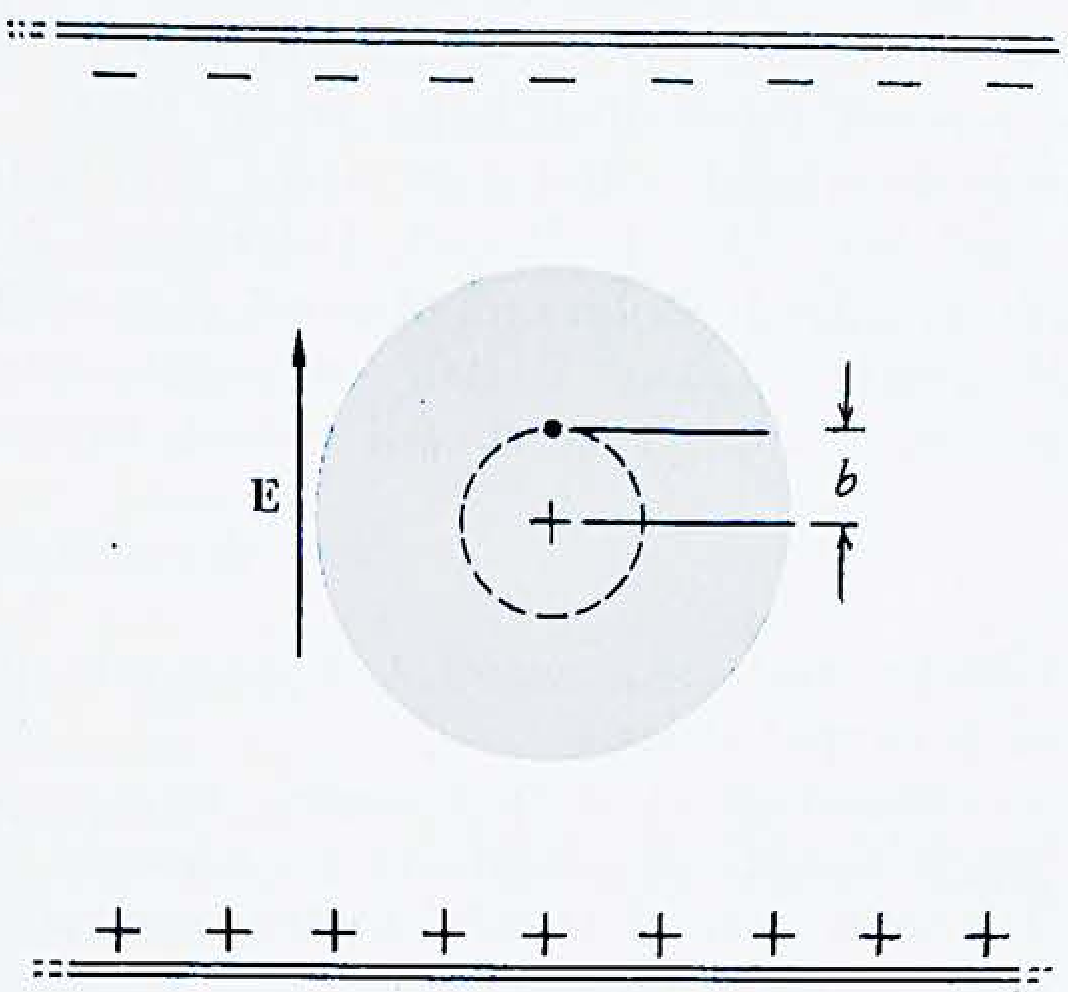


Fig. 9.12. Echilibru în cîmp extern, cu nucleul şi centrul bilei sferice de sarcină negativă separate la distanţă b.

în jos şi împingînd nucleul pozitiv în sus. Atomul deformat va avea un moment dipolar electric deoarece „centrul de greutate" al sarcinii pozitive şi acela al sarcinii negative nu mai coincid.

Putem folosi un model primitiv al atomului de hidrogen pentru a estima, ca ordin de mărime, cantitatea de deformare de aşteptat. Să presupunem că în absenţa cîmpului electric sarcina electrică negativă e este distribuită cu densitate *constantă* într-o sferă de rază a, în afara căreia este zero. Figura 9.11 ilustrează această aproximaţie folosită în locul distribuţiei reale reprezentată în figura 9.9. Să presupunem că atunci cînd cîmpul $\mathbf{E}$ este aplicat, această minge de sarcină negativă îşi păstrează forma şi densitatea şi este doar deplasată, relativ la nucleu, astfel încît nucleul rămîne la o oarecare distanţă b de la centrul sferei (fig. 9.12). La echilibru, forţa asupra nucleului datorită intensităţii cîmpului electric $\mathbf{E}$, o forţă eE newtoni acţionînd în sus, trebuie să fie compensată de atracţia în jos exercitată asupra nucleului de norul de sarcină negativă, care trage nucleul spre centru. Pentru a găsi mărimea forţei din urmă, reamintim că în interiorul unei distribuţii de sarcină sferice, într-un punct la distanţa b de la centru, cîmpul electric este acela datorat sarcinii în *interiorul* sferei de rază b. În acest caz cantitatea de sarcină în interiorul sferei de rază b este $(b/a)^3 \cdot e$, deoarece e este sarcina în interiorul sferei de rază a. La locul nucleului, de aceea, cîmpul provenind de la norul electronic este chiar $(1/4\pi\varepsilon_0 b^2)e(b/a)^3$ sau $eb/4\pi\varepsilon_0 a^3$. Egalarea acestei intensităţi de cîmp cu aceea a cîmpului aplicat de intensitate E dă condiţia de echilibru

$$E = \frac{eb}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \text{ din care } b = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3 E}{e}. \tag{23}$$

Să introducem în ea cifra rotundă 1 angstrom, sau 10^{-8} cm, pentru a. Am sugerat că o rază de această mărime ar cuprinde cea mai mare parte a sarcinii într-o distribuţie reală. Pentru E vom lua 30 000 volt/cm, un cîmp de laborator destul de intens. Cu aceste premize, ecuaţia 23 dă pentru b mărimea 2×10^{-13} cm*. Deformarea este *foarte mică*. Deplasarea este aproximativ 10^{-5} din raza atomică, şi nu mult mai mare decît raza nucleului. Momentul dipolar electric rezultant este eb, astfel încît relaţia între momentul dipolar şi cîmpul aplicat, în acest model, este

$$p = eb = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \tag{24}$$

Direcţia vectorului moment dipolar este în sus, adică, în aceeaşi direcţie ca şi cîmpul electric.

Observaţi că cîmpul electric este proporţional cu cîmpul aplicat. Ne putem aştepta ca aceasta să fie adevărat în atomul real, cel puţin pentru deformări mici, şi calculul nostru sugerează că practic orice cîmp din laborator perturbă numai foarte puţin un atom. Orice atom poate fi polarizat în acest fel. Spunem că momentul dipolar este *indus* de intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$. În toate cazurile găsim că $\mathbf{p}$ este proporţional cu $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E} \tag{25}$$

Constanta α este o proprietate a atomului numită *polarizabilitate atomică*.

Pentru modelul nostru al atomului de hidrogen polarizabilitatea α este egală cu $4\pi a^3$. Observaţi că α are dimensiunea de volum. Un calcul cuantic exact al polarizabilităţii atomului de hidrogen prezice $\alpha = (9/2)a_0^3$, unde a_0 este „raza Bohr“, $0{,}52 \times 10^{-8}$ cm, distanţa caracteristică în structura atomului de H în starea sa normală. Polarizabilităţile electrice ale mai multor tipuri de atomi, determinate experimental, sînt date în tabela 9.2.

Tabel 9.2

Polarizabilităţi atomice, în unităţi de 10^{-24} cm³

Element $\alpha =$	H 8,29	He 2,64	Li 150	Be 116	C 18,8
Ne 5,02	Na 339	A 201	K 427		

Exemplele date sînt aranjate în ordinea numărului crescător de electroni. Observaţi variaţiile mari în α. Dacă sînteţi obişnuit cu sistemul periodic al elementelor, puteţi distinge ceva sistematic aici. Hidrogenul şi metalele alcaline, litiu, sodiu şi potasiu, care ocupă prima coloană a sistemului periodic.

* La efectuarea calculelor valorile numerice se introduc în unităţi SI (N. trad.).

au valori mari ale lui α şi acestea cresc în mod constant cu creşterea numărului atomic, de la hidrogen la potasiu. Gazele nobile au polarizabilităţi atomice mult mai mici, dar acestea cresc de asemenea cînd trecem, în această familie, de la heliu la neon, la krypton. Atomii alcalini, ca o clasă, sînt uşor deformaţi de un cîmp electric, în timp ce structura electronică a atomului de gaz nobil este mult mai rigidă. Electronul exterior slab legat, sau „de valenţă", din structura atomilor alcalini este cel răspunzător pentru polarizabilitatea uşoară.

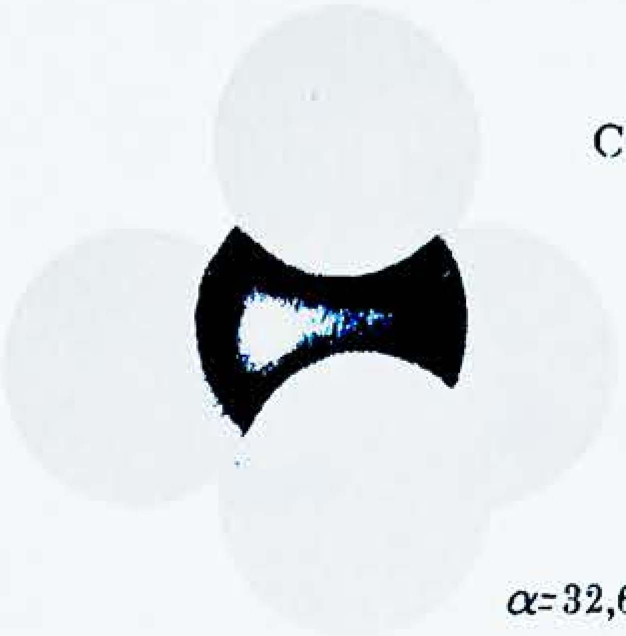


Fig. 9.13. Molecula de metan, alcătuită din patru atomi de hidrogen şi un atom de carbon.

O moleculă, de asemenea, dezvoltă un moment dipolar indus cînd i se aplică un cîmp electric. Molecula de metan reprezentată în figura 9.13 este alcătuită din patru atomi de hidrogen aşezaţi în colţurile unui tetraedru în jurul atomului de carbon central. Acest obiect are o polarizabilitate electrică, determinată experimental, de

$$32{,}6 \times 10^{-24} \text{ cm}^3.$$

Este interesant de comparat aceasta cu suma polarizabilităţilor unui atom de carbon şi patru atomi de hidrogen izolaţi. Luînd datele din tabela 9.2, găsim $\alpha_C + 4\alpha_H = 51{,}5 \times 10^{-24}$ cm³. Evident legarea atomilor într-o moleculă a modificat întrucîtva structura electronică. Măsurători ale polarizabilităţilor atomice şi moleculare au fost mult timp folosite de către chimişti drept chei la structura moleculară.

9.6. TENSORUL DE POLARIZABILITATE

Moleculele sînt în mod necesar mai puţin simetrice decît atomii. Aceasta ridică posibilitatea unui moment dipolar indus neparalel cu cîmpul electric care l-a indus. Să considerăm molecula de bioxid de carbon. Ea este o moleculă liniară „în formă de ţigară" cu atomii constituenţi aranjaţi cum se arată în figura 9.14, *a*. Ar fi surprinzător dacă această structură electronică ar fi la fel de rigidă faţă de deformări longitudinale şi transversale. În general, ne-am aştepta ca un cîmp electric aplicat paralel axei să producă un moment dipolar indus diferit în mărime de acela indus de către un cîmp de aceeaşi intensitate aplicat ca la unghi drept faţă de axa moleculară. Într-adevăr, polarizabilitatea observată a moleculei de CO_2 este $50{,}9 \times 10^{-24}$ cm³, pentru un cîmp aplicat paralel la axă, şi ceva mai puţin de jumătate din aceasta pentru un cîmp transversal. Molecula are două polarizabilităţi, pe care le-am putea nota $\alpha_{\parallel}$ şi $\alpha_{\perp}$. Ce se întîmplă dacă aplicăm un cîmp într-o oarecare altă direcţie, ca în figura 9.14, *b*?

Aceasta se poate prezice uşor. Deoarece ne ocupăm cu un fenomen linear* (efect direct proporţional cu cauza) principiul superpoziţiei are loc. Putem descompune intensitatea cîmpului **E** în componente paralelă şi perpendiculară la axa moleculară. $E_{\parallel} = E \cos \theta$ şi $E_{\perp} = E \sin \theta$. Ne putem imagina aceste componente aplicate separat, şi apoi să combinăm vectorii moment care rezultă. $E_{\parallel}$ induce un moment de-a lungul axei moleculare de mărime $p_{\parallel} = \varepsilon_0 \alpha_{\parallel} E_{\parallel} = \varepsilon_0 \alpha_{\parallel} E \cos \theta$. $E_{\perp}$ produce un moment perpendicular pe axă: $p_{\perp} = \varepsilon_0 \alpha_{\perp} E \sin \theta$. Acestea împreună dau momentul **p** produs de cîmpul original **E**. Momentul dipolar nu este paralel cu **E** dacă $\alpha_{\parallel} \neq \alpha_{\perp}$. El este orientat mai aproape de direcţia de polarizare uşoară. (Puteţi imagina un analog mecanic pentru această comportare?)

Acest exemplu arată că polarizabilitatea unei molecule nu este un simplu număr, un scalar, ci mai degrabă un set de coeficienţi care exprimă o dependenţă lineară a componentelor unui vector **p**, în acest exemplu, de acelea ale altuia, **E**. Un astfel de set de coeficienţi este numit tensor. Cea mai generală relaţie de acest fel ar implica nouă coeficienţi, şi ar putea fi scrisă în acest fel:

$$
\begin{aligned}
p_x &= \varepsilon_0 (\alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z) \\
p_y &= \varepsilon_0 (\alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z) \qquad (26) \\
p_z &= \varepsilon_0 (\alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z)
\end{aligned}
$$

Cei nouă α definiţi în acest fel constituie ceea ce este cunoscut drept tensorul de polarizabilitate.

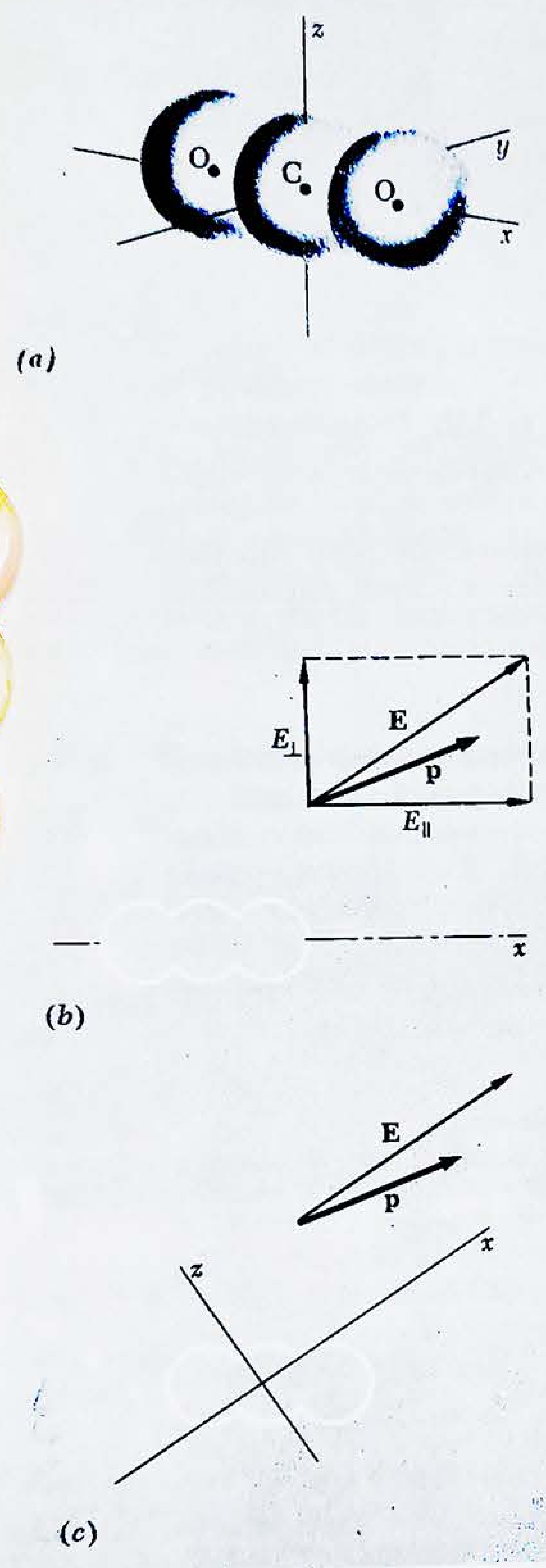


Fig. 9.14. *(a)* Molecula de bioxid de carbon polarizează mai uşor paralel cu axa lungă decît perpendicular pe aceasta.

(b) Aceasta înseamnă că componenta cîmpului aplicat $E_{\parallel}$ are un efect mai mare decît $E_{\perp}$.

(c) Astfel polarizarea indusă **p** nu este paralelă cîmpului aplicat **E**.

* Ne ocupăm de asemenea cu o moleculă *lineară* (atomi aranjaţi pe o linie dreaptă)! *Linear* are, desigur, înţelesuri cu totul diferite în cele două întrebuinţări.

În exemplul moleculei de CO_2, dacă orientăm axa x de-a lungul axei moleculei, coeficienții devin $\alpha_{xx} = \alpha_{\parallel}$, $\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha_{\perp}$; și ceilalți șase coeficienți sînt zero. Dacă am fi ales o altă orientare pentru axele de coordonate, să spunem axa x la 30° de axa moleculară, un cîmp **E** în direcția x, ca în figura 9.14, c ar produce un moment de dipol **p** avînd o componentă în direcția z. Astfel α_{zx} nu ar fi zero. (Puteți găsi valoarea pe care ar avea-o descompunînd **E** în componente paralelă și perpendiculară la axa moleculară, găsind polarizația indusă de acestea, și apoi componenta z a rezultantei.) Astfel elementele tensorului de polarizabilitate vor depinde de orientarea axelor de coordonate. Ele trebuie să se transforme la rotația axelor de coordonate astfel încît să păstreze invariantă relația dintre vectorii **E** și **p**. Această relație poate să depindă numai de direcția lui **E** față de axa fizică a moleculei, și nu de cum se întîmplă să așezăm axele x, y și z. Nu vom dezvolta aici regulile după care se transformă coeficienții tensoriali. Ele sînt analoage regulilor pentru transformarea componentelor unui vector. Dacă vreți să vedeți ce se întîmplă cu un minim de muncă, ați putea să o faceți pentru cazul bidimensional, cum se sugerează în problema 9.23.

În tensorul de polarizabilitate α numai șase coeficienți sînt independenți. Se poate demonstra că $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$ și $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$. Adică, matricea pătrată de nouă numere este totdeauna simetrică față de diagonala principală. Simetria tensorului exprimă un fapt fizic cu totul remarcabil care merită o oarecare gîndire. Aceasta înseamnă că un cîmp **E** aplicat în direcția x produce întotdeauna o componentă z a polarizării exact egală cu componenta x a polarizării care ar fi produsă de un cîmp egal aplicat după direcția z. Dacă gîndiți că aceast fapt este evident sau banal, reflectați că el este adevărat chiar pentru o moleculă care nu are nici un fel de simetrie ca molecula arătată în figura 9.15. Este un fel de teoremă de „reciprocitate" care, ca și egalitatea inductanțelor mutuale pe care am demonstrat-o în § 7.7, nu provine din simplă simetrie geometrică, ci din ceva mai general. Dacă vă întrebați cum se poate demonstra aceasta probleme 9.22 v-o va arăta.

Un corolar important al simetriei lui α este faptul că este totdeauna posibil a orienta axele, relativ la cadrul molecular, astfel încît coeficienții „nediagonali" α_{xy} etc., să fie zero. În aceste coordonate polarizabilitatea moleculei este complet descrisă de trei numere α_{xx}, α_{yy}, α_{zz}. Și aceasta este adevărat chiar pentru o moleculă care nu are nici un fel de simetrie. Nu vom folosi aceste fapte în studiul nostru limitat al dielectricilor. Ele sînt extrem de importante în investigarea proprietăților optice ale moleculelor și sînt probabil încă mai familiare chimiștilor, astăzi, decît fizicienilor. Scopul principal al acestei digresiuni asupra tensorului de polarizabilitate a fost să vă familiarizeze, prin intermediul acestui exemplu intuitiv, cu natura unui tensor.

9.7. MOMENTE DIPOLARE PERMANENTE

Unele molecule sînt construite astfel încît au momente de dipol electric chiar în absența unui cîmp electric. Ele sînt nesimetrice chiar din starea lor normală. Molecula arătată în figura 9.15 este un exemplu. Un exemplu mai simplu este dat de orice moleculă biatomică alcătuită din atomi neasemă-

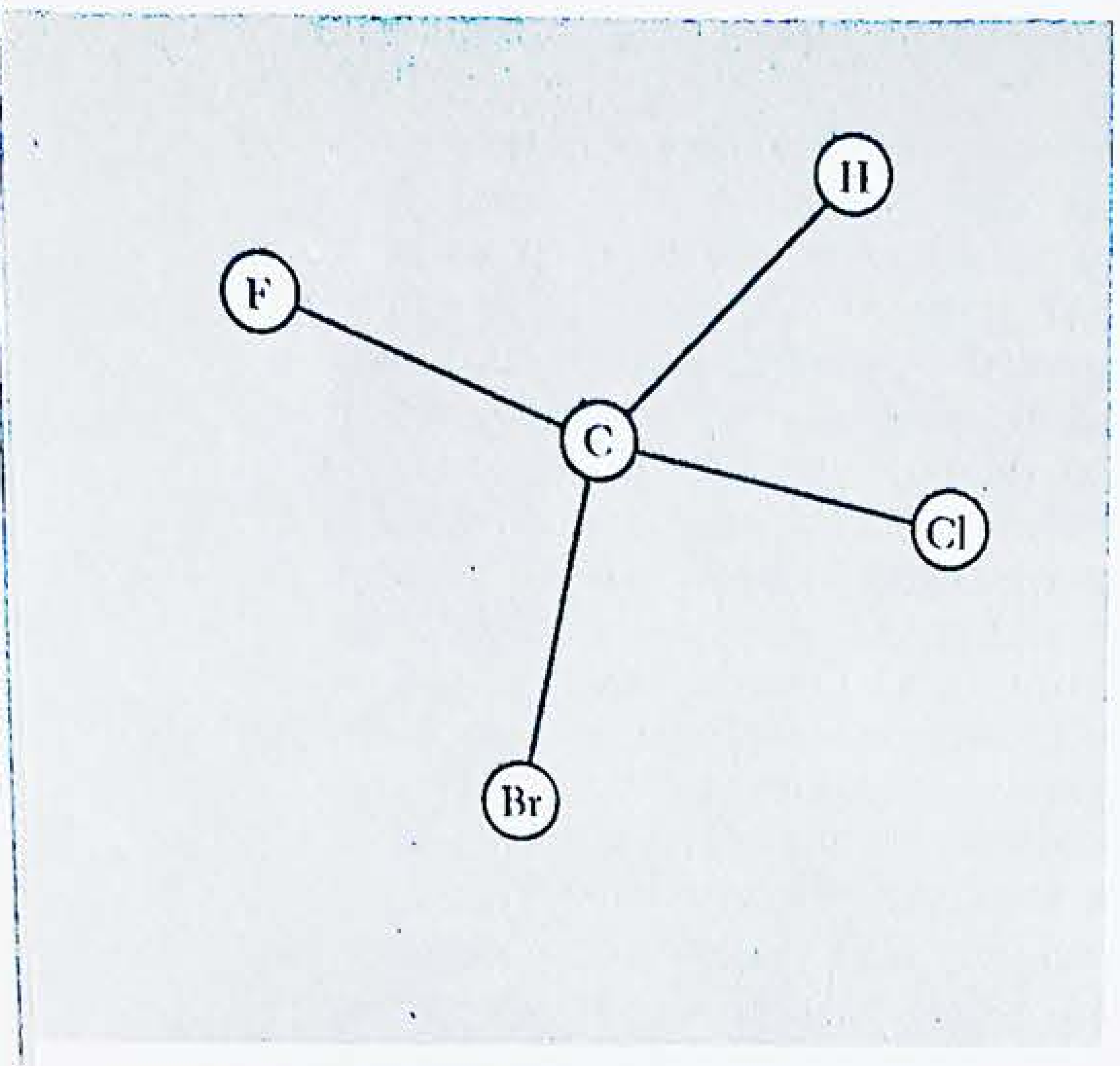


Fig. 9.15. O moleculă fără nici un fel de simetrie, bromoclorofluormetan. Aceasta este metan cu trei halogenuri diferite substituite pentru trei dintre hidrogeni. Lungimile legăturilor şi muchiile tetraedrului sînt toate puţin diferite.

nători, ca acidul clorhidric, HCl. Nu există nici un punct pe axa acestei molecule faţă de care molecula este simetrică „înainte-înapoi"; cele două capete ale moleculei sînt fizic diferite. Ar fi doar un accident dacă „centrul de greutate" al sarcinilor pozitive şi cel al sarcinilor negative s-ar întîmpla să cadă în acelaşi punct de-a lungul axei. Cînd molecula de HCl este formată din atomi iniţial sferici de H şi Cl, electronul atomului de H se deplasează parţial către structura de Cl, lăsînd atomul de hidrogen în parte dezgolit. Astfel există un oarecare exces de sarcină pozitivă la capătul hidrogenului şi un exces corespunzător de sarcină negativă la capătul clorului. Mărimea momentului dipolar rezultant, $3{,}43 \times 10^{-30}$ coulomb-metru, este echivalentă cu deplasarea unui electron aproximativ o cincime de angstrom. Prin contrast atomul de hidrogen într-un cîmp de 30 kV/cm, cu polarizabilitatea trecută în tabela 9.2, ajunge la un moment indus mai mic de 3×10^{-34} coulomb-metru. Momentele dipolare permanente, cînd există, sînt de regulă imens mai largi decît orice moment care poate fi indus de cîmpuri electrice de laborator obişnuite.* Din cauza aceasta, distincţia între molecule *polare*, cum sînt numite moleculele cu momente dipolare proprii, şi molecule *nepolare*, este foarte netă.

Am spus la începutul § 9.5 că atomul de hidrogen are, la orice moment de timp, un moment dipolar. Dar apoi l-am îndepărtat ca fiind zero în medie temporală, datorită mişcării rapide a electronului. Părem acum să vorbim despre momente dipolare moleculare ca şi cînd o moleculă ar fi un obiect staţionar obişnuit ca o paletă de baseball ale cărei capete ar putea fi examinate în voie pentru a vedea care este mai mare! Moleculele se mişcă mai încet decît electronii, dar mişcarea lor este rapidă faţă de standarde comune. De ce le putem atribui momente dipolare electrice „permanente"? Dacă această inconsistenţă v-a neliniştit, urmează să fiţi lăudaţi. Răspunsul complet nu poate fi dat fără ceva mecanică cuantică, dar diferenţa implică în esenţă scala temporală a mişcării. Timpul necesar unei molecule să interacţioneze cu mediul din jur este în general *mai scurt* decît timpul necesar mişcării intrinseci a moleculei să medieze în mod continuu momentul dipolar. Deci molecula *acţionează în realitate* ca şi cînd ar avea

* Există un motiv întemeiat pentru aceasta. Cîmpurile electrice intense în atomi şi molecule sînt în mod natural de ordinul lui $e/4\pi\epsilon_0 (10^{-10}\text{m})^2$ care este aproximativ 10^{11} V/m! Nu putem aplica un astfel de cîmp materiei în laborator din motivul că ar rupe materia în bucăţi.

momentul despre care vorbeam. Un timp foarte scurt apare drept „permanent“ în universul unei molecule şi al vecinilor ei.

Cîteva molecule polare comune sînt arătate în figura 9.16, cu direcţia şi mărimea momentului dipolar permanent indicată pentru fiecare. Molecula de apă are un moment dipolar electric deoarece este încovoiată la mijloc, axele O—H făcînd un unghi de aproximativ 105° între ele. Aceasta este o ciudăţenie cu consecinţele cele mai cuprinzătoare. Momentul dipolar al moleculei este în mare măsură responsabil pentru proprietăţile apei ca solvent, şi joacă un rol decisiv în chimia care are loc în mediu apos. Este greu de imaginat cum ar arăta lumea dacă molecula de H_2O, asemenea moleculei de CO_2, avea părţile aranjate după o linie dreaptă; probabil nu am fi aici să o observăm. Ne grăbim să adăugăm că forma moleculei de H_2O nu este o fantezie capricioasă a Naturii. Mecanica cuantică a dezvăluit clar de ce o moleculă alcătuită dintr-un atom cu opt electroni legat de doi atomi cu un electron trebuie să fie încovoiată.

Comportarea unei substanţe polare ca dielectric este izbitor de diferită de aceea a materiei compuse din molecule nepolare. Constanta dielectrică a apei este circa 80, aceea a alcoolului metilic 33, în timp ce un lichid nepolar tipic ar putea avea o constantă dielectrică în jur de 2. În substanţa nepolară aplicarea unui cîmp electric induce un mic moment dipolar în fiecare moleculă. În substanţa polară dipolii sînt deja prezenţi cu mare intensitate dar, în absenţa unui cîmp, sînt orientaţi aleatoriu astfel încît nu au nici un efect la scară mare. Un cîmp electric aplicat doar îi *aliniază* într-un grad oarecare. În ambele procese, totuşi, efectele macroscopice vor fi determinate de cantitatea netă de polarizare pe unitatea de volum.

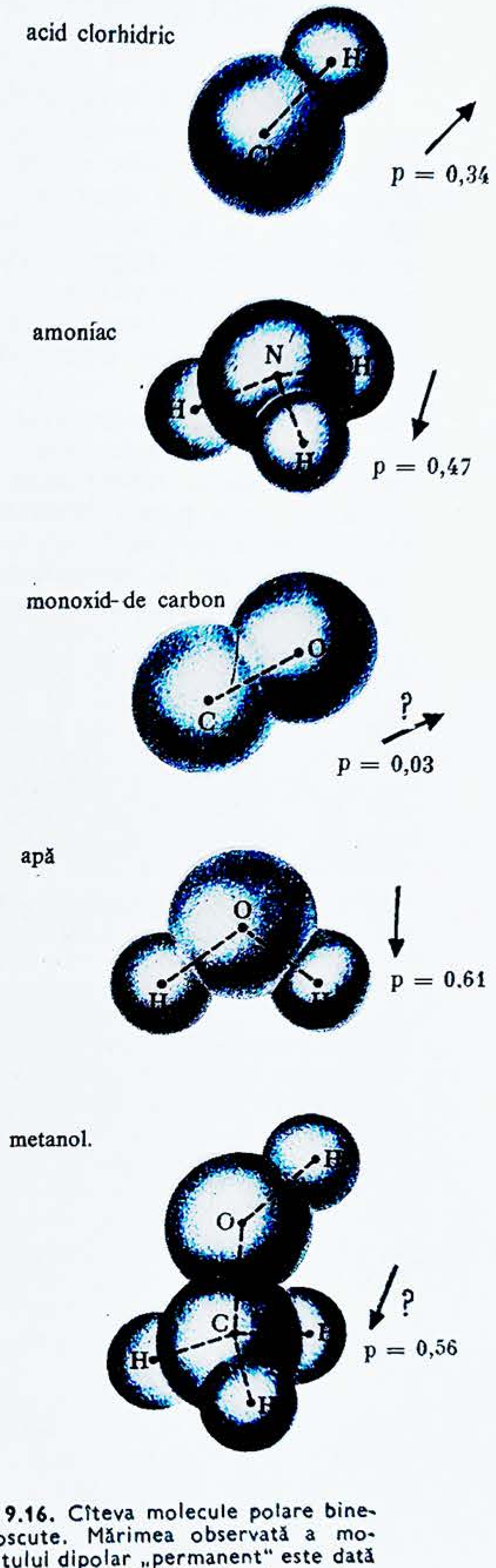


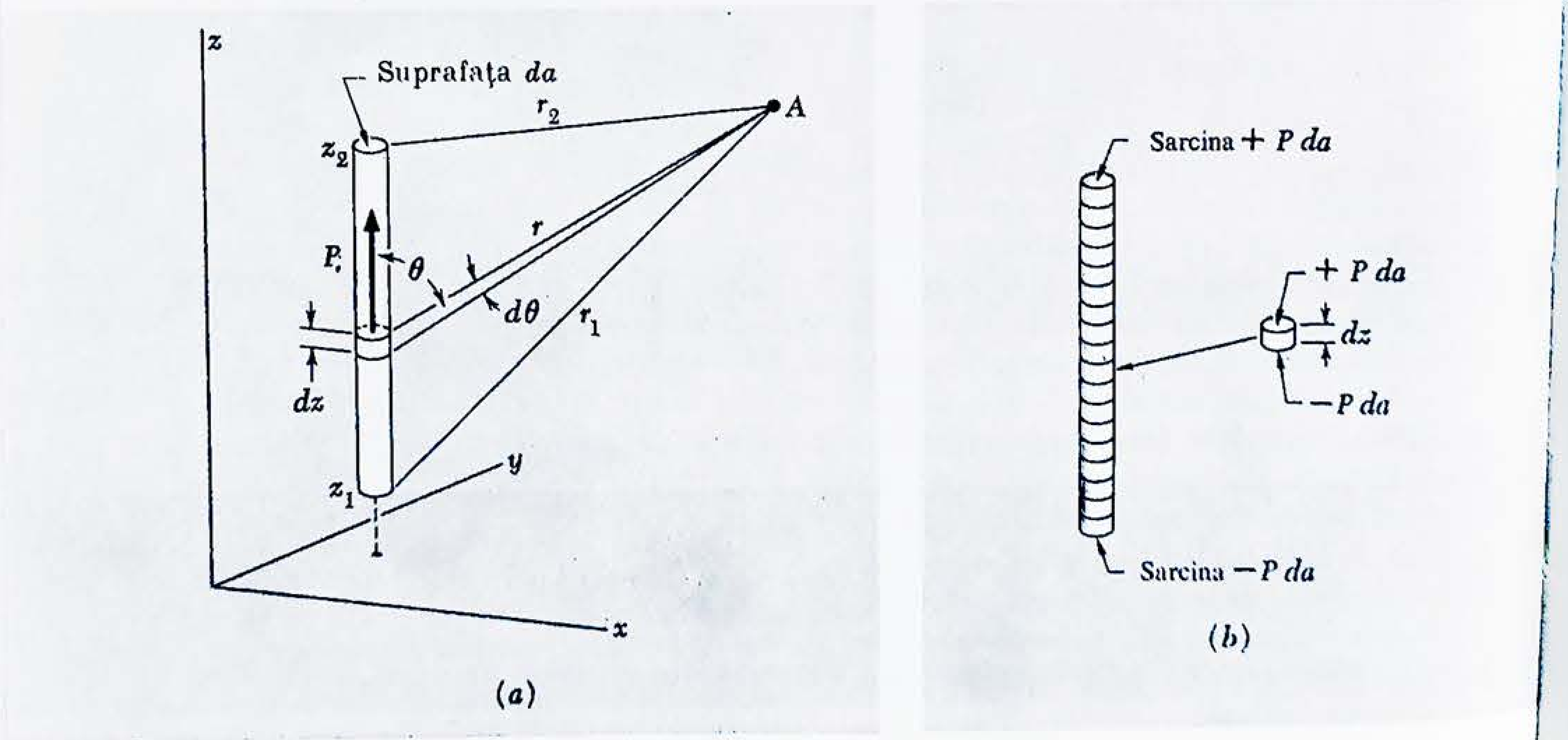
Fig. 9.16. Cîteva molecule polare binecunoscute. Mărimea observată a momentului dipolar „permanent“ este dată în unităţi de 10^{-29} coulomb-metri.

9.8. CÎMPUL ELECTRIC PRODUS DE MATERIA POLARIZATĂ

Să presupunem că alcătuim un bloc de materie prin asamblarea unui mare număr de molecule într-o regiune anterior goală din spațiu. Să presupunem de asemenea că fiecare din aceste molecule este polarizată în aceeași direcție. Nu avem nevoie să ne preocupăm acum cu natura moleculelor sau cu mijloacele prin care este menținută polarizarea lor. Ne interesează numai cîmpul electric pe care *ele* îl produc cînd sînt în această condiție; mai tîrziu putem introduce orice cîmpuri de la alte surse care ar putea fi împrejur. Dacă vreți, vă puteți imagina că acestea sînt molecule cu momente dipolare permanente care au fost alineate și înghețate în acea poziție. Tot ce avem nevoie să precizăm este N, numărul de dipoli pe centimetru cub, și momentul fiecărui dipol $\mathbf{p}$. Vom presupune că N este atît de mare încît orice mic volum macroscopic dv conține totuși un mare număr de dipoli. Intensitatea dipolară totală într-un astfel de volum este $\mathbf{p}N dv$. În orice punct departe de acest element de volum, cîmpul electric de la acești dipoli va fi practic același dacă ar fi înlocuiți printr-un singur moment dipolar de intensitatea $\mathbf{p}N dv$. Vom numi $\mathbf{p}N$ densitatea de polarizare și o vom desemna prin $\mathbf{P}$, o cantitate vectorială cu dimensiunile sarcină-cm/cm^3 sau sarcină/cm^2. Atunci $\mathbf{P}\, dv$ este momentul dipolar de asociat cu orice mic element de volum dv în scopul calculării cîmpului electric la o distanță. În treacăt, materia noastră a fost alcătuită doar din molecule neutre; nu există nici o sarcină netă în sistem sau pe vreo moleculă, astfel încît avem de considerat *numai* momentele dipolare drept surse ale cîmpului la distanță.

În figura 9.17 este arătată o coloană subțire, sau cilindru, din acest material polarizat. Secțiunea sa transversală este da, și se întinde vertical

Fig. 9.17. O coloană de material polarizat *(a)* produce același cîmp, în oricare punct exterior *A*, ca două sarcini, una la fiecare capăt al coloanei *(b)*.



de la z_1 la z_2. Densitatea de polarizare **P** în coloană este uniformă pe toată lungimea şi orientată în direcţia z pozitivă. Urmează să calculăm potenţialul electric, într-un oarecare punct exterior, al acestei coloane de polarizare. Un element al cilindrului, de înălţime dz, are un moment dipolar $\mathbf{P}dv = \mathbf{P}da dz$. Contribuţia sa la potenţialul în punctul A poate fi scrisă referindu-ne la formula ecuaţiei 12 pentru potenţialul unui dipol:

$$d\varphi_A = \frac{P\, da\, dz \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{27}$$

Potenţialul datorat întregii coloane este

$$\varphi_A = \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_a} \frac{dz \cos\theta}{r^2}. \tag{28}$$

Aceasta este mai simplu decît arată; $dz \cos\theta$ este tocmai $-dr$, astfel încît integrandul este o diferenţială totală, $d(1/r)$. Rezultatul integrării este atunci

$$\varphi_A = \frac{Pda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{29}$$

Ecuaţia 29 este exact aceeaşi cu expresia pentru potenţialul în A care ar fi produs de două sarcini punctuale, o sarcină pozitivă de mărime Pda stînd în vîrful coloanei la o distanţă r_2 de A, şi o sarcină negativă de aceeaşi mărime la celălalt capăt al coloanei. O sursă constînd dintr-o coloană de materie polarizată uniform este echivalentă, cel puţin în ceea ce priveşte cîmpul în toate punctele *exterioare*, cu două sarcini concentrate.

Putem dovedi aceasta riguros fără nici un fel de matematică. Să considerăm o mică secţiune a coloanei de înălţime dz, conţinînd moment dipolar în cantitatea Pda dz. Să facem acum o imitaţie sau un înlocuitor pentru aceasta, luînd un izolator nepolarizat de aceeaşi mărime şi formă şi punînd o sarcină $+P\,da$ sus şi o sarcină $-\,Pda$ jos. Acest mic bloc are acum acelaşi moment dipolar ca acea bucată din coloana originală şi de aceea va aduce o contribuţie identică la cîmpul din orice punct îndepărtat A. (Cîmpul din interiorul înlocuitorului nostru, sau foarte aproape de el, poate fi diferit de cîmpul originalului — nu ne preocupăm de aceasta.) Să facem acum un întreg set de astfel de blocuri, şi să le aşezăm unul peste altul pentru a imita coloana polarizată. Ele trebuie să dea acelaşi cîmp în A ca şi întreaga coloană, deoarece fiecare bloc dă aceeaşi contribuţie ca şi perechea din original (fig. 9.17, *b*). Să vedem acum ce avem! La fiecare îmbinare sarcina pozitivă de pe suprafaţa de sus a unui bloc coincide cu sarcina negativă de pe suprafaţa inferioară a blocului de deasupra, făcînd sarcina zero. Singurele sarcini lăsate necompensate sînt sarcina negativă $-Pda$ de pe faţa de jos a celui mai jos bloc şi sarcina pozitivă $+Pda$ de pe faţa de sus a celui mai de sus bloc. Văzute dintr-un punct îndepărtat cum este A, acestea arată ca sarcini punctuale. Tragem concluzia, ca şi înainte, că două astfel de sarcini produc în A exact acelaşi cîmp ca şi coloana de material polarizat.

Fără alte calcule putem extinde acestea la o placă, sau un cilindru drept, de orice proporţii, polarizat uniform într-o direcţie perpendiculară pe feţele paralele (fig. 9.18, *a*). Placa poate fi subdivizată într-un mănunchi de coloane şi potenţialul în exterior va fi suma contribuţiilor coloanelor, fiecare dintre ele putînd fi înlocuită printr-o sarcină la fiecare capăt.

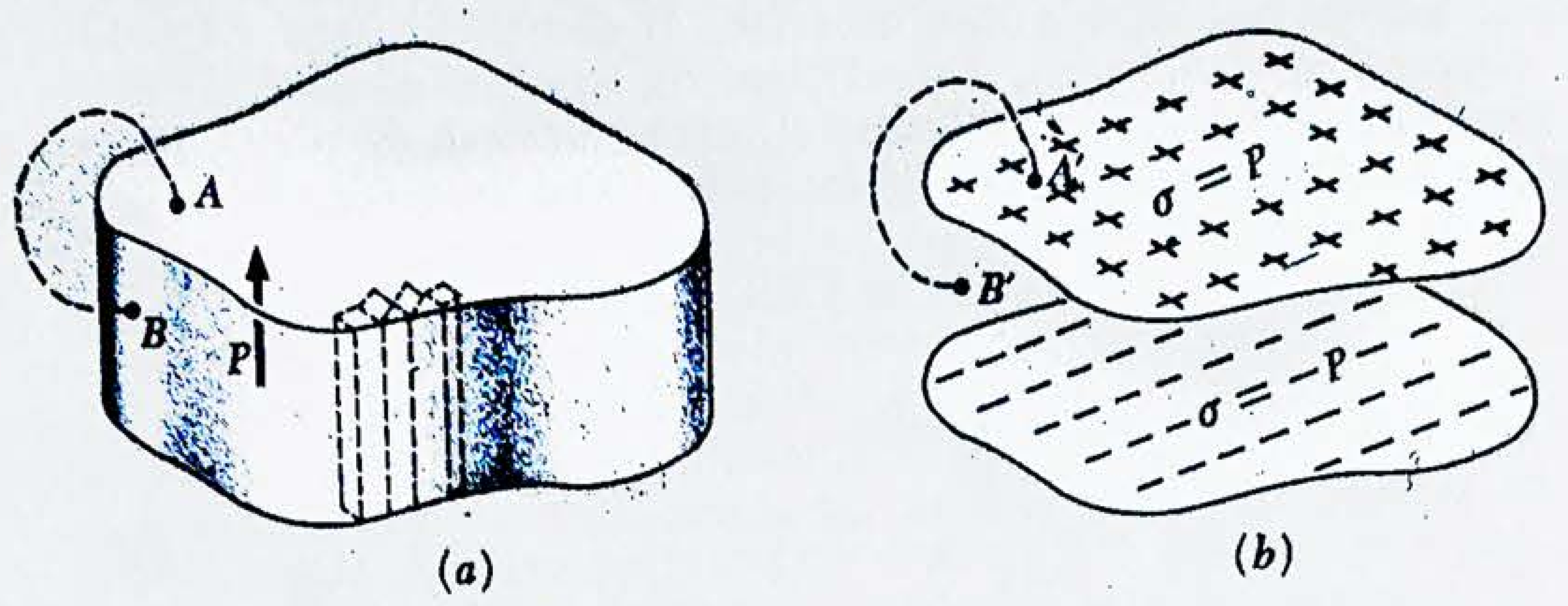


Fig. 9.18. O bucată de material polarizat (a) este echivalentă cu două straturi de sarcină (b), în măsura în care este considerat cîmpul din afară.

Sarcinile de pe fața de sus, Pda pe fiecare capăt de coloană de arie da, alcătuiesc un strat uniform de densitate de sarcină superficială $\sigma = P$ coulomb pe unitate de arie. Tragem concluzia că potențialul oriunde *în afara* unei plăci sau cilindru uniform polarizat este tocmai ceea ce ar rezulta de la două straturi de sarcină superficială localizate unde suprafețele de sus și de jos ale plăcii erau localizate, purtînd densitatea de sarcină de suprafață constantă $\sigma = +P$ și $\sigma = -P$ respectiv (fig. 9.18, *b*).

Nu sîntem cu totul gata să spunem ceva despre cîmpul *în interiorul* plăcii. Totuși, cunoaștem potențialul pe toate punctele de pe suprafața plăcii, sus, jos sau pe margini. Oricare două astfel de puncte, A și B, pot fi conectate printr-o traiectorie trecînd în întregime prin cîmpul extern, astfel încît integrala curbilinie $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ este în întregime determinată de cîmpul exterior. Ea trebuie să fie aceeași ca și integrala de-a lungul curbei $A'B'$ din figura 9.18, *b*. Un punct literalmente pe suprafața dielectricului ar putea fi în interiorul razei de acțiune a cîmpurilor moleculare intense, „cîmpul apropiat" al moleculei pe care l-am neglijat. Să convenim a defini frontiera dielectricului drept o suprafață îndeajuns de îndepărtată de cel mai exterior nucleu atomic — 10 sau 20 de angstromi ar fi suficient — astfel încît în orice punct în afara acestei frontiere, „cîmpul apropiat" al atomilor individuali aduc o contribuție neglijabilă la întreaga integrală de la A la B.

Cu aceasta în minte, să privim la o placă relativ subțire, lată, de material polarizat, de grosime t arătată în secțiune transversală în figura 9.19, *a*. Figura 9.19, *b* arată, de asemenea în secțiune, straturile echivalente de sarcină. Pentru sistemul de două straturi de sarcină cunoaștem cîmpul, desigur, în spațiul atît în afara cît și dintre straturi. Intensitatea cîmpului în interior, departe de muchii, trebuie să fie σ/ε_0, cu orientare în jos, și diferența de potențial între punctele A' și B' este de aceea $\sigma t/\varepsilon_0$ volt. Aceeași *diferență de potențial* trebuie să existe între punctele corespunzătoare A și B pe placa noastră polarizată, deoarece întreg cîmpul *exterior* este același în cele două sisteme.

Este cîmpul interior identic, de asemenea? Cu siguranţă *nu*, deoarece placa este plină de nuclee pozitive şi electroni, cu cîmpuri de milioane de volţi pe centimetru cu direcţia variind din loc în loc. Dar un lucru *este* acelaşi: integrala de linie a cîmpului, efectuată pe *orice* traiectorie internă de la A la B, trebuie să fie tocmai $\varphi_B - \varphi_A$, care aşa cum am văzut este aceeaşi cu $\varphi_{B'} - \varphi_{A'}$, care este egală cu $\sigma t/\varepsilon_0$, sau Pt/ε_0. Aceasta trebuie să fie astfel deoarece introducerea sarcinilor atomice, indiferent de distribuţia lor, nu poate distruge proprietatea conservativă a cîmpului electric, exprimată în afirmaţia că $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ este independentă de traiectorie, sau rot $\mathbf{E} = 0$.

Ştim că în figura 9.19, *b* diferenţa de potenţial între straturile superior şi inferior este aproape constantă, cu excepţia vecinătăţii muchiilor, deoarece cîmpul electric interior este practic uniform. De aceea în regiunea centrală a plăcii noastre polarizate diferenţa de potenţial între suprafeţe trebuie să fie în mod asemănător constantă. În această regiune integrala de linie $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ luată din *orice* punct A de pe faţa de sus a plăcii la *orice* punct B de pe faţa inferioară, pe *orice* traiectorie, trebuie totdeauna să dea aceeaşi valoare Pt/ε_0. Figura 9.20 este o „vedere mărită" a regiunii centrale a plăcii, în care moleculele polarizate au fost făcute să arate ca moleculele de H_2O toate orientate în acelaşi fel. Nu am încercat să figurăm cîmpurile foarte intense care există între molecule, şi în interiorul lor. (La zece angstromi depărtare de o moleculă de apă cîmpul ei se ridică la mai multe sute de kilovolt/cm, cum puteţi descoperi din tabela 9.1 şi ecuaţia 14.) Trebuie să vă imaginaţi nişte configuraţii destul de complicate de cîmp în vecinătatea fiecărei molecule. Observaţi că $\mathbf{E}$ în $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ înseamnă *cîmpul electric total* într-un punct dat din spaţiu, în interiorul sau în exte-

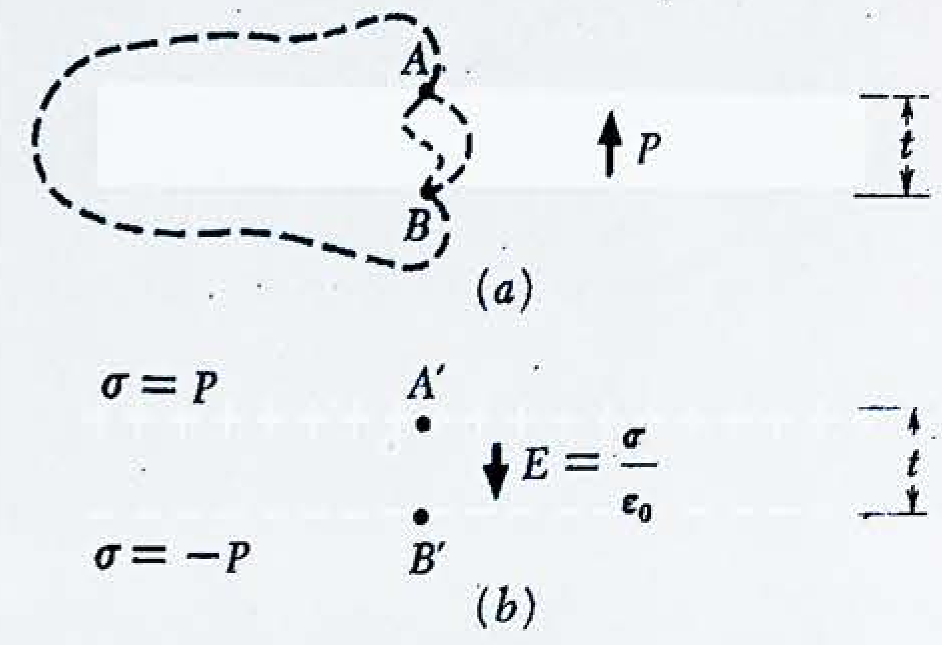


Fig. 9.19. Integrala curbilinie a lui **E** de la *A* la *B* trebuie să fie aceeaşi pe toate traiectoriile, interioare sau exterioare, deoarece cîmpurile electrice „microscopice" sau „atomice" interioare sînt de asemenea conservative (rot **E**=0). Straturile echivalente de sarcină *(b)* au acelaşi cîmp exterior.

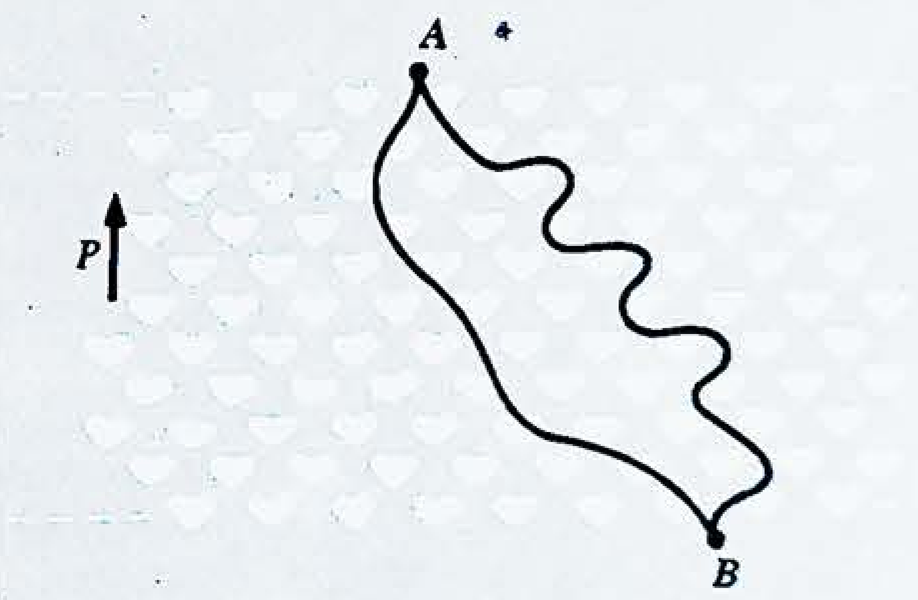


Fig. 9.20. De-a lungul *oricărei* traiectorii de la *A* la *B* integrala curbilinie a cîmpului microscopic real este aceeaşi.

rorul unei molecule; el cuprinde aceste cîmpuri complicate şi intense tocmai menţionate. Am obţinut concluzia remarcabilă că *orice* traiectorie prin acest amestec de sarcini şi cîmpuri, indiferent dacă ocoleşte moleculele sau le pătrunde, trebuie să dea aceeaşi valoare pentru integrala curbilinie, anume valoarea pe care o găsim în sistemul din figura 9.19, *b* unde cîmpul este aproape uniform şi are intensitatea P/ε_0.

Aceasta ne spune că *media spaţială* a cîmpului electric în interiorul plăcii noastre polarizate trebuie să fie $-\mathbf{P}/\varepsilon_0$. Prin medie spaţială a unei intensităţii $\mathbf{E}$ pe un oarecare volum V, care am putea-o nota $\langle\mathbf{E}\rangle_V$, înţelegem aceasta:

$$\langle\mathbf{E}\rangle_V = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{E}\,dv. \tag{30}$$

Un mod de a evalua cîmpul în multe elemente dv egale şi mici în care V ar putea fi împărţit ar fi de a măsura cîmpul de-a lungul fiecărei linii într-un „mănunchi de fibre" de linii paralele strînse. Tocmai am văzut că integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}$ de-a lungul oricărei sau tuturor acestor traiectorii este aceeaşi ca şi cînd am fi într-un cîmp electric constant de intensitate $-\mathbf{P}/\varepsilon_0$. Aceasta este justificarea pentru concluzia că $\langle\mathbf{E}\rangle = -\mathbf{P}/\varepsilon_0$.

Cîmpul mediu este o cantitate macroscopică. Volumul pe care luăm media trebuie să fie destul de larg încît să cuprindă foarte multe molecule, altfel media ar fluctua de la un astfel de volum la cel învecinat. Cîmpul mediu $\langle\mathbf{E}\rangle$ definit prin ecuaţia 30 este de fapt singurul fel de cîmp electric *macroscopic* în interiorul unui dielectric despre care putem vorbi. El dă singurul răspuns satisfăcător, în contextul unei descrieri macroscopice a materiei, la întrebarea „Care este cîmpul electric în interiorul unui material dielectric?"

Intensitatea $\mathbf{E}$ în integrandul din dreapta, în ecuaţia 30, îl putem numi cîmpul *microscopic*. Dacă punem pe cineva să măsoare valorile de cîmp de care avem nevoie pentru integrala curbilinie, el va măsura cîmpuri electrice în vid, în prezenţa, desigur, a sarcinii electrice. Va fi nevoie de instrumente foarte mici, deoarece se poate cere măsurarea cîmpului într-un oarecare punct tocmai în interiorul unui capăt al unei anumite molecule. Avem vreun drept să vorbim în acest fel despre integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}$ de-a lungul unei traiectorii oarecare care ocoleşte colţul de sud-est al unei molecule date şi apoi tunelează prin molecula vecină? Da. Justificarea este evidenţa masivă că legile electromagnetismului se aplică la o scară de dimensiuni mult mai mică decît dimensiunile atomice. Putem chiar descrie o experienţă care ar servi la măsurarea mediei cîmpului electric microscopic de-a lungul unei traiectorii definită bine în limitele dimensiunilor atomice. Tot ceea ce avem de făcut este să trimitem o particulă încărcată energetică, de exemplu o particulă alpha, prin material. Din schimbarea totală a impulsului său cîmpul electric mediu care a acţionat asupra sa, pe întreaga traiectorie, ar putea fi dedus.

Să lucrăm cu un exemplu numeric care implică materiale polarizate. Imaginaţi-vă un disc de rază 1 cm şi 0,3 cm grosime, ca în figura 9.21, *a*. Fie densitatea moleculelor în disc 3×10^{22} molecule/cm^3. Să presupunem că ele sînt toate molecule polare, fiecare cu un moment dipolar 6.0×10^{-30} coulomb-metru. În fine — şi aceasta este o presupunere destul de

forţată — să presupunem că ele sînt toate alineate în sus, ca moleculele din figura 9.20, cu momentele lor dipolare orientate în aceeaşi direcţie, paralel la axa discului. Vom discuta cîmpul într-un punct A în interiorul discului, un punct B în afara discului, şi un punct C la 10 cm depărtare de axă. Polarizarea $\mathbf{P}$ are valoarea

$$P = Np = (3 \times 10^{-28}\ \mathrm{m^{-3}}) \times \times (6{,}0 \times 10^{-30}\ \text{coulomb} - \text{metru}) = = 0{,}18\ \text{coulomb/metru}^2. \quad (31)$$

Straturile echivalente de sarcină sînt arătate în figura 9.21, *c*. Dacă aceste straturi se extindeau la infinit, cîmpul în punctul A între ele ar fi fost simplu σ/ε_0, sau $2{,}03 \times \times 10^{10}$ V/m. Aceasta ar fi o aproximaţie destul de bună în acest caz, deoarece separarea între straturi este relativ mică în comparaţie cu diametrul lor. În realitate, cîmpul va fi ceva mai mic. Cîmpul în afară, la punctul B, ar fi zero pentru suprafeţe infinite, dar în cazul real va avea o valoare relativ mică, îndreptată spre dreapta. Discontinuitatea în E la stratul pozitiv va fi exact σ/ε_0, sau P/ε_0. Dacă avem nevoie să calculăm cîmpurile în A sau B precis, putem folosi formula dezvoltată în capitolul 2, pentru cîmpul unui disc de sarcină superficială, superpunînd cîmpurile a două astfel de discuri localizate în mod convenabil. Pentru a estima cîmpul într-un punct depărtat ca C, tot ce avem nevoie să cunoaştem este momentul dipolar total al obiectului. Văzut din C nu contează mult cum sînt distribuiţi dipolii individuali. Discul se comportă ca un singur dipol de intensitate $p_{tot} = \text{Volumul} \cdot P = 0{,}942 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3} \cdot 0{,}18$ coulomb/metru$^2 = 1{,}7 \cdot 10^{-7}$ C · m. Cîmpul pe axa unui astfel de dipol, la 10 cm depărtare, este

$$E_C = \frac{2p_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C \cdot m}}{(0{,}1)^3} = = 3{,}06 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}. \quad (32)$$

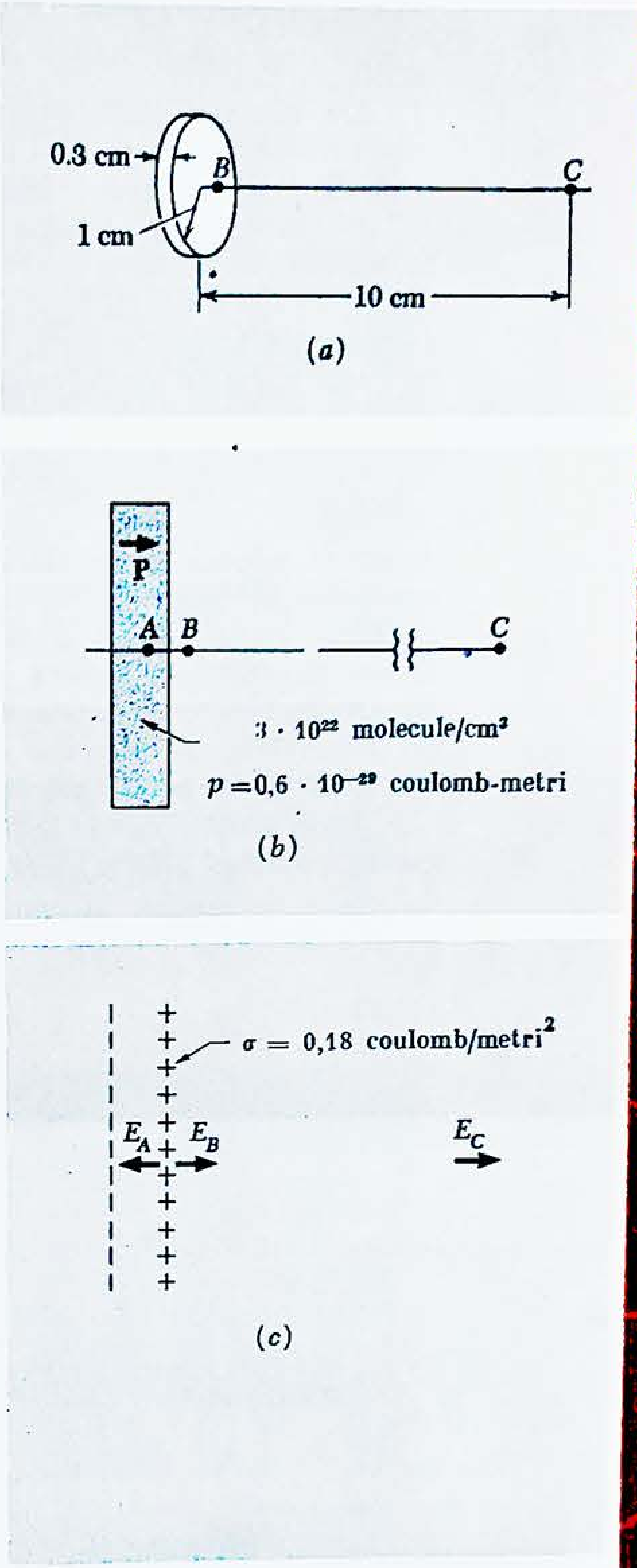


Fig. 9.21. *(a)* Un disc alcătuit din molecule polare cu momentele dipolare orientate toate în aceeaşi direcţie paralel la axă. *(b)* Secţiunea transversală a discului. *(c)* Secţiunea transversală a discurilor echivalente de sarcină.

9.9. CONDENSATORUL UMPLUT CU DIELECTRIC

Am discutat mult în jurul condensatorului cu dielectric, dar acum putem aduce asupra acestei probleme o oarecare înţelegere a însuşi dielectricului. Să considerăm mai întîi cele două plăci conductoare în vid cu sarcina $-Q$ pe placa de sus, sarcina $+Q$ pe placa de jos. Figura 9.22, *a* este chiar figura 9.1, *a*, cu care am început acest capitol, în secţiune transversală. Cîmpul între plăci $\mathbf{E}_0$ este egal cu $Q/\varepsilon_0 A$, şi este orientat în sus. Diferenţa de potenţial între plăci, φ_{12}, este egală cu $Qt/\varepsilon_0 A$. Capacitanţa condensatorului gol, C_0, este dată de formula de acum familiară

$$C_0 = \frac{Q}{\varphi_{12}} = \frac{\varepsilon_0 A}{t}. \tag{33}$$

Acum să aducem între plăci un dielectric. Cîmpul va polariza atomii sau moleculele în dielectric. Nu putem, în acest stadiu, să prezicem mărimea momentului dipolar indus al fiecărei molecule deoarece cîmpul care acţionează asupra moleculei în această situaţie nu este tocmai intensitatea cîmpului $\mathbf{E}_0$ dar include de asemenea o contribuţie de la celelalte molecule. Direcţia polarizării, în orice caz, va fi paralelă cu $\mathbf{E}_0$, pentru un dielectric care este izotrop. Să notăm mărimea densităţii de polarizare, oricare ar fi, prin $\mathbf{P}$.

Avem acum sistemul arătat în figura 9.22, *c*, constînd din două straturi reale de sarcină plus o placă de material polarizat. *Superpoziţia* celor două distribuţii de sarcină pe care le-am analizat deja, aceea a figurii 9.22, *a*, şi aceea a figurii 9.19, *a*, este arătată în figura 9.22, *b*. Cîmpul electric va fi suma cîmpurilor acelor două distribuţii, cîmpul $\mathbf{E}_0$ a două straturi reale de densitate de sarcină superficială $\sigma = Q/A$, plus intensitatea cîmpului $\mathbf{E}'$ al celor două straturi de sarcină de densitate $\sigma' = P$, cu care placa polarizată este echivalentă. Observaţi că $\mathbf{E}'$ este orientat *invers* faţă de $\mathbf{E}_0$ deoarece $\mathbf{P}$ este în aceeaşi direcţie ca $\mathbf{E}_0$; stratul de sarcină echivalentă pozitivă se află lîngă placa încărcată negativ. Motivul pentru aceasta, desigur, este că sarcina negativă de pe placă a polarizat atomii dielectricului atrăgînd părţile lor pozitive şi respingînd părţile lor negative, trăgînd astfel sarcina pozitivă mai aproape de acea placă.

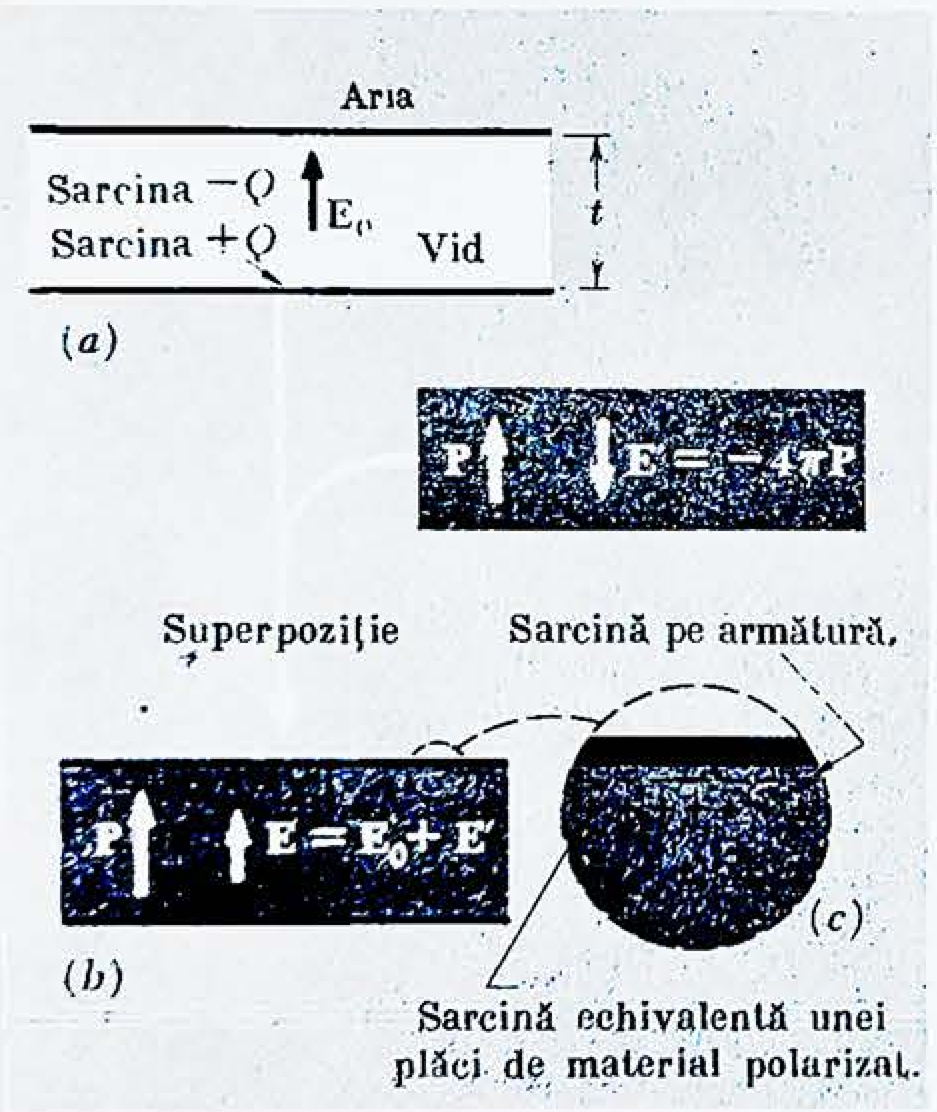


Fig. 9.22. Un condensator cu dielectric între armături *(c)* poate fi analizat ca superpoziţie a unui condensator încărcat-vid *(a)* şi a unei plăci de material polarizat *(b)*.

În interiorul condensatorului, atunci, intensitatea cîmpului electric **E** este

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/\varepsilon_0 \tag{34}$$

Mărimea diferenței de potențial dintre plăci a devenit

$$\varphi_{12} = (E_0 - P/\varepsilon_0)t \tag{35}$$

Sarcina pe condensator este totuși aceeași. Dacă plăcile ar fi conectate printr-o sîrmă, sarcina Q s-ar scurge, dielectricul relaxîndu-se între timp înapoi la starea sa nepolarizată. Deoarece diferența de potențial a fost redusă prin factorul $(E_0 - P/\varepsilon_0)E_0$, în comparație cu condensatorul de vid la aceeași sarcină, capacitatea, $C = Q/\varphi_{12}$, a crescut prin inversul acelui factor:

$$C = C_0 \frac{E_0}{E_0 - P/\varepsilon_0}. \tag{36}$$

Este mai bine să exprimăm aceasta prin **E**, intensitatea cîmpului electric (cîmpul macroscopic, sau *mediu*) care există acum în condensator. Deoarece $E_0 = E + P/\varepsilon_0$, din ecuația 34, avem:

$$C = C_0 \frac{E + P/\varepsilon_0}{E} = C_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{P}{E}\right). \tag{37}$$

Raportul lui P și E este o proprietate intrinsecă a materialului dielectric. Acest raport este numit *susceptibilitatea electrică* a materialului, și simbolul χ_e este folosit în mod obișnuit. Raportul este adimensional. Întreaga cantitate în paranteze în ecuația 37 este numită *constanta dielectrică* a materialului notată prin k.

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E, \quad k = 1 + \chi_e. \tag{38}$$

Acestea sînt doar definiții: fizica este în ecuațiile 34 și 37.

Strict vorbind, umplerea condensatorului de vid cu material dielectric crește capacitatea tocmai prin factorul χ_e doar dacă umplem tot spațiul din jur ca și spațiul între plăci. În exemplul de mai sus, am presupus tacit că separarea dintre plăci t este atît de mică în comparație cu lărgimea plăcilor că „efectele de margine", incluzînd mica cantitate de sarcină care este pe exteriorul plăcilor în vecinătatea marginii (vezi fig. 3.11, *b*) sînt neglijabile. Se poate face o afirmație cu totul generală despre un sistem de conductori de orice formă sau dispunere care este în întregime scufundat într-un dielectric omogen și izotrop — de exemplu într-o cuvă mare de ulei. Cu orice sarcini, Q_1, Q_2 etc., pe diverșii conductori, intensitatea cîmpului macroscopic $\mathbf{E}_{med}$ oriunde în mediul dielectric este exact $1/\chi_e$ ori cîmpul $\mathbf{E}_{vid}$ care ar exista acolo cu aceleași sarcini pe aceeași conductori în vid (fig. 9.23). Desigur toate diferențele de potențial sînt reduse prin același factor, $1/k$.

Chestiunile noastre neterminate privesc două probleme de o natură cu totul diferită:

(*i*) Dorim să înțelegem comportarea oricărui sistem de izolatori și conductori, date fiind constantele materialelor implicate. Adică, vrem să fim în stare să calculăm cîmpurile electrice în exteriorul dielectricilor și intensitatea cîmpului macroscopic **E** în interior, oricare ar fi condițiile de frontieră impuse prin potențialele și sarcinile pe conductori.

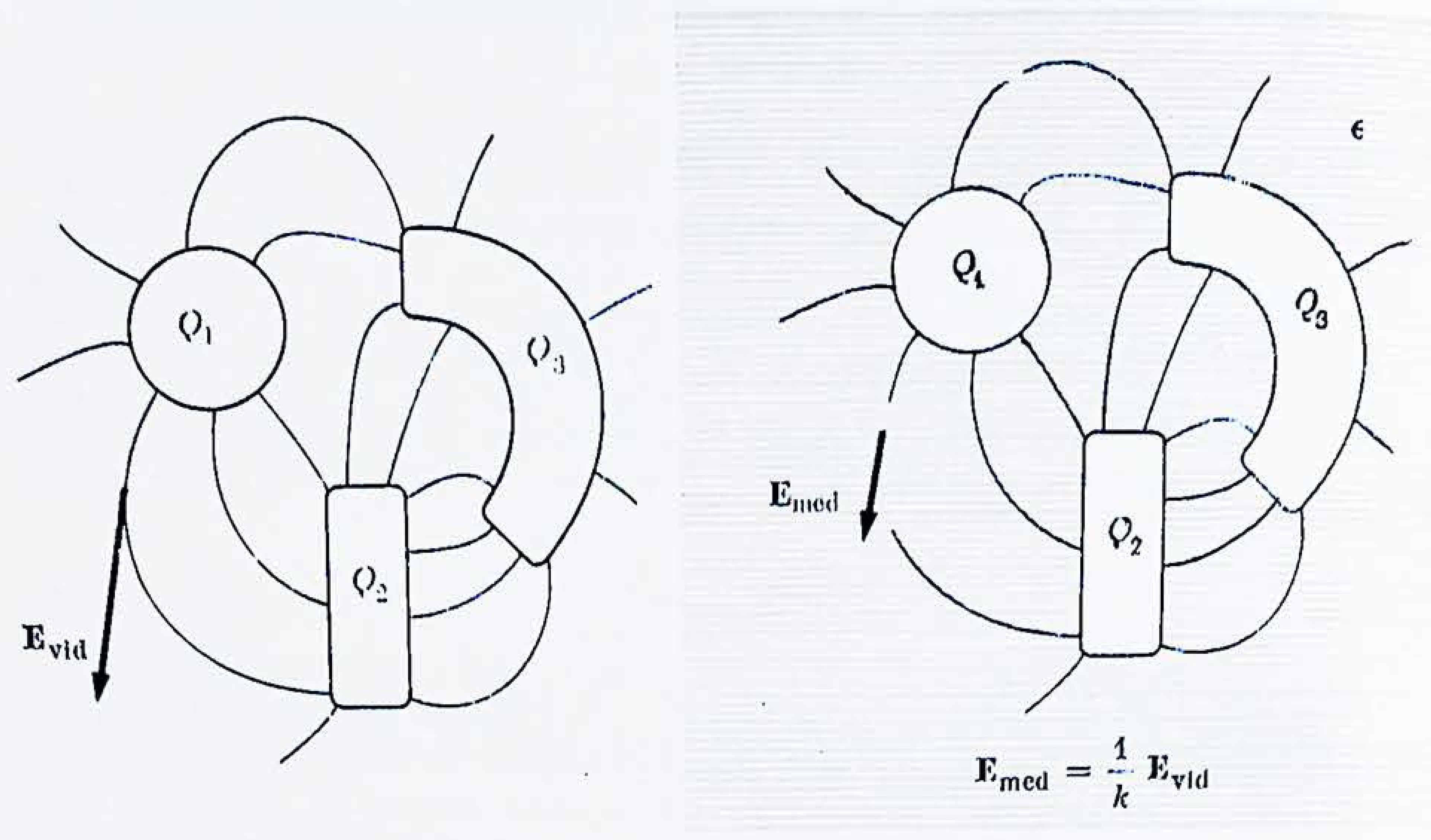


Fig. 9.23. Pentru aceleaşi sarcini pe conductori, prezenţa dielectricului reduce toate intensităţile cîmpului electric (şi de aici toate diferenţele de potenţial) prin factorul $1/\varepsilon$. Sarcinile Q_1, Q_2 şi Q_3 sînt sarcinile care ar curge în realitate afară din conductori dacă am descărca sistemul.

(*ii*) Relaţia cantitativă între polarizabilitatea globală a materialului exprimată prin susceptibilitatea χ_e, şi polarizabilitatea atomilor şi moleculelor din care este compus dielectricul, rămîne destul de misterioasă. Pentru a o descoperi vom avea de decis ce cîmp simte de fapt un atom polarizabil cînd cîmpul mediu spaţial, sau macroscopic, din vecinătatea sa, este cunoscut. Ceea ce simte un atom fixat este nu cîmpul mediu spaţial, ci un alt cîmp pe care îl putem numi cîmpul local. Este cîmpul local, $\mathbf{E}_{loc}$, care induce de fapt momentul dipolar al atomului. Această problemă cere o altă privire „microscopică" la interiorul dielectricului.

Ne întoarcem mai întîi către problema (i).

9.10. CÎMPUL UNEI SFERE POLARIZATE

Sfera solidă în figura 9.24, *a* este presupusă uniform polarizată, ca şi cînd ar fi fost cioplită din substanţa plăcii polarizate în figura 9.18, *a*. Cum trebuie să fie cîmpul electric, atît în interiorul cît şi în exteriorul sferei? Aceasta este o problemă instructivă, şi rezultatele vor fi folositoare în diverse moduri. **P** va desemna ca de obicei densitatea de polarizare, constantă în mărime şi direcţie peste tot volumul sferei. Materialul polarizat ar putea fi împărţit, ca placa din figura 9.18, *a*, în coloane paralele la **P**, şi fiecare din acestea înlocuite printr-o sarcină de mărime ($P \times$ secţiunea

transversală a coloanei), sus şi jos. Astfel cîmpul pe care îl căutăm este acela al unei distribuţii de sarcină superficială răspîndită pe o sferă cu o densitate $\sigma = P \cos\theta$. Factorul $\cos\theta$ intervine, cum ar trebui să fie evident din figură, deoarece o coloană de secţiune transversală da delimitează pe sferă o bucată de suprafaţă de arie $da/\cos\theta$. Figura 9.24, *b* este o secţiune transversală prin această pătură de sarcină superficială echivalentă în care densitatea sarcinii a fost indicată prin grosimea variabilă a semicercului negru de sus (densitate de sarcină pozitivă) şi semicercul deschis de jos (densitate de sarcină negativă).

Dacă încă nu aţi înţeles, această figură vă poate sugera că gîndim despre polarizarea **P** ca provenind din mica deplasare în sus a unei bile umplută în mod uniform cu sarcină pozitivă de densitate de volum ρ, faţă de o bilă de densitate de sarcină negativă $-\rho$. Aceasta ar lăsa sarcină pozitivă necompensată pe faţa de sus, şi sarcină negativă pe faţa de jos, variind în mărime întocmai ca $\cos\theta$ pe întreaga frontieră. În interior, unde densităţile de sarcină pozitivă şi negativă încă se suprapun, ele se anulează una pe alta. Cu această imagine, vedem un mod foarte uşor de a calcula cîmpul *în exteriorul* păturii de sarcină superficială. Orice distribuţie sferică de sarcină, după cum ştim, are un cîmp extern acelaşi ca şi cînd întreaga sarcină ar fi fost concentrată în centru. Astfel, superpoziţia a două sfere de sarcină totală $+Q$ şi $-Q$ respectiv, cu centrele separate printr-o mică deplasare s, vor produce un cîmp exterior identic cu acela a două sarcini punctuale Q şi $-Q$, s cu depărtare. Ceea ce este tocmai un dipol cu moment dipolar $p_0 = Qs$.

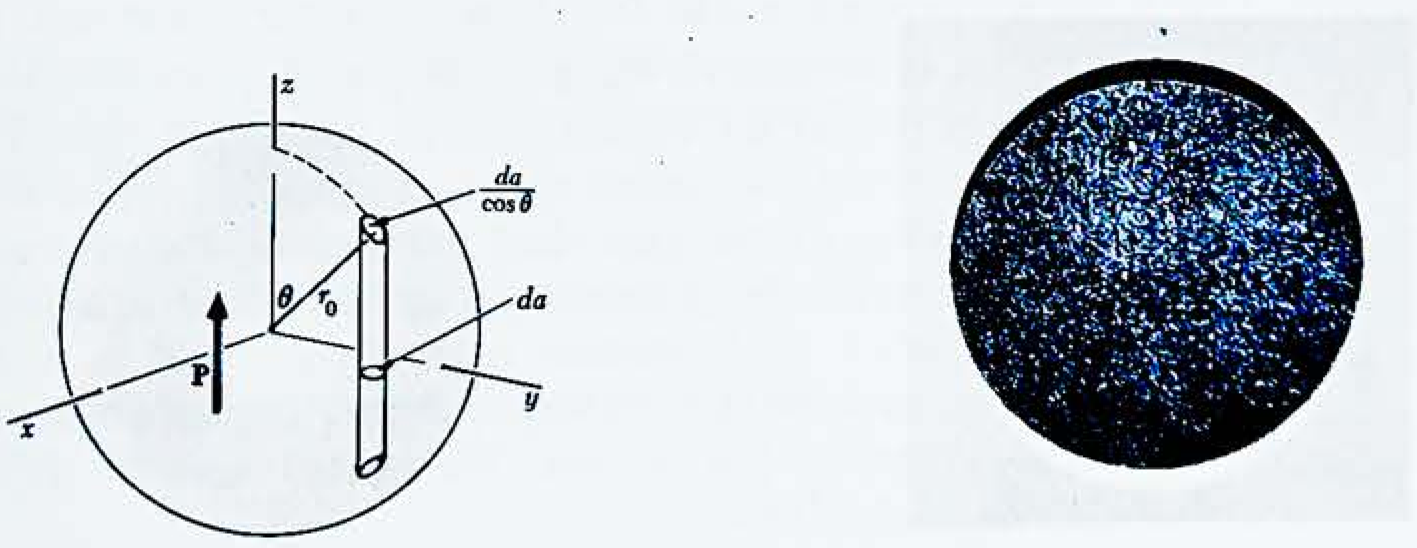


Fig. 9.24 *(a)* Împărţiţi sfera polarizată în bare polarizate şi înlocuiţi fiecare bară prin parcele de sarcină pe suprafaţa aceleiaşi sfere. *(b)* O sferă de densitate de sarcină de volum pozitivă şi o sferă de densitate de sarcină de volum negativă, uşor deplasate, sînt echivalente unei distribuţii de sarcină pe suprafaţa sferică.

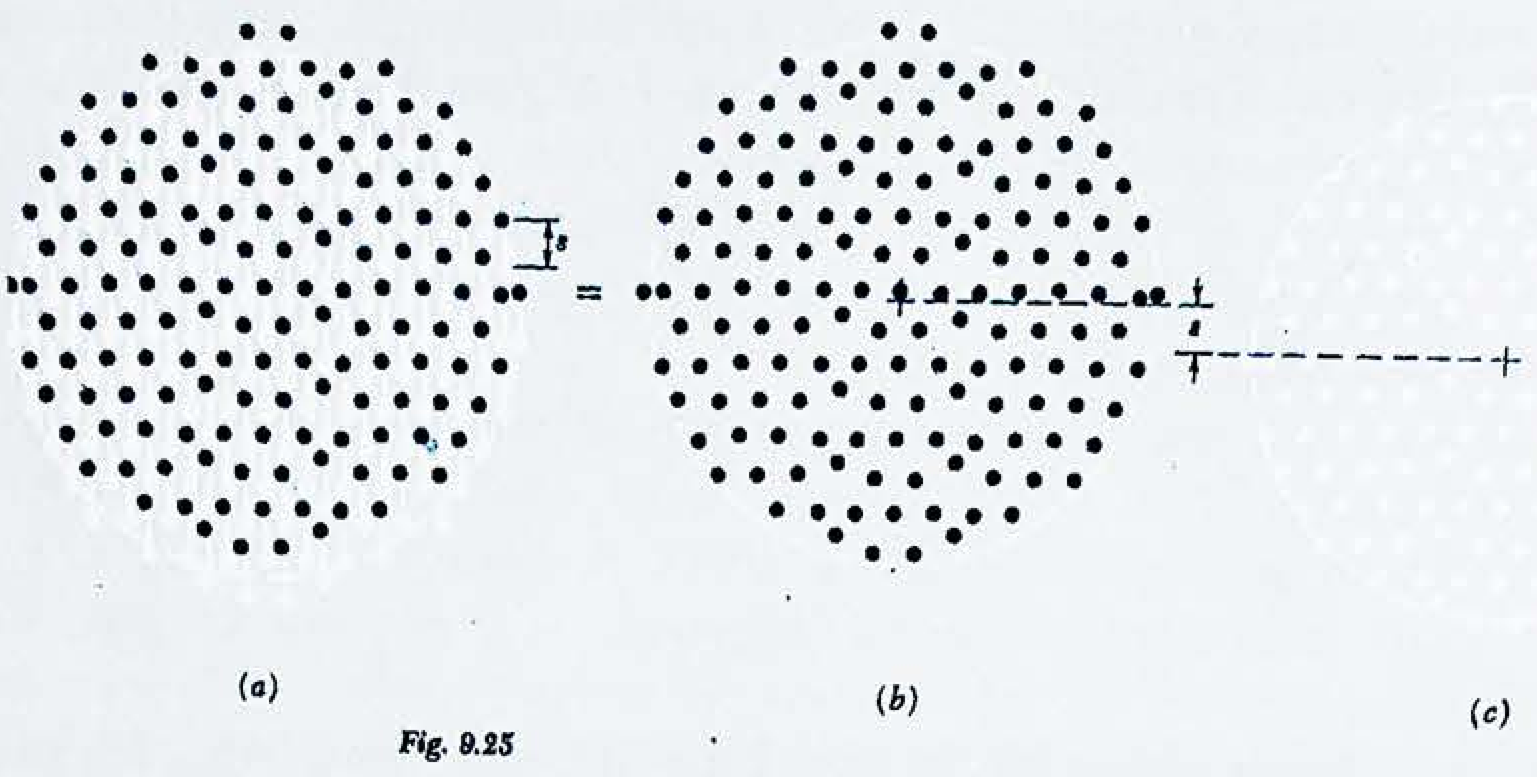


Fig. 9.25. O sferă de dipoli moleculari aliniaţi în sus (a) este echivalentă cu sfere suprapuse uşor deplasate, de sarcină pozitivă (b), şi negativă (c).

O descriere microscopică a substanţei polarizate ne conduce la aceeaşi concluzie. În figura 9.25, *a* dipolii moleculari răspunzători în realitate pentru polarizarea **P** au fost reprezentaţi schematic drept alcătuiţi individual dintr-o pereche de sarcini q şi $-q$, s cm depărtare, pentru a da un moment dipolar $p = qs$. Cu N din acestea pe centimetru cub, $P = Np = Nqs$ şi numărul total de astfel de dipoli din sferă este $(4\pi/3)\, r_0^3\, N$. Sarcinile pozitive, considerate separat (fig. 9.25, *b*), sînt distribuite într-o sferă cu un conţinut total de sarcină $Q = (4\pi/3)\, r^3 Nq$, iar sarcinile negative ocupă o sferă asemănătoare cu centrul deplasat (fig. 9.25, *c*). Este limpede că fiecare dintre aceste distribuţii de sarcină poate fi înlocuită printr-o sarcină punctiformă în centrul ei, dacă ne interesăm de cîmpul binişor în afara distribuţiei. „Binişor în afară" înseamnă destul de departe de la suprafaţă astfel încît caracterul granular al distribuţiei de sarcină să nu conteze, şi acesta este un aspect pe care îl avem totdeauna de neglijat cînd vorbim de cîmpuri macroscopice. Astfel încît pentru scopurile prezente imaginea sferelor suprapuse de densitate de sarcină uniformă şi descrierea prin dipoli reali în vid sînt echivalente* şi arată că cîmpul în exteriorul distribuţiei este identic cu acela al unui singur dipol localizat în centru. Momentul acestui dipol p_0 este simplu polarizarea totală a sferei:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3}\, r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3}\, r_0^3 P. \tag{39}$$

* Aceasta s-ar fi putut să fie îndeajuns de evident, dar am lucrat detaliile în acest caz pentru a evita orice bănuială că imaginea „bilei de sarcină continuă", care este atît de diferită de ceea ce ştim că este interiorul unei substanţe reale, ne-ar putea induce în eroare.

Cantitățile Q și s nu au, în mod separat, nici o semnificație și pot fi acum scoase din discuție.

Cîmpul exterior al sferei polarizate este acela al unui dipol central p_0, nu numai la mare distanță de la sferă; el este un cîmp de dipol pur chiar pînă la suprafață, macroscopic vorbind. Tot ceea ce am avut de făcut pentru a construi figura 9.26, o reprezentare a liniilor de cîmp externe, a fost să acoperim o arie circulară din figura 9.5.

Cîmpul interior este o chestiune diferită. Să considerăm potențialul electric, $\varphi(x, y, z)$. Cunoaștem potențialul în toate punctele frontierei sferice, deoarece cunoaștem cîmpul exterior. Este chiar potențialul dipolar, $p_0 \cos\theta / 4\pi\varepsilon_0 r^2$, care pe frontiera sferică de rază r devine

$$\varphi = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r_0^2} = \frac{P r_0 \cos\theta}{3\varepsilon_0}. \tag{40}$$

Deoarece $r_0 \cos\theta = z$, vedem că potențialul unui punct de pe sferă depinde doar de coordonata sa z:

$$\varphi = \frac{Pz}{3\varepsilon_0}. \tag{41}$$

Problema găsirii cîmpului intern s-a redus la aceasta: ecuația 41 dă potențialul la fiecare punct pe frontiera regiunii, în interiorul căreia φ trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace. În conformitate cu Teorema de Unicitate pe care am demonstrat-o în capitolul 3, aceasta este suficient pentru a determina φ peste tot în interior. Dacă putem găsi *o* soluție, ea trebuie să fie soluția. Acum funcția Cz, unde C este orice constantă, satisface ecuația lui Laplace, astfel încît ec. 41 ne-a dat de fapt soluția pentru potențialul *în interiorul* sferei. Acesta este potențialul unui cîmp electric uniform în direcția $-z$:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Pz}{3\varepsilon_0}\right) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}. \tag{42}$$

Cum direcția lui $\mathbf{P}$ a fost singurul lucru care distinge axa z, putem scrie rezultatul nostru în forma mai generală

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{43}$$

Acesta este cîmpul macroscopic în materialul polarizat.

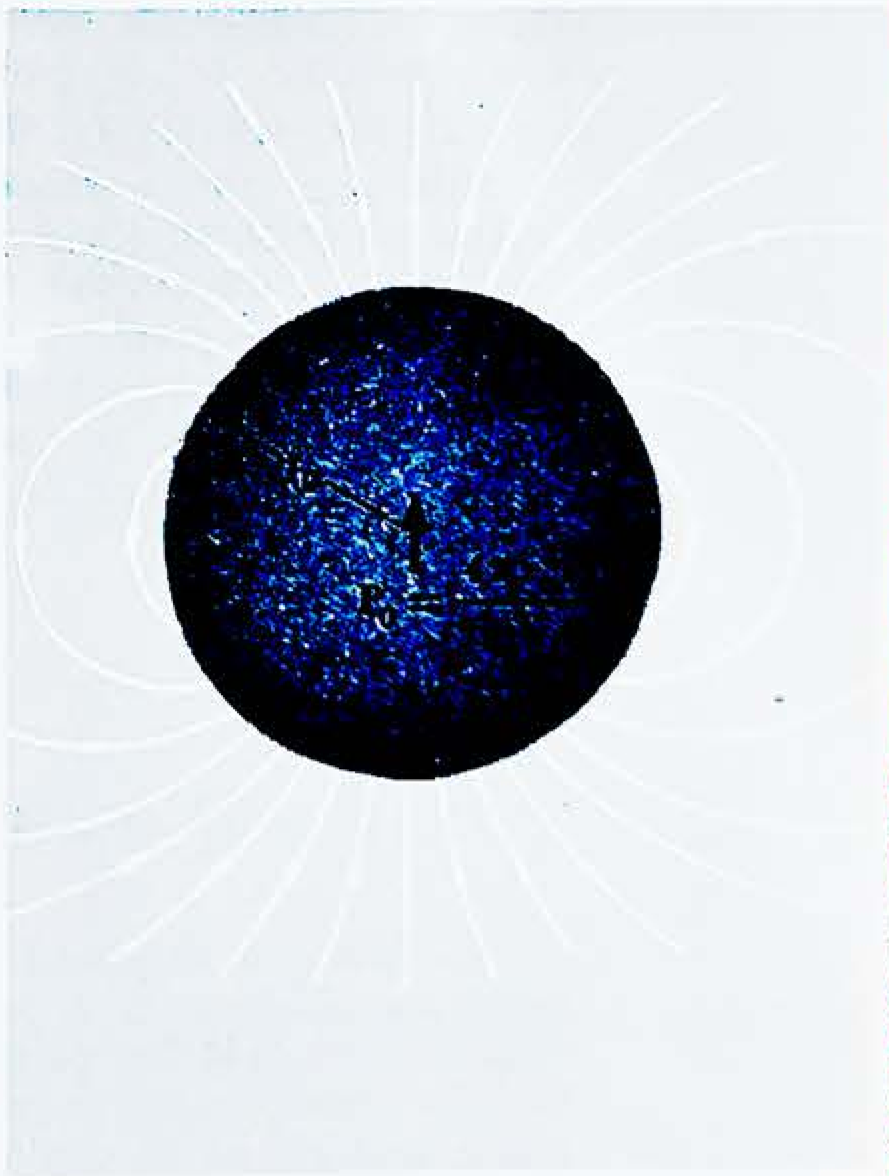


Fig. 9.26. Cîmpul *în exteriorul* unei sfere polarizate uniform este identic cu acela al unui dipol localizat în centrul sferei.

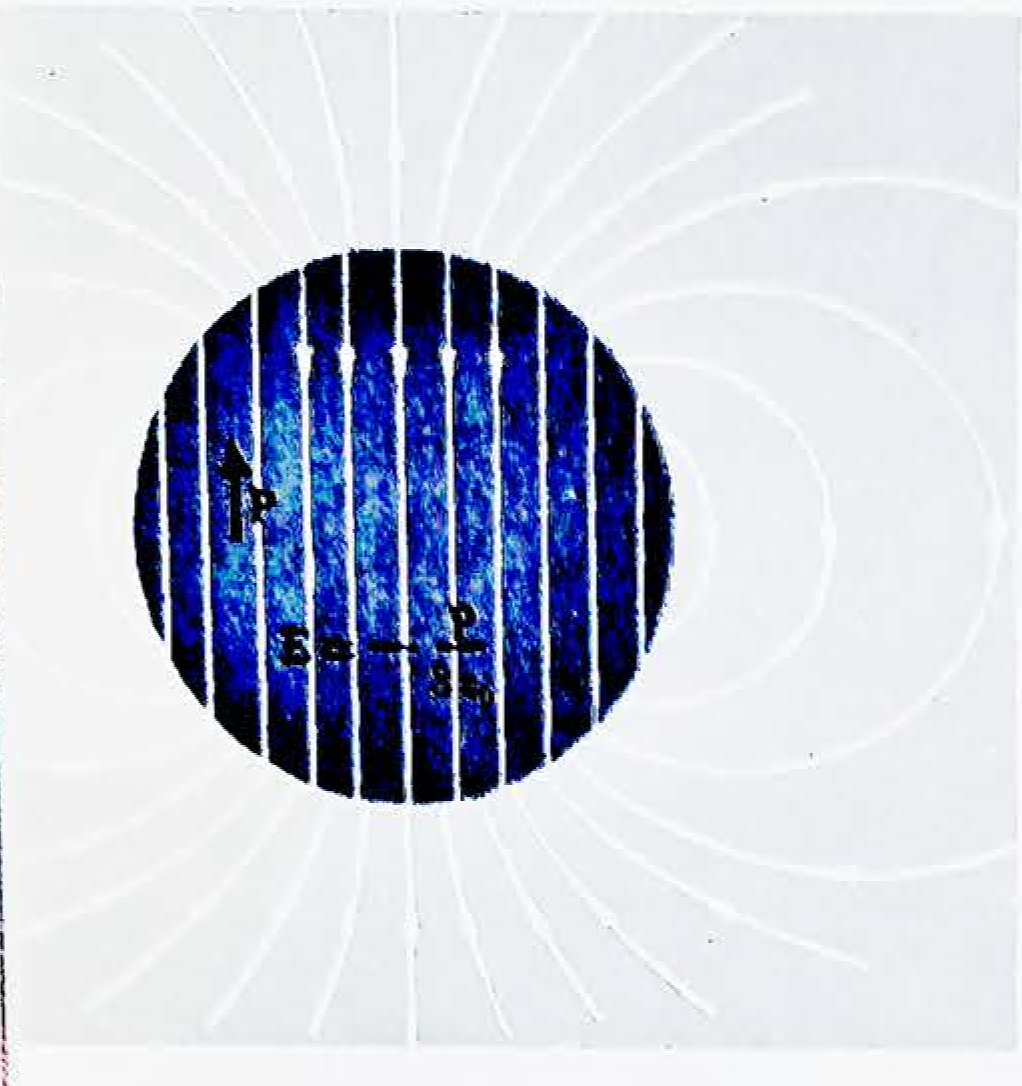


Fig. 9.27. Cîmpul sferei uniform polarizate, atît în interior cît şi în exterior.

Figura 9.27 arată atît cîmpul interior cît şi cîmpul exterior. La polul de sus al sferei, intensitatea cîmpului extern exterior orientat în sus este, din ecuaţia 14 pentru cîmpul unui dipol

$$E = \frac{2p_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2\,(4\pi r_0^3 P/3)}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} = \frac{2\,P}{3\,\varepsilon_0} \text{ (în afară)} \tag{44}$$

care este exact de două ori mărimea cîmpului intern orientat în jos.

Acest exemplu ilustrează regulile generale pentru comportarea componentelor cîmpului la suprafaţa unui mediu polarizat. **E** este discontinuu la frontiera mediului polarizat exact cum ar fi la suprafaţa în vid care ar purta o densitate de sarcină superficială $\sigma = P_n$. Simbolul P_n desemnează componenta lui **P** normală la suprafaţă spre exterior. Urmează că componenta normală a lui **E** trebuie să se schimbe brusc printr-o cantitate P_n/ε_0 în timp ce componenta lui **E** paralelă la frontieră rămîne continuă, adică, are aceeaşi valoare de ambele părţi ale frontierei. Într-adevăr, la polul nord al sferei noastre schimbarea totală în $\mathbf{E}_z$ este $2P/3\varepsilon_0 - (-P/3\varepsilon_0)$ sau P/ε_0. Prin referire la ecuaţia 14 pentru cîmpul de dipol, puteţi verifica că componenta lui **E** paralelă la suprafaţă este continuă de la interior spre exterior oriunde pe sferă.

Nici una dintre aceste concluzii nu depinde de felul în care a fost produsă polarizarea sferei. Presupunînd că o sferă oarecare *este* polarizată, figura 9.27 arată cîmpul *ei*. Peste acesta poate fi superpus orice cîmp de la alte surse, reprezentînd astfel multe sisteme posibile. Aceasta nu va afecta discontinuitatea în **E** la frontiera mediului polarizat. Regulile tocmai formulate se aplică în consecinţă în orice sistem, discontinuitatea în **E** fiind determinată doar de polarizarea existentă.

9.11. O SFERĂ DIELECTRICĂ ÎNTR-UN CÎMP UNIFORM

Ca exemplu, să punem o sferă de material dielectric caracterizat printr-o constantă dielectrică k într-un cîmp electric omogen $\mathbf{E}_0$ ca de exemplu cîmpul între plăcile paralele ale unui condensator de vid, figura 9.28. Sursele acestui cîmp, sarcinile de pe plăci, să fie situate departe de sferă astfel încît ele nu se deplasează cînd introducem sfera. Atunci oricare ar fi

cîmpul din vecinătatea sferei, el va rămîne practic $\mathbf{E}_0$ la distanţe mari. Aceasta se înţelege prin a pune o sferă într-un cîmp uniform. Cîmpul total $\mathbf{E}$ nu mai este uniform în vecinătatea sferei. El este *suma* cîmpului uniform $\mathbf{E}_0$ al surselor depărtate şi a unui cîmp $\mathbf{E}'$ generat de însăşi materia polarizată:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \qquad (45)$$

Cîmpul $\mathbf{E}'$ depinde de polarizarea $\mathbf{P}$ a dielectricului, care la rîndul ei depinde de valoarea lui $\mathbf{E}$ în interiorul sferei:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_0\mathbf{E} = (k - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}. \qquad (46)$$

Încă nu ştim care este cîmpul total $\mathbf{E}$; ştim doar că ecuaţia 46 trebuie să se verifice în orice punct din interiorul sferei. *Dacă* sfera devine uniform polarizată, o presupunere care va avea să fie justificată prin rezultatele noastre, relaţia dintre polarizarea sferei şi propriul ei cîmp $\mathbf{E}'$, în puncte interioare, este dată deja de ecuaţia 43. (În ec. 43 foloseam simbolul $\mathbf{E}$ pentru acest cîmp; în acel caz era singurul cîmp prezent.)

$$\mathbf{E}'_{in} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \qquad (47)$$

Avem acum destule ecuaţii să eliminăm $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{E}'$, ceea ce ne-ar da o relaţie între $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{E}_0$. Folosind ecuaţiile 45 la 47 găsim:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{k-1}{3}\mathbf{E}. \qquad (48)$$

Rezolvînd pentru $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2 + k}\right)\mathbf{E}_0. \qquad (49)$$

Deoarece k este mai mare decît unu, factorul $3/(2 + k)$ va fi mai mic decît unu; cîmpul în interiorul dielectricului este mai slab decît $\mathbf{E}_0$. Polarizarea este

$$\mathbf{P} = (k - 1)\varepsilon_0\mathbf{E} = 3\varepsilon_0\left(\frac{k-1}{k+2}\right)\mathbf{E}_0. \qquad (50)$$

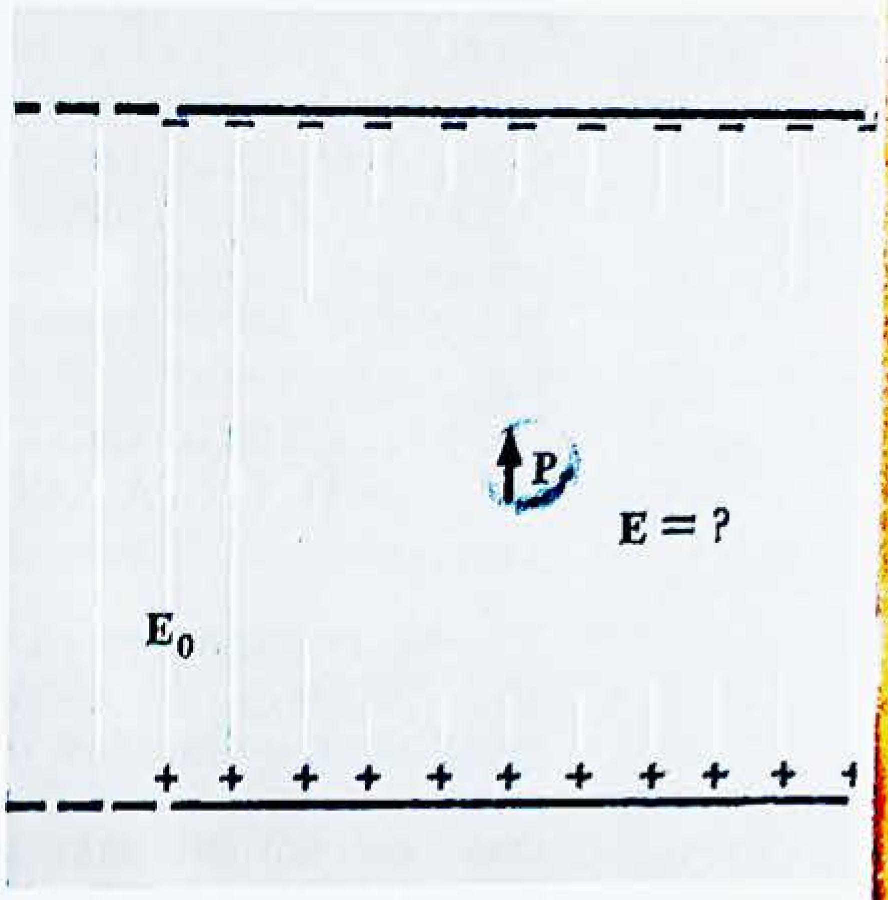


Fig. 9.28. Sursele cîmpului E rămîn fixate. Sfera dielectrică dezvoltă o oarecare polarizare P. Cîmpul total E este superpoziţia lui E_0 şi cîmpul acestei sfere polarizate.

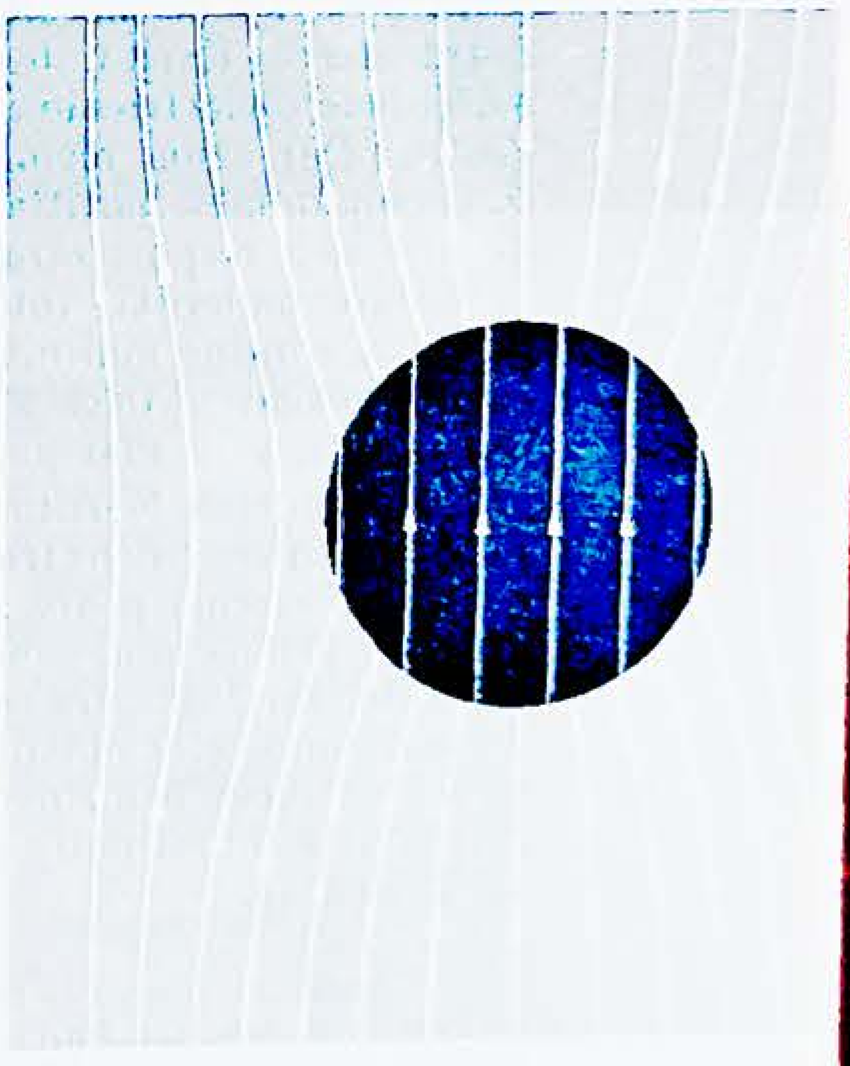


Fig. 9.29. Cîmpul total E, atît în interiorul cît şi în exteriorul sferei dielectrice.

Presupunerea unei polarizări uniforme apare acum consistentă prin ea însăşi.* Pentru a calcula cîmpul total $\mathbf{E}$ în exteriorul sferei trebuie să adunăm vectorial la $\mathbf{E}_0$ cîmpul unui dipol central de moment dipolar egal cu $\mathbf{P}$ ori volumul sferei. Cîteva linii de cîmp ale lui $\mathbf{E}$, atît în interiorul cît şi în exteriorul sferei dielectrice, sînt arătate în figura 9.29.

9.12. CÎMPUL UNEI SARCINI ÎNTR-UN MEDIU DIELECTRIC ŞI LEGEA LUI GAUSS

Să presupunem că un volum foarte mare dintr-un dielectric omogen are undeva în el o sarcină concentrată Q, care nu face parte din structura moleculară normală a dielectricului. Imaginaţi-vă, de exemplu, că o mică sferă metalică a fost încărcată şi apoi introdusă într-o cuvă de ulei. După cum s-a afirmat mai înainte, cîmpul electric în ulei este simplu $1/k$ ori cîmpul pe care l-ar produce Q în vid.

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k r^2}. \tag{51}$$

Mărimea $\varepsilon = \varepsilon_0 k$ se numeşte *permitivitate dielectrică* a mediului şi este o constantă de material. ε_0 este numit uneori *permitivitatea spaţiului vid.* Este interesant să vedem cum se aplică legea lui Gauss. Integrala de suprafaţă a lui $\mathbf{E}$ (care este cîmpul macroscopic, ori mediul spaţial, vă amintiţi) luată pe o sferă în jurul lui Q, dă Q/ε, dacă credem ecuaţia 51, şi *nu* Q/ε_0. De ce nu? Răspunsul este că Q nu este singura sarcină în interiorul sferei. Există de asemenea toate sarcinile care alcătuiesc atomii şi moleculele dielectricului. În mod obişnuit orice volum din ulei ar fi electric neutru. Dar acum uleiul este polarizat radial, ceea ce înseamnă că sarcina Q, presupunînd-o pozitivă, a atras către ea sarcina negativă din moleculele de ulei şi a respins sarcinile pozitive. Deşi deplasarea poate fi foarte mică în fiecare moleculă, totuşi în medie orice sferă pe care o ducem în jurul lui Q va conţine mai multă sarcină moleculară negativă decît sarcină moleculară pozitivă. Deci sarcina netă în sferă, incluzînd sarcina „străină“ Q din centru, este mai *puţină* decît Q. De fapt este Q/k.

Este adesea folositor să distingem între sarcina „străină“ Q şi sarcinile care alcătuiesc dielectricul. Asupra primelor avem un oarecare grad de control — sarcina poate fi adăugată sau îndepărtată de pe un obiect, ca de exemplu plăcile unui condensator. Aceasta este adesea numită sarcină *liberă*. Celelalte sarcini, care sînt părţi integrale ale atomilor sau moleculelor dielectricului, sînt numite în mod obişnuit sarcini „legate“. Sarcină *structurală* ar putea fi un nume mai potrivit. Aceste sarcini nu sînt mobile dar mai mult sau mai puţin elastic legate, contribuind, prin mica lor deplasare, la polarizare.

---

* Aceasta este ceea ce face ca acest sistem să fie uşor de tratat. Pentru un cilindru dielectric de lungime finită într-un cîmp electric uniform, presupunerea nu ar lucra. Cîmpul $\mathbf{E}'$ al unui cilindru uniform polarizat — de exemplu unul cu lungimea aproximativ egală cu diametrul — *nu* este uniform în interiorul cilindrului. (Cum trebuie să arate?) De aceea $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ nu poate fi uniform — dar în acest caz $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ nu poate fi, la urmă, uniform. De fapt doar dielectricii de formă elipsoidală, între care sfera este un caz special, primesc o polarizare uniformă într-un cîmp uniform.

Se poate imagina o mărime vectorială care este legată prin ceva asemănător cu legea lui Gauss de singura sarcină liberă. În sistemul pe care tocmai l-am examinat, o sarcină punctuală scufundată într-un dielectric, vectorul $k\mathbf{E}$ are această proprietate. Adică, $\int k\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$, luată pe o suprafață oarecare închisă S, este egală cu Q/ε_0 dacă S cuprinde Q, și zero dacă nu. Prin superpoziție, aceasta trebuie să aibă loc pentru orice mulțime de sarcini libere descrise printr-o densitate de sarcină liberă $\rho_{\text{liberă}}(x, y, z)$ într-un mediu dielectric omogen infinit:

$$\int_S k\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{\text{liberă}}\, dv \tag{52}$$

unde V este volumul închis de suprafața S. O relație integrală ca aceasta implică o relație „locală" între divergența cîmpului vectorial $k\mathbf{E}$ și densitatea de sarcină liberă:

$$\operatorname{div}(k\mathbf{E}) = \rho_{\text{liberă}}/\varepsilon_0. \tag{53}$$

Deoarece k a fost presupus constant în tot mediul, ecuația 53 nu ne spune nimic nou. Totuși ne poate ajuta să identificăm rolul sarcinii izolate. Într-un sistem oricare ar fi ele, relația fundamentală între cîmpul electric $\mathbf{E}$ și densitatea de sarcină totală $\rho_{\text{liberă}} + \rho_{\text{legată}}$ rămîne valabilă:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = (\rho_{\text{liberă}} + \rho_{\text{legată}})/\varepsilon_0. \tag{54}$$

Din ecuațiile 53 și 54 urmează că

$$\operatorname{div}(k-1)\mathbf{E} = -\rho_{\text{legat}}/\varepsilon_0. \tag{55}$$

După ecuația 38, $(k-1)\,\mathbf{E} = \mathbf{P}/\varepsilon_0$, astfel încît ecuația 55 implică

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho_{\text{legat}}. \tag{56}$$

Ecuația 56 este o afirmație despre două aspecte ale distribuției de sarcină legată în orice vecinătate, și despre nimic altceva. De aceea ea nu poate depinde de condițiile din altă parte a sistemului, nici de modul în care este menținută aranjarea particulară a sarcinilor legate. Orice aranjament de sarcină legată care are un anumit exces local, pe unitate de volum, de protoni nucleari față de electroni atomici trebuie să reprezinte o polarizare cu o anumită divergență. Astfel ecuația 56 trebuie să aibă loc în mod general, nu numai în dielectricul nelimitat. Puteți căpăta o intuiție asupra identității exprimate în ecuația 56 imaginîndu-vă cîteva molecule polare dispuse încît să dea o polarizare cu divergență pozitivă (fig. 9.30). Dipolii sînt orientați spre exterior, ceea ce lasă în mod necesar o mică concentrare de sarcină negativă în mijloc. Desigur, ecuația 56 se referă la medii pe elemente de volum atît de largi încît $\mathbf{P}$ și ρ_{legat} pot fi tratate drept mărimi continuu variabile.

Din ecuațiile 54 și 56 obținem relația

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right) = \rho_{\text{liberă}}/\varepsilon_0. \tag{57}$$



Fig. 9.30. Dipoli moleculari aranjați astfel încît div $\mathbf{P} > 0$. De notat concentrarea sarcinii negative în mijloc, consistentă cu ecuația 56.

Aceasta este complet independentă de orice relație între **E** și **P**. Ea nu este limitată la acele materiale, pe care le numim dielectrici, în care **P** este proporțional cu **E**.

Este obișnuit a da combinației $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ un nume special, vectorul de *deplasare electrică*, și propriul său simbol, **D**. Adică, definim **D** prin

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{58}$$

Într-un dielectric izotrop, **D** este simplu $\varepsilon_0 K \mathbf{E}$, dar relația

$$\text{div}\, \mathbf{D} = \rho_{\text{liberă}} \tag{59}$$

are loc în orice situație în care mărimile macroscopice **P**, **E** și ρ pot fi definite.

Aspectul ecuației 59 poate sugera să privim **D** drept un cîmp vectorial a cărui sursă este distribuția de sarcină liberă ρ_{liber}, în același sens în care distribuția de sarcină totală ρ este sursa lui **E**. Aceasta ar fi greșit. Cîmpul electrostatic **E** este determinat în mod unic — cu excepția adăugării unui cîmp constant — de distribuția de sarcină ρ deoarece, completînd legea div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, există o altă condiție universală, rot $\mathbf{E} = 0$. *Nu* este adevărat, în general, că rot $\mathbf{D} = 0$. Astfel distribuția de sarcină liberă nu este suficientă pentru a determina **D** din ecuația 59. Încă ceva este necesar, cum sînt condițiile de frontieră la diferite suprafețe dielectrice. Condițiile de frontieră asupra lui **D** sînt desigur o simplă cale alternativă de a exprima condițiile de frontieră implicînd **E** și **P**, deja formulate spre sfîrșitul § 9.10.

În abordarea pe care am luat-o pentru cîmpuri electrice în materie introducerea lui **D** este un artificiu care nu este, în întregime, foarte folositor. Am menționat **D** deoarece este înconjurat de tradiție, începînd cu Maxwell*, iar studentul îl va întîlni sigur în alte cărți, multe tratîndu-l cu mai mult respect decît se cuvine.

---

* Importanța lui **D** în formularea lui Maxwell a teoriei electromagnetice, și alegerea numelui de *deplasare* poate fi probabil atribuită înclinării sale către un fel de model mecanic al „eterului". Whittaker a observat în lucrarea sa clasică, *O istorie a teoriilor eterului și electricității*, vol. I, p. 266 (Harper Torchbooks, New York, 1960, în limba engleză) că această înclinare pare să-l fi indus în eroare pe însuși Maxwell la un moment dat în aplicarea teoriei sale asupra problemei reflexiei luminii de către un dielectric.

Concluziile noastre esenţiale despre cîmpuri electrice în materie pot fi rezumate astfel:

(i) Materia poate fi polarizată, starea sa putînd fi descrisă complet, cîtă vreme este considerat cîmpul macroscopic, printr-o densitate de polarizare **P**, care este momentul dipolar pe unitate de volum. Contribuţia unei astfel de materii la cîmpul electric E este identică cu aceea a unei distribuţii de sarcină ρ_{legat}, existînd în vid şi avînd densitatea $\rho_{legat} = -\text{div}\,\mathbf{P}$. În particular, la suprafaţa unei substanţe polarizate, unde există o discontinuitate în **P**, aceasta se reduce la o sarcină superficială de densitate $\sigma = -P_n$. Adăugaţi orice distribuţie de sarcină liberă care poate fi prezentă, şi cîmpul electric este cîmpul pe care această distribuţie de sarcină *totală* l-ar produce în vid. Acesta este cîmpul macroscopic **E** atît în interiorul cît şi în afara materiei, cu menţiunea că în interiorul materiei este media spaţială a cîmpului macroscopic adevărat.

(ii) Dacă **P** este proporţional cu **E** într-un material, numim materialul dielectric. Definim susceptibilitatea χ_e şi constanta dielectrică k caracteristice materialului: $\chi_e = \mathbf{P}/\varepsilon_0\mathbf{E}$ şi $k = 1 + \chi_e$. Sarcini libere scufundate într-un dielectric generează cîmpuri electrice care au $1/k$ din intensitatea pe care aceleaşi sarcini ar produce-o în vid.

9.13. LEGĂTURA ÎNTRE SUSCEPTIBILITATEA ELECTRICĂ ŞI POLARIZABILITATEA ATOMICĂ

Raportul densităţii de polarizare **P** la cîmpul electric macroscopic **E** într-o substanţă este, pînă la o constantă, susceptibilitatea electrică χ_e. Să presupunem că substanţa este alcătuită din atomii de polarizabilitate atomică α. Acum **P** nu este decît suma, în unitatea de volum, a momentelor dipolare **p** ale atomilor individuali. Putem prezice momentul dipolar indus al unui atom dacă ştim α şi cîmpul electric care acţionează asupra atomului pentru a-l polariza. De aici ar trebui să fim în stare, dacă ştim α şi numărul de atomi per unitate de volum, N, să prezicem susceptibilitatea χ_e. Să încercăm să facem o teorie care să lege χ_e cu α.

Momentul dipolar indus într-un atom A este determinat de către cîmpul, provenind de la toate *celelalte* surse, care acţionează asupra atomului. Acesta *nu* este identic cu cîmpul macroscopic **E** din acea vecinătate, deoarece acel cîmp cuprinde o contribuţie de la sarcinile din însuşi atomul A. Astfel că problema noastră ia o întorsătură interesantă chiar de la început. Pentru a face situaţia clară, considerăm un sistem foarte particular. Substanţa noastră este alcătuită din atomi identici aliniaţi într-o reţea cristalină cubică cu distanţare b cm între vecinii cei mai apropiaţi. Polarizabilitatea fiecărui atom este α. Figura 9.31 este o secţiune transversală prin reţea. Direcţia presupusă a cîmpului macroscopic **E** din acea regiune este indicată, ca şi deformarea atomilor polarizaţi. Întrebarea noastră este, care este mărimea cîmpului care produce acea deformare? Fiecare atom poate fi imaginat ca ocupînd propria sa celulă cubică, şi vom presupune că atomii sînt mult mai mici decît distanţarea în reţea, astfel încît toată sarcina dintr-un atom este foarte aproape de centrul celulei.

Vom nota prin $\mathbf{E}_{alte}$ cîmpul care acţionează asupra atomului A. Sursele acestui cîmp sînt oriunde altundeva în sistem, incluzînd toţi ceilalţi

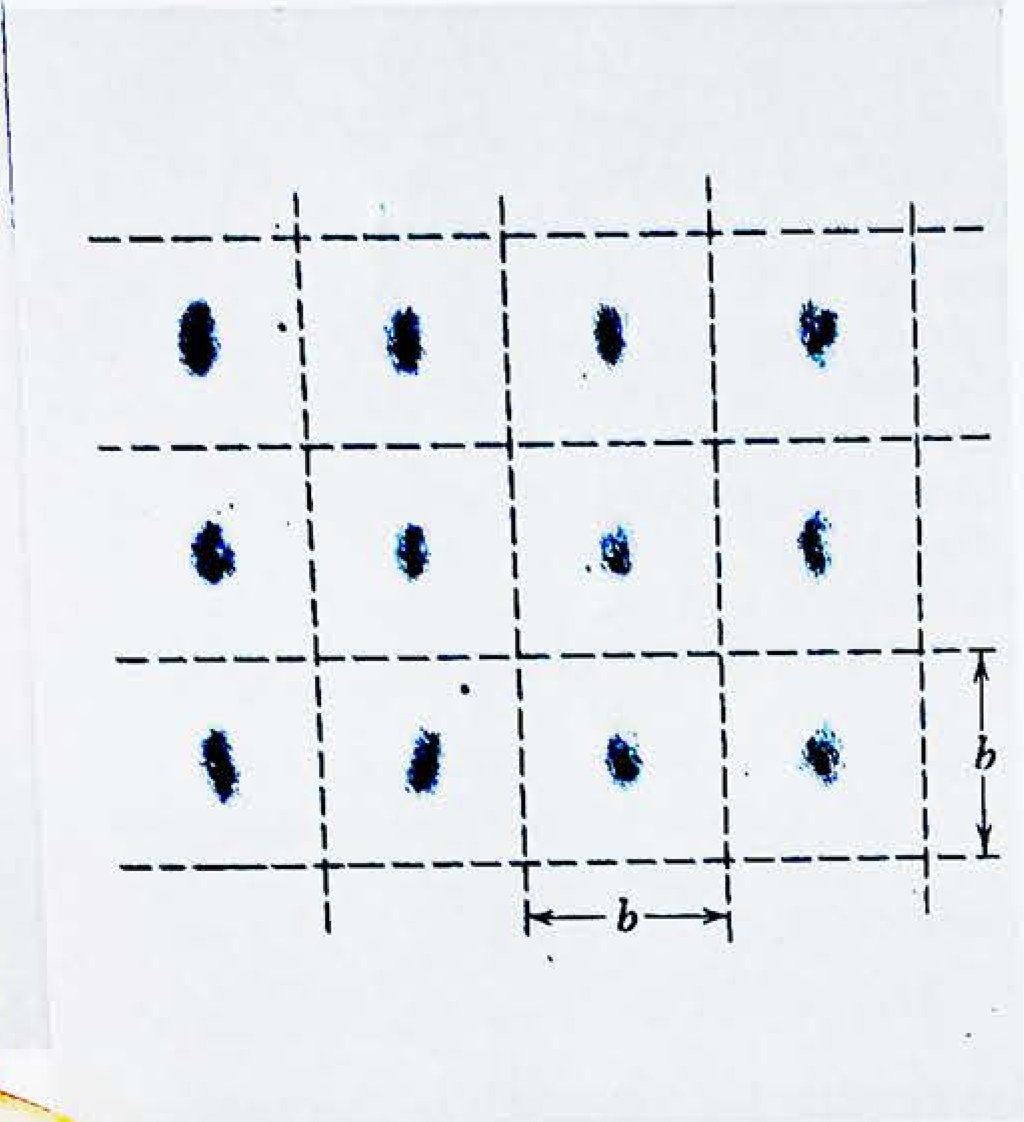


Fig. 9.31. O aranjare cubică a atomilor într-un cristal. Fiecare atom este arătat polarizat.

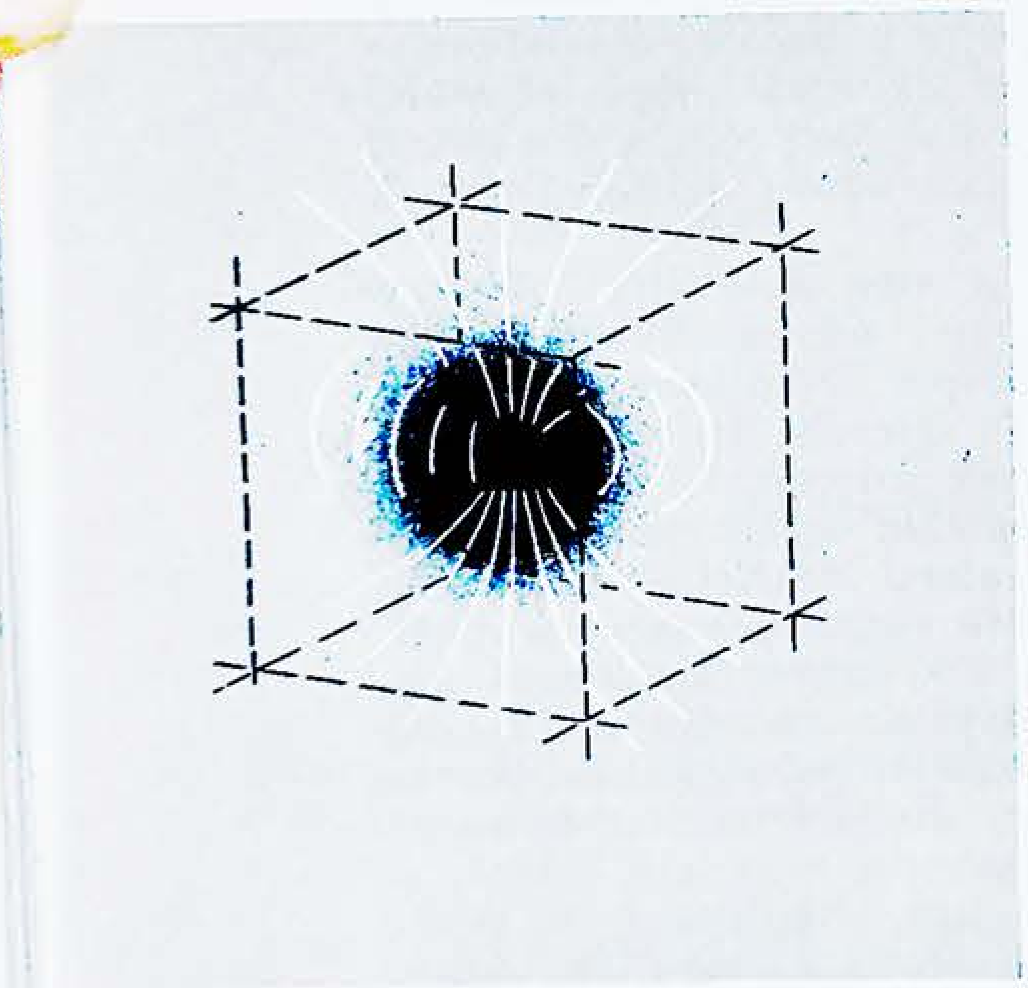


Fig. 9.32. Atomul A și cîmpul $\mathbf{E}_{auto}$ care provine numai de la acel atom.

atomi și oricare sarcini în afară. $\mathbf{E}_{alte}$ este cîmpul pe care l-am găsi în celula A dacă am putea îndepărta în mod magic atomul A în același timp înghețînd toate celelalte distribuții de sarcină în forma pe care o au cu atomul A prezent. $\mathbf{E}_{alte}$ nu va fi cu totul constant în celula A, dar vom presupune că *valoarea sa medie* în celulă este destul de apropiată de ceea ce vrem. Printr-o medie peste volumul cuprins de celula A înțelegem, ca de obicei, integrala $\int \mathbf{E}\, dv$ împărțită la volumul celulei. Vom indica astfel de medii prin $\langle\ \rangle_{celulă}$.

Fie $\mathbf{E}_{auto}$ cîmpul atomului A. Cîmpul total microscopic, $\mathbf{E}_{mic}$, este atunci în fiecare punct

$$\mathbf{E}_{mic} = \mathbf{E}_{alte} + \mathbf{E}_{auto}. \tag{60}$$

Știm că cîmpul macroscopic $\mathbf{E}$ este egal cu media spațială a cîmpului microscopic $\mathbf{E}_{mic}$. Variația lui $\mathbf{E}_{mic}$ este desigur aceeași în fiecare celulă. De asemenea, celulele umplu spațiul complet fără nici un gol între ele. De aceea media lui $\mathbf{E}_{mic}$ în orice celulă individuală trebuie să fie aceeași ca și media peste o regiune mai mare conținînd multe celule*. Urmează că

$$\langle \mathbf{E}_{mic} \rangle_{celulă} = \mathbf{E}. \tag{61}$$

Dar $\langle \mathbf{E}_{mic} \rangle_{celulă} = \langle \mathbf{E}_{alte} \rangle_{celulă} + \langle \mathbf{E}_{auto} \rangle_{celulă}$, media unei sume fiind suma mediilor, astfel că $\langle \mathbf{E}_{alte} \rangle_{celulă}$, care este mărimea pe care o căutăm, este dată de

$$\langle \mathbf{E}_{alte} \rangle_{celulă} = \mathbf{E} - \langle \mathbf{E}_{auto} \rangle_{celulă}. \tag{62}$$

Problema noastră s-a redus acum la calcularea lui $\langle \mathbf{E}_{auto} \rangle_{celulă}$, media pe celulă a cîmpului atomului care ocupă celula

$$\langle \mathbf{E}_{auto} \rangle_{celulă} = \frac{1}{b^3} \int_{celulă} \mathbf{E}_{auto}\, dv. \tag{63}$$

Trebuie să includem în integrare toate elementele de volum în interiorul celulei, în interiorul ca și în exteriorul distribuției atomice de sarcină. Figura 9.32 sugerează cum ar putea arăta cîmpul $\mathbf{E}_{auto}$. Aceasta

* Nu acceptați această afirmație crucială fără gîndire. De ce golurile între celule ar strica-o?

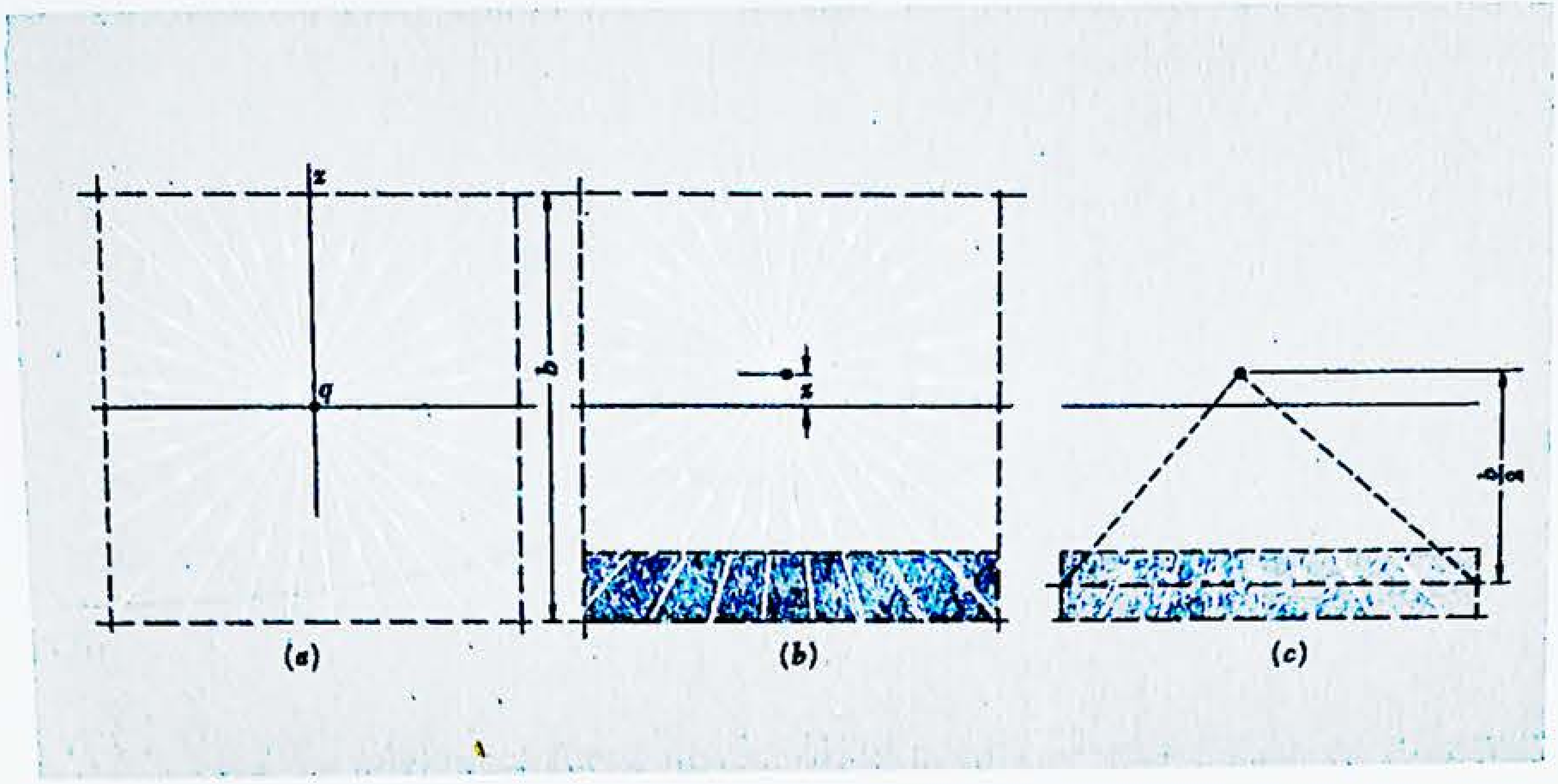


Fig. 9.33. Calcularea „mediei de celulă" a cîmpului unei sarcini punctuale q care este ușor deplasată de la centrul celulei.

face ca sarcina noastră să pară extraordinară. Totuși, putem totdeauna lucra cu un element de distribuție de sarcină la un moment dat. Să calculăm media pe celulă a cîmpului $\mathbf{E}_q$ de la o sarcină punctiformă individuală q:

Dacă sarcina punctiformă era în centrul celulei, ca în figura 9.33, *a*, integrala $\int_{\text{celulă}} \mathbf{E}_q \, dv$ ar fi zero. Datorită simetriei, fiecare element de volum din celulă se potrivește cu un altul în care cîmpul are intensitate egală în direcția opusă. Să deplasăm acum sarcina q în sus printr-o mică distanță z, ca în figura 9.33, *b*. Există un strat subțire în partea de jos a celulei, de grosime $2z$, care nu este echilibrat de stratul de sus. Acest strat alcătuiește acum singura contribuție la $\int_{\text{celulă}} \mathbf{E}_q \, dv$. Evident, avem nevoie doar să calculăm media lui E_{qz}; E_{qx} și E_{qy} se vor media încă la zero. Dacă neglijam ușoara variație a lui E_{qz} în grosimea stratului, integrala de volum a lui E_{qz} pe volumul stratului este chiar de $2z$ ori integrala de suprafață a lui E_{qz} peste pătratul care formează planul median al stratului (fig. 9.33, *c*)

$$\int_{\text{strat}} E_{qz} \, dv = 2z \int_{\text{pătrat}} E_{qz} \, da. \tag{64}$$

Legea lui Gauss ne vine acum în ajutor, deoarece integrala de suprafață în ecuația 64 este tocmai fluxul lui $\mathbf{E}_q$ printr-una din fețele unui cub centrat în jurul sarcinii q. Acel flux trebuie să fie chiar $q/6\varepsilon_0$, deoarece un cub are șase fețe echivalente. Tragem concluzia că $2z \int_{\text{pătrat}} E_{qz} \, da = -2z(q/6\varepsilon_0) = -qz/3\varepsilon_0$ astfel că

$$\langle E_{qz} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{celulă}} E_{qz} dv = \frac{-qz}{3\varepsilon_0 b^3}. \tag{65}$$

Semnul minus exprimă faptul că deplasarea în sus a unei sarcini pozitive rezultă în preponderența cîmpului orientat în jos în celulă. O formulă asemănătoare s-ar obține pentru o mică deplasare în direcția x sau direcția y. De aceea o mică deplasare $\mathbf{r}$ de la centru în orice direcție va rezulta într-un cîmp mediu în celulă $-q\mathbf{r}/3\varepsilon_0 b^3$. Deci pentru un atom complet A, cu distribuția de sarcină $\rho(x, y, z)$, cîmpul mediu în celulă va fi

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{-1}{3\varepsilon_0 b^3} \int \mathbf{r}\rho \, dv. \tag{66}$$

În integrala $\int \mathbf{r}\rho \, dv$ putem recunoaște *momentul dipolar* al distribuției de sarcină, $\mathbf{p}$. (Comparați cu definiția momentului dipolar, ec. 10). Avem acum

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \frac{-1}{3\varepsilon_0 b^3} \mathbf{p}. \tag{67}$$

Restul este un exercițiu. Din ecuația 62 obținem imediat

$$\langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0 b^3} \mathbf{p}. \tag{68}$$

Dacă spunem că $\langle \mathbf{E}_{\text{alte}} \rangle_{\text{celulă}}$ este cîmpul efectiv în polarizarea atomului, atunci $\mathbf{p}$ este legat de acest cîmp prin polarizabilitatea atomică:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha \langle \mathbf{E}_{\text{auto}} \rangle_{\text{celulă}}. \tag{69}$$

Din ecuațiile 68 și 69 obținem relația care leagă $\mathbf{p}$ și $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{3\varepsilon_0 b^3} \right). \tag{70}$$

Aceasta se poate scrie în funcție de densitatea de polarizare macroscopică $\mathbf{P}$. Deoarece N, numărul de atomi polarizați per centimetru cub, este egal cu $1/b^3$, $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \mathbf{p}/b^3$. Înlocuind în ecuația 70.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N \alpha \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right] \tag{71}$$

care, rearanjată, este

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left[\frac{N\alpha}{1 - (1/3)N\alpha} \right] \mathbf{E}. \tag{72}$$

Factorul în paranteze trebuie să fie susceptibilitatea χ_e.

Am făcut două aproximații de-a lungul drumului către ecuația 72. Am presupus că toate părțile distribuției de sarcină atomică se află lîngă centrul celulei; ecuațiile 65 și 66 nu sînt exacte dacă z, sau $\mathbf{r}$, nu este mic în comparație cu b. De asemenea, am folosit media lui $\mathbf{E}_{\text{alte}}$ pe celulă, în locul valorii $\mathbf{E}_{\text{alte}}$ la centrul celulei, drept cîmp care polarizează atomul. Pentru atomi legați împreună atît de aproape cum sînt în cele mai multe cristale, prima presupunere nu este foarte realistă, iar problema implicată în a doua presupunere nu este relevantă. Nu ne putem aștepta ca ecuația 72 să fie urmată exact de un cristal real.

Dacă atomii unei substanțe sînt foarte depărtați, astfel încît $N\alpha/3 \ll 1$, putem neglija acel termen la numitorul ecuației 72, ceea ce ne dă

$$\chi_e = N\alpha \tag{73}$$

Acesta este rezultatul pe care l-am fi obţinut dacă am fi uitat despre influenţa dipolilor unul asupra altuia. Ea se aplică destul de bine la gaze de densitate normală, pentru care termenul neglijat este de ordinul lui 10^{-3}. În această limită aranjarea geometrică a atomilor nu contează, doar numărul pe centimetru cub. Astfel prin măsurarea cu precizie a constantei dielectrice a unui gaz la presiune scăzută, polarizabilitatea atomică poate fi determinată fără nici un fel de complicaţii din influenţa mutuală a dipolilor. Măsurători asupra unei forme mai dense ale aceleiaşi substanţe* poate fi atunci folosită pentru a verifica o formulă teoretică cum este ecuaţia 72.

Termenul $-N\alpha/3$ în numitorul ecuaţiei 72 reflectă interacţia atomilor polarizaţi în cristal. Evident interacţia are natura unei *întăriri*, conducînd la o polarizare mai mare decît ar exista fără ea. Dacă luăm în serios formula matematică, ea sugerează o posibilitate surprinzătoare. Ce ar fi dacă $N\alpha$ ar fi atît de mare încît $N\alpha/3$ ar fi egal sau ar depăşi unu? Rezultă că χ_e ar tinde la infinit. Aceasta ar putea însemna o polarizare în cîmp aplicat zero! Sună ca un non-sens, dar nu este în întregime. Sînt cunoscute unele cristale care prezintă o polarizare electrică spontană. Totuşi, ceva mai mult decît polarizarea indusă este implicat în acest caz, teoria noastră nu este aplicabilă. De fapt, pentru a face $N\alpha/3$ să se apropie de unu, atomii trebuie să fie atît de strînşi împreună încît aproximaţiile noastre nu sînt bune de loc (vezi prob. 9.30).

9.14. VARIAŢII DE ENERGIE ÎN POLARIZARE

Pentru a încărca un condensator la o diferenţă de potenţial U, un lucru în mărime de $\frac{1}{2}CU^2$ este de făcut. Acea cantitate de energie poate fi recuperată permiţînd condensatorului să se descarce printr-un circuit extern. Energia a fost înmagazinată în condensatorul încărcat. S-a arătat în capitolul 2 că în orice sistem electrostatic energia înmagazinată poate fi calculată atribuind $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ joule/m³ cîmpului electric. Pentru a ne reaminti, intensitatea E a cîmpului în condensatorul de vid cu plăci paralele, cu suprafaţa plăcilor A şi distanţare t, este V/t, astfel încît

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) \times \text{volumul} = \varepsilon_0 V^2 A/2t = \frac{1}{2}CV^2.$$

Dacă condensatorul este umplut cu dielectric de constantă dielectrică k şi încărcat la aceeaşi diferenţă de potenţial V, lucrul efectuat va fi mai mare prin factorul k, deoarece C este de atîtea ori mai mare. Totuşi, E este acelaşi. De aceea energia de asociat cu unitatea de volum în dielectric

---

* Se poate arăta că relaţia dată în ecuaţia 72 este valabilă nu numai pentru un cristal cu simetrie cubică dar de asemenea pentru un gaz în care atomii ocupă poziţii întîmplătoare în spaţiu. Cea mai bună confirmare experimentală a acesteia vine de la măsurători ale constantei dielectrice a gazelor la densitate şi presiune relativ ridicate (vezi Prob. 9.28).

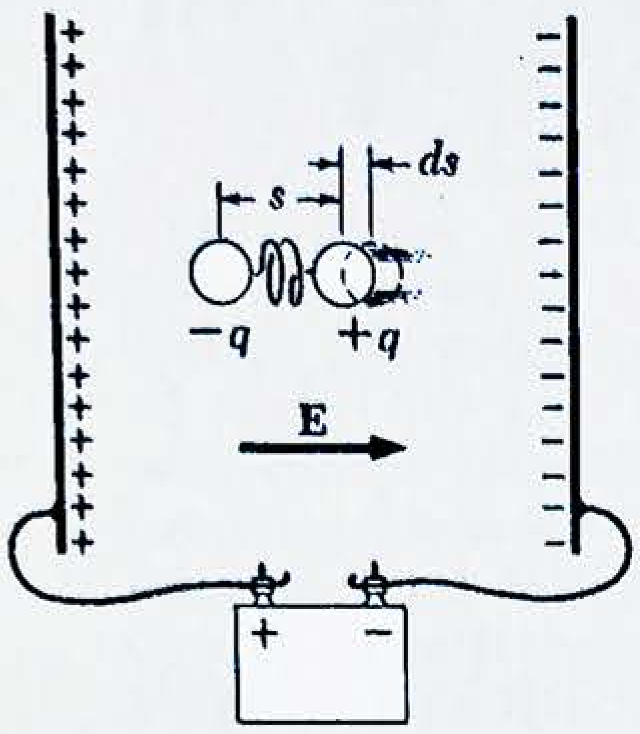


Fig. 9.34. O moleculă polarizată este ca două sarcini ţinute împreună de un arc elastic. Într-un cîmp **E** arcul este întins.

este nu $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, ci $\frac{1}{2}k\varepsilon_0 E^2$. Aceasta se poate generaliza la orice sistem electrostatic. În locul ecuaţiei 2.36 avem acum:

$$\text{Energia} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int kE^2\, dv. \qquad (74)$$

Cum este înmagazinată „extra"-energia? Să considerăm o moleculă polarizabilă izolată, căreia i se poate aplica un cîmp electric. În figura 9.34 molecula este reprezentată prin două sarcini fixate la extremităţile unui resort elastic. Momentul ei dipolar $\mathbf{p}$ este un vector de mărime qs. Cîmpul $\mathbf{E}$ provine de la nişte surse externe, ca plăcile şi bateria arătate în figură. Să presupunem că în timp ce cîmpul $\mathbf{E}$ este prezent, sarcinile se deplasează printr-o creştere ds. Momentul dipolar se schimbă prin aceasta de la qs la $q(s + ds)$. Şi a existat o mişcare de sarcină în direcţia lui $\mathbf{E}$, echivalentă cu deplasarea sarcinii $+q$ pe distanţa ds. (Nu contează dacă se deplasează o extremitate, sau amîndouă.) Deci lucru în cantitatea $Eqds$ a fost efectuat asupra moleculei. Originea ultimă a acestui lucru este sursa cîmpului — în figura 9.34 bateria care menţine diferenţa de potenţial constantă dintre plăci. Dacă dW reprezintă lucrul efectuat *asupra* moleculei, atunci

$$dW = Eqds = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{p} \qquad (75)$$

Energia înmagazinată care corespunde la aceasta poate fi găsită în două locuri, în resortul elastic care a fost întins la o lungime mai mare, şi în cîmpul electric al însuşi dipolului molecular, care acum are mai multă energie totală deoarece cele două sarcini sînt mai depărtate. În cazul unei molecule reale nu avem de făcut o astfel de distincţie. Toată energia aparţine structurii moleculare, şi dacă aveam de privit în acea structură dinamică am găsi energia ca energie potenţială electrostatică şi energie cinetică a mişcării electronului. Principalul este acesta: Lucrul care a fost efectuat asupra moleculei pentru a-i schimba polarizarea, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}$, a mărit exact cu aceasta energia legată în însăşi moleculă.

Să vedem cît de mult din energia înmagazinată în dielectric poate fi explicată în felul acesta. Cu N molecule per unitate de volum, $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$. Cînd $\mathbf{P}$ variază prin $d\mathbf{P}$, atunci $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}$ este creşterea în energia internă a moleculelor în 1 m^3. Dar deoarece $\mathbf{P} = (k-1)\varepsilon_0\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{P} = (k-1)\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = \frac{1}{2}(k-1)\varepsilon_0\, d(\mathbf{E}^2). \qquad (76)$$

De aceea, din cei $k\varepsilon_0 E^2/2$ joule care apar a fi înmagazinaţi în dielectric, $(k-1)\varepsilon_0 E^2/2$ pot fi explicaţi ca energie internă crescută a moleculelor polarizate. Restul, $\varepsilon_0 E^2/2$ este tocmai energia înmagazinată în cîmpul de vid.

9.15. DIELECTRICI ALCĂTUIŢI DIN MOLECULE POLARE

Moleculele cu momente dipolare permanente, moleculele *polare*, reacţionează la un cîmp electric încercînd să se alinieze paralel cu el. Modelul mecanic potrivit nu este acela a două sarcini la capetele unui resort, ci două sarcini fixate la capetele unei vergele (fig. 9.35). Dacă vergeaua nu este paralelă cu cîmpul, există un cuplu asupra ei, de mărime $Eqs \sin \theta$. Lucrul efectuat într-o deplasare unghiulară $d\theta$ este (cuplul $\times$ deplasarea unghiulară) sau $Eqs \sin \theta \, d\theta$. Aceasta se poate scrie de asemenea prin momentul dipolar vectorial $\mathbf{p}$, care este un vector de mărime qs, şi variaţia $d\mathbf{p}$ care apare la rotaţia prin $d\theta$. Din diagramă este clar că mărimea lui $d\mathbf{p}$ este $p\, d\theta$, şi direcţia sa este astfel că $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{p} = E\, dp \sin \theta$. Astfel $dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$. Aceasta este în acord cu ecuaţia 75, cum trebuie să fie.

Dacă o moleculă polară izolată ocupă poziţia indicată în figura 9.35 la momentul la care este aplicat cîmpul, ea se va roti paralel cu cîmpul, dar apoi va continua să se rotească peste echilibru şi va oscila ca un pendul, deoarece nu are nici o cale de a scăpa de energia ei. Totuşi, o moleculă reală înconjurată de alte molecule poate schimba energie cu vecinii ei, dînd un fel de „frecare" care amortizează oscilaţia. Ar părea că aceasta ar putea rezulta în aceea că toate moleculele polare dintr-o substanţă se aşază exact paralel cu orice cîmp aplicat, chiar slab. Aşa ar fi la temperatura zero absolut, presupunînd că rotaţia era încă posibilă. La orice temperatură peste zero absolut mişcarea întîmplătoare a agitaţiei termice, care este cu atît mai intensă cu cît este temperatura mai înaltă, acţionează împotriva alinierii ordonate. Cîmpul aplicat face energetic favorabilă pentru un dipol molecular o orientare paralelă cu cîmpul, dar în mod continuu ciocnită de vecini, cel mai bun lucru pe care îl poate face este să stea ceva mai mult timp orientată în direcţia corectă decît în aceea inversă. În apă, de exemplu, un cîmp de 1 000 volt/cm rezultă într-o polarizare echivalentă cu aliniere perfectă de aproximativ o moleculă din 3 000. Chiar şi aşa, aceasta este o polarizare mult mai mare decît ar arăta o substanţă nepolară în acelaşi cîmp, şi este motivul pentru constanta dielectrică extrem de înaltă a apei. Polarizarea globală într-un dielectric polar este în general proporţională cu intensitatea cîmpului electric aplicat şi invers proporţională cu temperatura absolută.

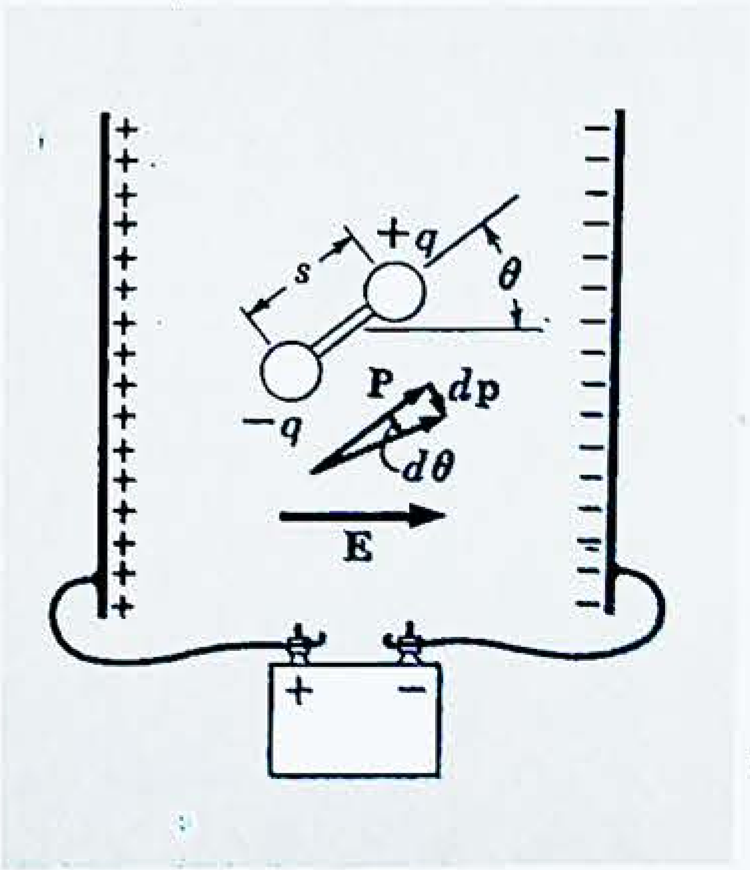


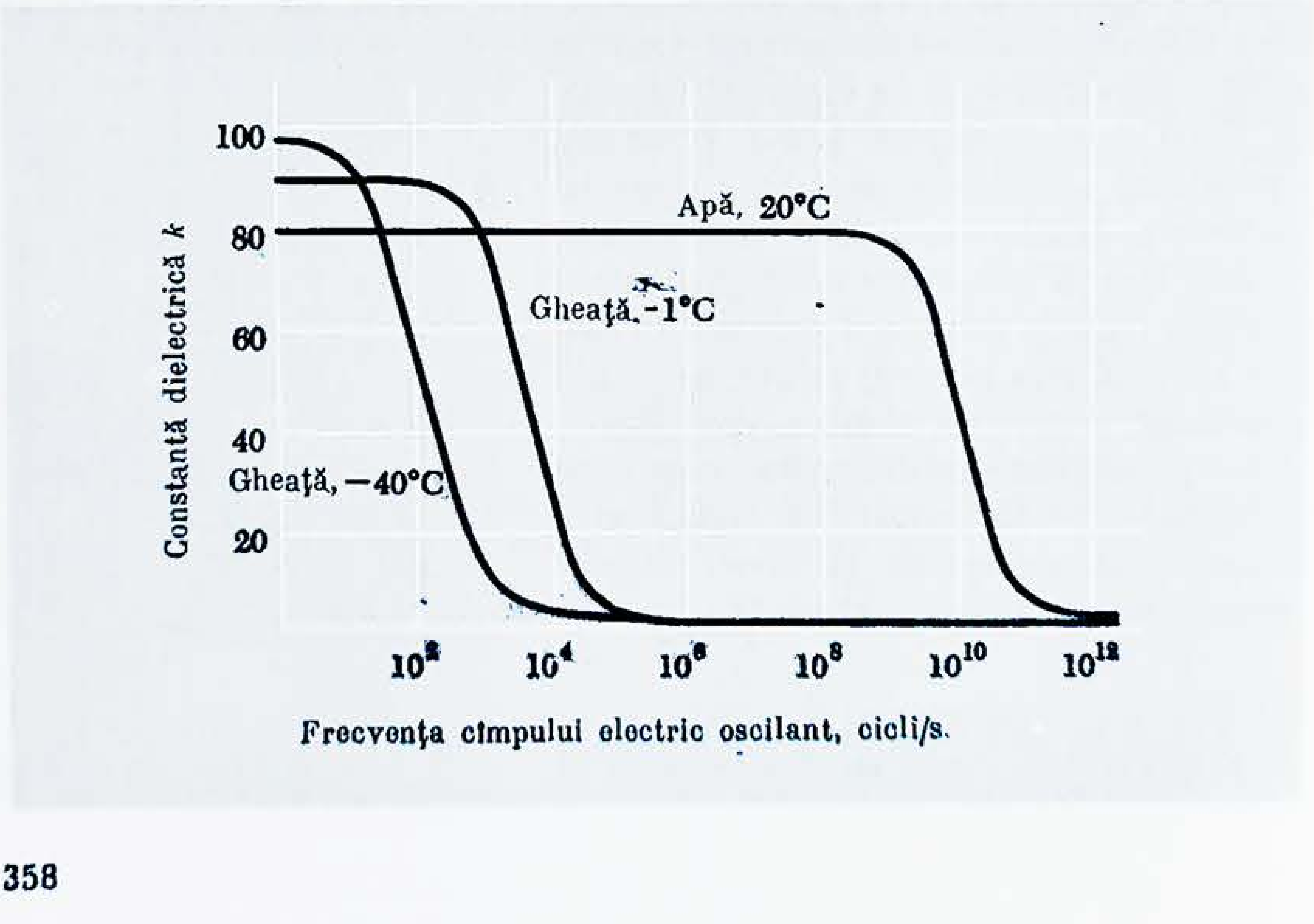
Fig. 9.35. O moleculă polară este ca două sarcini în capetele unei tije rigide. Un cîmp E exercită un cuplu asupra structurii.

9.16. POLARIZAREA ÎN CÎMPURI VARIABILE

Pînă aici am considerat doar cîmpuri electrostatice în materie. Este nevoie să considerăm efectele cîmpurilor electrice care variază în timp, ca de exemplu cîmpul într-un condensator folosit într-un circuit de curent alternativ. Întrebarea importantă este, vor menține variațiile în polarizare pasul cu variațiile în cîmp? Va fi raportul lui **P** la **E**, la orice moment, același ca și într-un cîmp electric static? Pentru variații foarte lente nu ne-am aștepta la nici o diferență dar, ca întotdeauna, criteriul pentru caracterul lent al variației depinde de procesul fizic particular. Apare că polarizarea indusă și orientarea dipolilor permanenți sînt două procese cu timpi de răspuns cu totul diferiți.

Polarizarea indusă a atomilor și moleculelor apare prin deformarea structurii electronice. Este implicată o masă mică iar structura este foarte rigidă; frecvențele ei naturale de vibrație sînt extrem de înalte. Pentru a formula altfel, mișcările electronilor în atomi și molecule sînt caracterizate prin perioade de ordinul a 10^{-16} secunde — ceva ca perioada undelor de lumină vizibilă. Pentru un atom, 10^{-14} secunde este un timp *lung*. Nu are nici o dificultate în a-și rearanja structura electronică într-un astfel de timp. Din cauza aceasta, substanțele strict nepolare se comportă practic identic de la „curent continuu" pînă la frecvențe apropiate de acelea ale luminii vizibile. Polarizarea se menține în pas cu cîmpul și susceptibilitatea $\chi_e = P/\varepsilon_0 E$ este independentă de frecvență. Ceea ce se întîmplă cînd frecvența de oscilație a cîmpului se apropie de o frecvență naturală a structurii electronice este o întrebare interesantă pe care trebuie să o lăsăm pentru volumul următor (o consecință este curcubeul!).

Fig. 9.36. Variație cu frecvența a constantei dielectrice a apei și a gheții.



Orientarea unei molecule polare este un proces cu totul diferit de simpla deformare a norului electronic. Întreaga structură moleculară trebuie să se rotească. La scară microscopică, este oarecum ca a întoarce o alună cu cîte 180 de grade într-o plasă cu alune. Rezistența de frecare tinde să facă rotația să rămînă în urma cuplului și să reducă amplitudinea polarizării rezultante. Unde pe scara timpului apare acest efect, variază enorm de la o substanță polară la alta. În apă, „timpul de răspuns" pentru reorientarea de dipol este ceva ca 10^{-11} secunde. Constanta dielectrică rămîne în jurul a 80 pînă la frecvențe de ordinul a 10^{10} cicli pe secundă. Peste 10^{11} ciclii pe secundă k scade la o valoare modestă tipică pentru un lichid nepolar. Dipolii nu pot pur și simplu urma o atît de rapidă alternare a cîmpului. În alte substanțe, în special solide, timpul caracteristic poate fi mult mai lung. În apă chiar sub punctul de topire timpul de răspuns este în jurul a 10^{-5} secunde. Figura 9.36 arată cîteva curbe experimentale ale constantei dielectrice în funcție de frecvență pentru apă și gheață.

Puteți întreba dacă o moleculă polară se poate într-adevăr roti în interiorul unei substanțe rigide compacte cum este un cristal. Se întîmplă în realitate în multe cristale, unde datorită vibrațiilor vecinilor, o moleculă se poate găsi brusc cu destul loc pentru a se roti ca o unitate. Dar întrebarea este bună, deoarece în unele solide, pot apărea deplasări ale sarcinilor electrice care nu se pot descrie ca rotații ale momentelor dipolare. Ne vom mai ocupa de această problemă.

9.17. CURENTUL DE SARCINĂ LEGATĂ

Ori de cîte ori polarizarea din materie variază în timp există un curent electric, o adevărată mișcare de sarcină. Să presupunem că există N dipoli per unitatea de volum în dielectric, și că în intervalul de timp dt fiecare variază de la $\mathbf{p}$ la $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Atunci densitatea de polarizare macroscopică $\mathbf{P}$ variază de la $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ la $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = N(\mathbf{p} + d\mathbf{p})$. Să presupunem că variația $d\mathbf{p}$ a fost efectuată prin deplasarea unei sarcini q prin distanța $d\mathbf{s}$, în fiecare atom: $q\, d\mathbf{s} = d\mathbf{p}$. Atunci în timpul dt a existat în realitate un nor de sarcină de densitate $\rho = Nq$, în mișcare cu viteza $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$. Acesta este un curent de conducție de o anumită densitate $\mathbf{J}$ în amper/cm²:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = Nq\frac{d\mathbf{s}}{dt} = N\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{77}$$

Legătura între rata de variație a polarizării și densitatea de curent, $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$, este independentă de detaliile modelului. O polarizare variabilă *este* un curent de conducție, care nu diferă esențial de oricare altul.

Desigur, un astfel de curent este o sursă de cîmp magnetic. Dacă nu există alți curenți în preajmă, scriem a doua ecuație a lui Maxwell

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \partial\mathbf{E}/\partial t + (1/\varepsilon_0)\mathbf{J} \quad \text{ca} \quad c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{78}$$

Singura diferență între un curent de conducție „obișnuit" și densitatea de curent $\partial\mathbf{P}/\partial t$ este că unul implică sarcină *liberă* în mișcare, celălalt sarcină *legată* în mișcare. Există o distincție practică destul de evidentă

— nu puteți avea un curent de sarcină legată *staționar*, unul care curge neschimbat la nesfîrșit. De obicei preferăm să menționăm separat curentul de sarcină legată și curentul de sarcină liberă, reținînd **J** drept simbol doar pentru densitatea curentului de sarcină liberă. Atunci pentru a include toți curenții în ecuațiile lui Maxwell, trebuie să o scriem în acest fel:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}_{\substack{\text{Densitatea}\\ \text{curentului}\\ \text{de sarcină}\\ \text{legată}}} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}}_{\substack{\text{Densitatea}\\ \text{curentului}\\ \text{de sarcină}\\ \text{liberă}}}. \tag{79}$$

Într-un mediu dielectric, $\mathbf{E} + (1/\varepsilon_0)\mathbf{P} = k\mathbf{E}$, conducînd la o versiune mai scurtă a ecuației 79:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = k\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}. \tag{80}$$

Mai general, ecuația 79 poate fi de asemenea prescurtată prin introducerea vectorului **D**, *definit* anterior ca $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$:

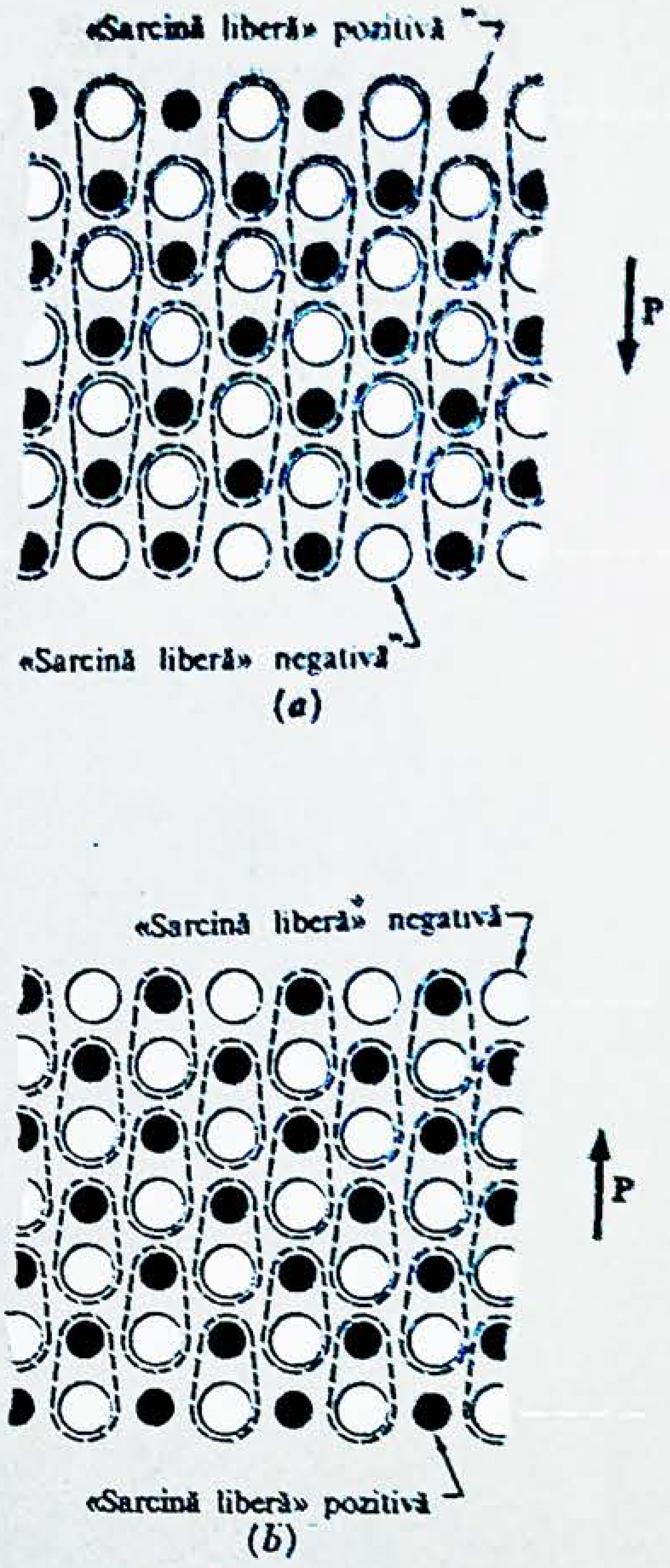
$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right). \tag{81}$$

Termenul $\partial\mathbf{D}/\partial t$ este menționat în mod obișnuit drept curentul de deplasare. În realitate, partea din el care implică $\partial\mathbf{P}/\partial t$ reprezintă, cum am văzut, un adevărat curent de conducție, sarcini reale în mișcare. Singura parte a densității de curent total care nu este simplu sarcină în mișcare este partea în $\partial\mathbf{E}/\partial t$, adevăratul curent de deplasare în vid pe care l-am discutat la sfîrșitul capitolului 7. Incidental, dacă vrem să exprimăm toate componentele densității de curent complete în unități corespunzînd acelora ale lui **J**, scriem ecuația 79 cum urmează:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Bigg[\underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\substack{\text{Densitatea}\\ \text{curentului}\\ \text{de deplasare}\\ \text{în vid}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}_{\substack{\text{Densitatea}\\ \text{curentului}\\ \text{de sarcină}\\ \text{legată}}} + \underbrace{\mathbf{J}}_{\substack{\text{Densitatea}\\ \text{curentului}\\ \text{de sarcină}\\ \text{liberă}}}\Bigg]. \tag{82}$$

În distincția dintre sarcină legată și sarcină liberă este implicată o problemă pe care nu am pus-o: se pot totdeauna identifica fără ambiguitate „momentele dipolare moleculare" în materie, în special în materia solidă? Răspunsul este nu. Să luăm o imagine microscopică a unui strat subțire dintr-un cristal de clorură de sodiu. Aranjarea ionilor de sodiu pozitivi și ionilor de clor negativi a fost arătată în figura 1.7. Figura 9.37 este o secțiune transversală prin cristal, care se extinde în afară spre stînga și spre dreapta. Dacă vrem, putem considera o pereche adiacentă de ioni ca o moleculă neutră cu un moment dipolar. Grupînd ca în figura 9.37, *a*, descriem mediul ca avînd o densitate de polarizare macroscopică uniformă **P**, un vector orientat în jos. În același timp, observăm că există un strat de sarcină pozitivă pe fața de sus a cristalului, și sarcină negativă pe fața

Fig. 9.37. Aceeaşi reţea ionică, cu sarcinile grupate în perechi ca „molecule" în două moduri: vectorul de polarizare orientat în jos (a), sau în sus (b). Sistemele sînt fizic identice, diferenţa este doar în descriere.



de jos care, nefiind incluse în moleculele noastre, trebuie socotite *sarcini libere*.

Acum am fi putut alege să grupăm ionii ca în figura 9.37, *b*. În această descriere, **P** este un vector orientat *în sus*, dar avem un strat de sarcină liberă negativă pe faţa de sus a cristalului şi un strat de sarcină liberă pozitivă dedesubt. *Fiecare dintre descrieri este corectă*. Nu veţi avea nici o dificultate în a găsi o alta, de asemenea corectă, în care **P** este zero şi nu există sarcină liberă. Fiecare dintre descrieri prezice $\mathbf{E} = 0$. Cîmpul electric macroscopic **E** este o mărime fizică observabilă. El poate depinde doar de distribuţie de sarcină, nu de cum alegem să *descriem* distribuţia de sarcină.

Acest exemplu ne învaţă că în universul atomic real distincţia dintre „sarcină legată" şi „sarcină liberă" este mai mult sau mai puţin arbitrară, şi tot aşa este conceptul de densitate de polarizare **P**. Dipolul molecular este o noţiune bine definită doar cînd moleculele ca atare sînt identificabile — cînd există o oarecare raţiune fizică pentru a spune: „Acest atom aparţine la această moleculă şi nu aceleia". În multe cristale o astfel de atribuire nu are înţeles. Un atom sau ion poate interacţiona aproximativ la fel de puternic cu toţi vecinii săi; se poate vorbi doar despre întreg cristalul ca o singură moleculă.

Orice arbitraritate în distincţia dintre sarcina liberă şi legată, se menţine, desigur, în distincţia dintre densitatea de curent a sarcinilor libere **J** şi $\partial\mathbf{P}/\partial t$. Să considerăm polarizarea unui cristal, cum este gheaţa. Reţeaua este tridimensională, dar am desenat în figura 9.38 o aranjare bidimensională cu trăsături întrucîtva asemănătoare. Să o numim gheaţă. În figura 9.38, *a* identificăm imediat moleculele de H_2O, deoarece observăm că fiecare atom de oxigen are exact doi atomi de H în apropiere. Cristalul aşa cum e arătat este polarizat. **P** este orientat în jos deoarece, aşa cum s-a observat mai înainte în acest capitol, extremitatea de oxigen a moleculei de apă are un exces de sarcină negativă. Putem gîndi părţile de hidrogen negre

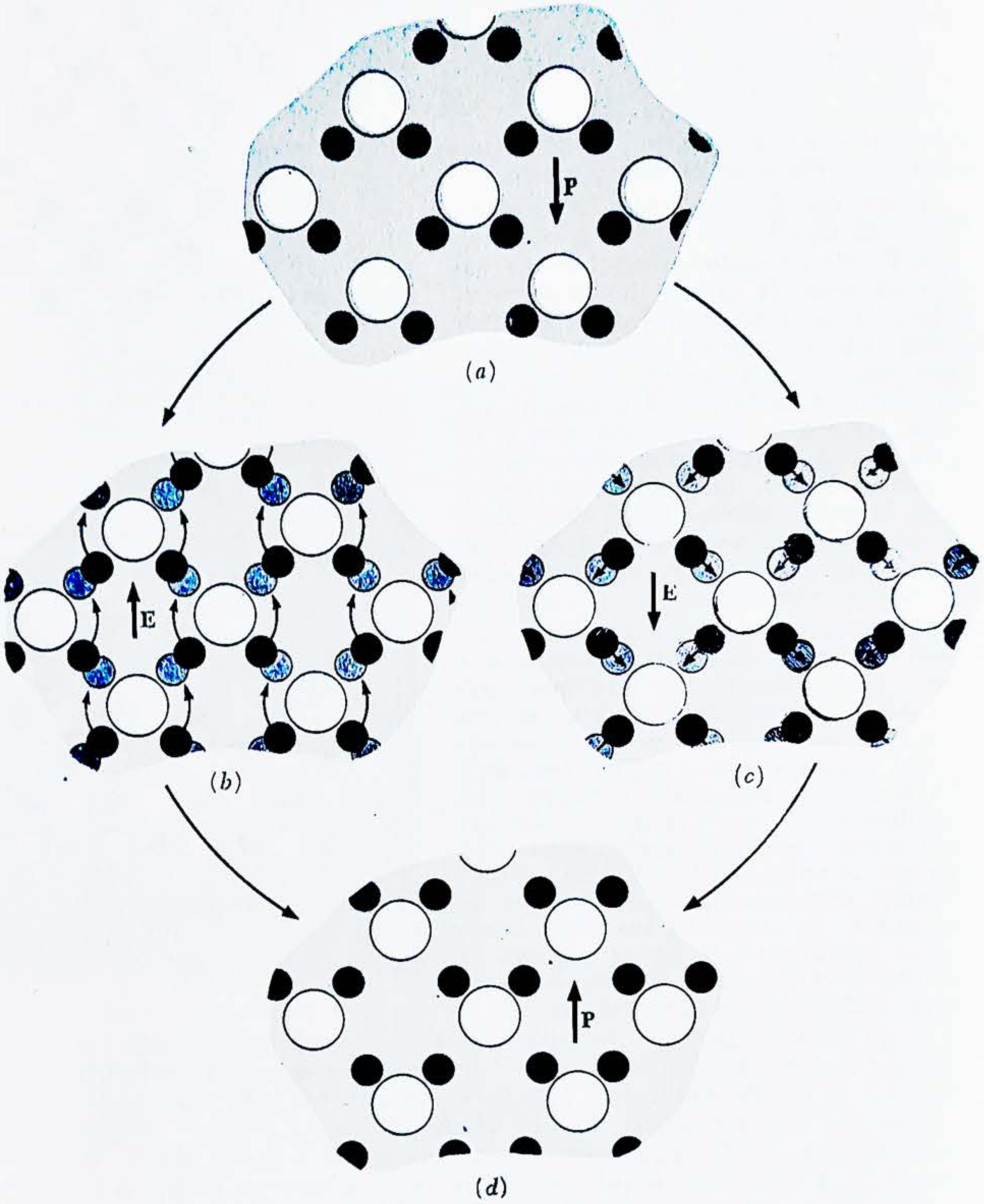


Fig. 9.38. Reţeaua de grupuri moleculare polarizate (*a*) poate fi schimbată în reţeaua de grupuri polarizate invers (*d*) în două moduri (*b* sau *c*).

în diagramă ca sarcini pozitive. Să presupunem cum că ceva se întîmplă care schimbă condiţia internă a acestui cristal la aceea arătată în figura 9.38, *d*, o vedere microscopică a aceleiaşi regiuni. Acum dipolii sînt inversaţi, şi descriem cristalul drept avînd o polarizare orientată *în sus*.

Schimbarea *ar fi putut* fi efectuată în două moduri esenţial diferite, ilustrate în figura 9.38, *b* şi *c*. În figura 9.38, *b* un cîmp electric **E** orientat în sus a fost aplicat, împingînd în sus extremitatea pozitivă a moleculelor, de fapt întorcînd fiecare moleculă. Există o mişcare *în sus* netă de sarcină pozitivă; curentul pe care îl reprezintă va fi dat de termenul $\partial \mathbf{P}/\partial t$ cum tocmai am învăţat.

Figura 9.38, *c* reprezintă un proces cu totul diferit, în care aplicarea unui cîmp electric orientat în jos încurajează hidrogenii să schimbe partenerii. Fiecare se deplasează către cel mai apropiat atom de O de sub el. (Aceasta este mai uşor, în cristalul real, deoarece H-ul care se află între doi atomi O este într-un oarecare grad împărţit de ambii, dînd „legătura de hidrogen" care ţine cristalul la un loc.) Configuraţia finală arată exact la fel. Dipolii sînt toţi inversaţi — dar ceea ce a apărut a fost un curent în jos de sarcină pozitivă. Dacă calculăm curenţii din acest proces, pentru a-i introduce în partea dreaptă a ecuaţiei 79, avem de introdus acelaşi termen ca înainte, $\partial \mathbf{P}/\partial t$, care corespunde la un curent în sus, dar trebuie să adăugăm un curent de conducţie **J** în jos mai mare, corespunzînd mişcării fiecărei sarcini în jos printr-o întreagă constantă de reţea *d*. Diferenţa va fi curentul net adevărat provenind de la deplasarea în jos reală a sarcinii pozitive prin distanţa *s*.

Observaţi că în fiecare caz curentul total curge în direcţia cîmpului electric aplicat. Doar din măsurători macroscopice nu am putea spune care proces microscopic a avut loc. De fapt, încă se mai discută despre mecanismul de polarizare pentru gheaţă. Pentru a argumenta, este nevoie a cunoaşte suficient despre structura microscopică pentru a fi siguri: ce este mai uşor, a întoarce o moleculă, ori transferul de protoni. Pentru noi, lecţia de învăţat este simplu aceasta: Mişcarea microscopică reală a *tuturor* sarcinilor determină curentul de conducţie total, liber *sau* legat.

PROBLEME

Proiectarea unui condensator practic.

9.1. Aveţi la dispoziţie bandă de polietilenă, de constantă dielectrică 2,3, lăţime 6,0 cm şi grosime 0,0025 cm, şi de asemenea foiţă de aluminiu cu lăţimea 5,0 cm şi grosimea 0,001 cm. Vreţi să faceţi un condensator cu capacitatea de aproximativ 0,05 μF, sub forma unei înfăşurări cilindrice compacte. Arătaţi cum aţi putea-o face, estimînd cantitatea de bandă de fiecare fel care ar fi necesară, şi diametrul complet al condensatorului terminat.

Butelia de Leyda

9.2. În 1746 Profesorul Musschenbroek din Leyda a încărcat apa dintr-o sticlă prin atingerea unui fir, ieşind din gîtul sticlei, de maşina sa electrostatică. Cînd asistentul său, care ţinea sticla într-o mînă, a încercat să îndepărteze firul cu cealaltă, a fost supus unui şoc violent. Astfel a atras condensatorul atenţia oamenilor de ştiinţă. Descoperirea „buteliei de Leyda" a revoluţionat experienţele din domeniul electricităţii. Deja în 1747 Benjamin Franklin descria experienţele sale cu „minunata butelie a d-lui Musschenbroek". Butelia nu era de fapt decît sticlă cu un conductor de fiecare parte a ei. Pentru a vedea de ce a produs o astfel de senzaţie, estimaţi capacitatea unei butelii alcătuită dintr-o sticlă de 1 litru cu pereţii de 2 mm grosime, sticla avînd constanta dielectrică 4. De ce diametru ar fi sfera care, în aer, ar avea aceeaşi capacitate?

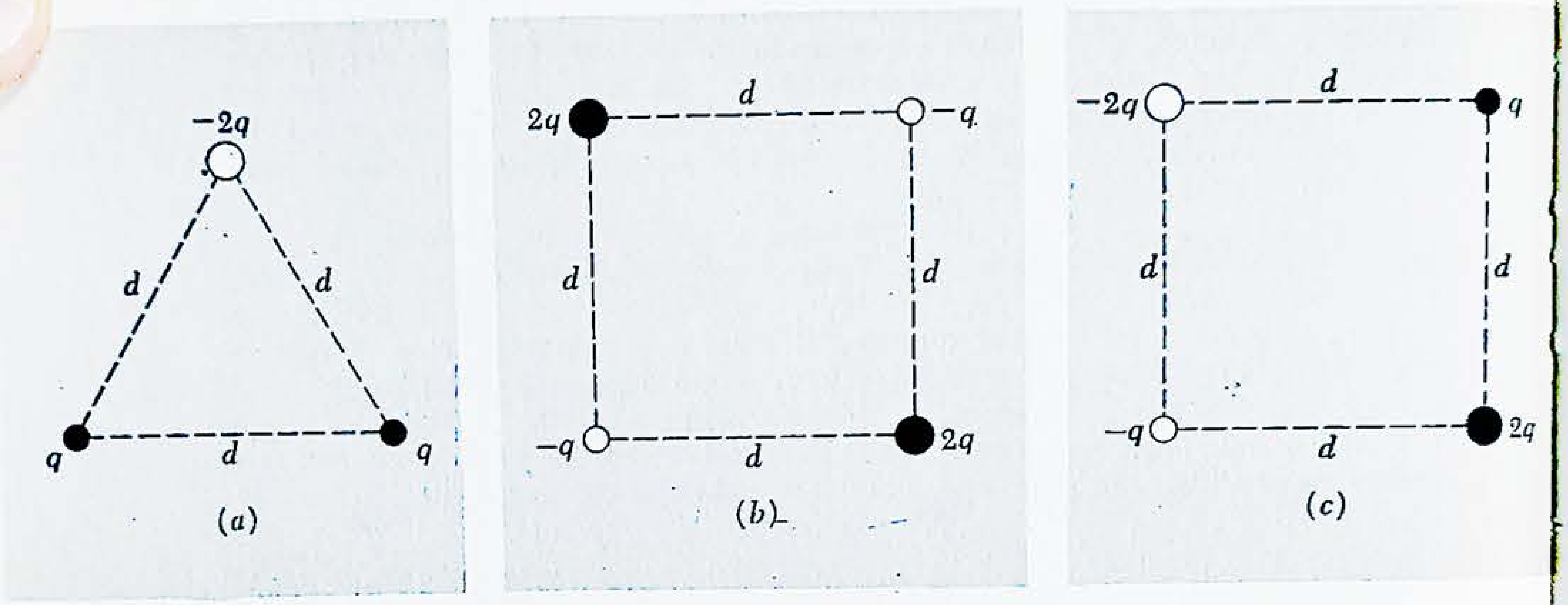


Fig. la problema 9.3

9.3. Care este mărimea momentului dipolar a fiecăreia dintre distribuţiile de sarcină în părţile (*a*), (*b*) şi (*c*) ale figurii? Care este direcţia vectorului moment dipolar **p**?

Distribuţia de sarcină într-o moleculă

9.4. În molecula de acid clorhidric distanţa dintre nucleul de clor şi proton este 1,28 Å. Să presupunem că electronul de la atomul de hidrogen este transferat în întregime la atomul de clor, unindu-se cu ceilalţi electroni pentru a forma o sarcină negativă sferic simetrică şi centrată pe nucleul de clor. Cum se compară momentul dipolar electric din acest model cu momentul dipolar real al moleculei de HCl dat în fig. 9.16? Unde trebuie să fie localizat adevăratul „centru de gravitate" al distribuţiei de sarcină negativă în molecula reală? (Nucleul de clor are o sarcină 17 *e*, nucleul de hidrogen, o sarcină *e*.)

Cîmpul unui dipol molecular

9.5. O moleculă de acid clorhidric este situată în origine cu linia H—Cl de-a lungul axei z şi Cl deasupra. Care este direcţia cîmpului electric, şi intensitatea sa în V/m, într-un punct cu 10 Å mai sus de origine, pe axa z? într-un punct cu 10 Å în afara originii pe axa y?

Cîmpul unui dipol macroscopic

9.6. Un condensator plan-paralel, cu o capacitate măsurată $C = 300$ μF este încărcat la o diferenţă de potenţial de 1800 volţi. Plăcile sînt la 1,5 cm depărtare. Sîntem interesaţi în cîmpul în afara condensatorului, aşa-numitul cîmp „de margine" pe care de obicei îl neglijăm. În particular, am dori să ştim cîmpul la o distanţă de la condensator mare în comparaţie cu mărimea condensatorului. Acesta poate fi găsit considerînd distribuţia de sarcină pe condensator ca drept un dipol. Estimaţi intensitatea cîmpului electric (a) într-un punct la 3 metri de condensator în planul plăcilor şi (b) într-un punct la aceeaşi depărtare pe direcţia perpendiculară plăcilor.

Condensatorul permeabil

9.7. În § 4.11 am discutat timpul de relaxare al unui condensator umplut cu un material de rezistivitate ρ. Dacă priviţi în urmă la acea discuţie veţi observa că am evitat problema constantei dielectrice a materialului. Acum puteţi îndrepta omisiunea. Introduceţi k în mod corect în expresia pentru constanta de timp. Un condensator permeabil important pentru noi toţi este format din peretele unei celule vii, un izolator (printre multele sale alte funcţiuni!) care separă două fluide conductoare. Proprietăţile sale electrice sînt de un interes deosebit în cazul unei celule nervoase, deoarece propagarea unui impuls nervos este însoţită de schimbări rapide în diferenţa de potenţial electrică între interior şi exterior. În nota din § 3.5, am menţionat că condensatorul de membrană celulară are în mod tipic o capacitate în jurul a 1 μF/cm² de arie de membrană. Se crede că membrana este alcătuită din material avînd constanta dielectrică de aproximativ 3. Puteţi acum calcula ce grosime implică aceasta. Alte măsurători electrice au indicat că rezistenţa unui cm² de membrană celulară, măsurată de la fluidul conductor de pe o parte la cealaltă, este în jurul a 1000 ohmi. Arătaţi că constanta de timp a unui asemenea condensator este independentă de aria condensatorului. Cît este de mare în acest caz? Unde s-ar situa rezistivitatea unei astfel de membrane în diagrama din figura 4.6?

O sferă polarizată

9.8. Dacă toţi dipolii moleculari dintr-o picătură de apă cu raza de 1 mm ar fi orientaţi în acelaşi fel, care ar fi intensitatea maximă a cîmpului (a) la 10 cm depărtare de picătură? (b) la suprafaţa picăturii?

Un conductor sferic într-un cîmp uniform

9.9. Formula noastră pentru sfera dielectrică poate fi în realitate folosită pentru a descrie o sferă metalică într-un cîmp uniform. Pentru a o demonstra, cercetaţi cazul limită, $k \to \infty$, şi arătaţi că cîmpul exterior A

ia o formă care satisface condiţiile de frontieră de conductor perfect. Ce se întîmplă cu cîmpul interior? Faceţi o schiţă a cîtorva linii de cîmp în acest caz limită. Cît este de mare momentul dipolar indus într-o sferă conductoare de rază a, într-un cîmp E_0? Care ar fi diametrul unei sfere perfect conductoare care ar avea aceeaşi polarizabilitate ca şi atomul de hidrogen?

9.10. Cît de mult diferă momentul dipolar indus al unei picături de apă ($k = 81$) de acela al unei bile de rulment de acelaşi diametru în acelaşi cîmp?

Deducere alternativă a cîmpului într-o sferă polarizată

9.11. În § 9.10 faptul că cîmpul electric este uniform în interiorul sferei polarizate a fost dedus din forma potenţialului pe frontieră. Puteţi arăta aceasta de asemenea prin superpunerea cîmpurilor interne a două bile de sarcină ale căror centre sînt separate. (*a*) Arătaţi că în interiorul unei distribuţii uniforme de sarcină **E** este proporţional cu **r**. (*b*) Acum luaţi două distribuţii sferice de densităţi ρ şi $-\rho$, centre C_1 şi C_2 şi arătaţi că cîmpul rezultant este constant şi paralel cu linia de la C_1 şi C_2. (*c*) Analizaţi în acelaşi mod cîmpul unei vergele cilindrice circulare care este polarizată perpendicular pe axă.

9.12. Figura arată trei condensatori de aceeaşi arie şi distanţare între plăci. Să numim capacitatea condensatorului în vid C_0. Fiecare din celelalte este pe jumătate umplut cu dielectric, de aceeaşi constantă dielectrică k, dar aşezat în mod diferit, cum se arată. Găsiţi capacitatea fiecărora dintre aceşti doi condensatori. (Neglijaţi efectele de margine.)

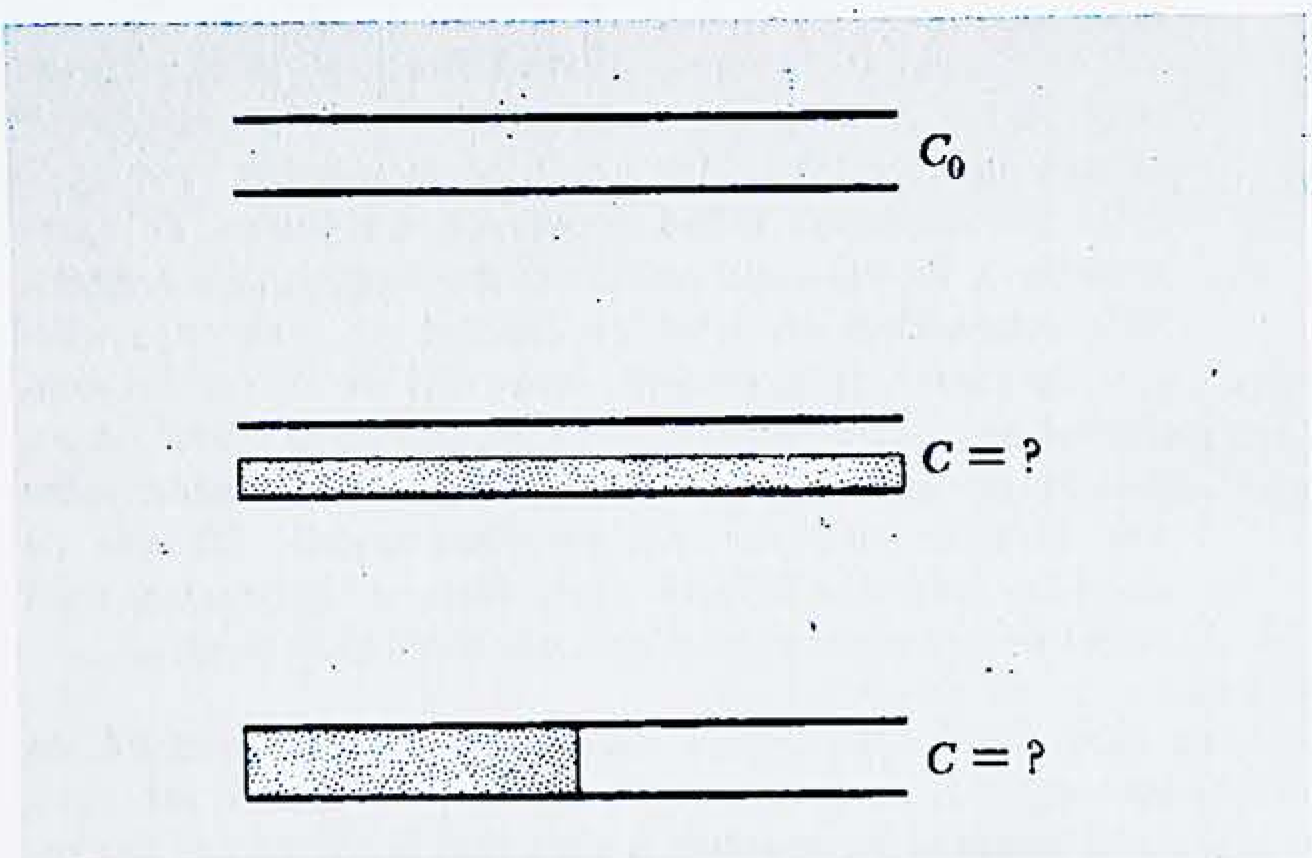


Fig. la problema 9.12

Înmagazinarea energiei într-un condensator; cîteva considerațiuni practice.

9.13. Să considerăm condensatorul drept un dispozitiv de înmagazinare a energiei. Limitarea practică asupra diferenţei de potenţial dintre plăcile unui condensator este „tăria dielectrică" a stratului dielectric, care este intensitatea cîmpului maxim care poate exista fără a

se produce o scînteie. Aceasta este în mod tipic 10^5 volți/cm, pentru un dielectric lichid bun cu $k \approx 2,3$ și densitate $\rho \approx 1$ gram/cm³. Neglijînd greutatea electrozilor și carcasei, cîți joule de energie pot fi înmagazinați pe kilogram de condensator? (Observați că aceasta este independent de capacitate, formă, număr de armături etc.). Alegînd joule/kilogram drept „indice de calitate" pentru un rezervor de energie, comparați condensatorul cu o baterie acumulatoare de automobil, și cu un volant rotitor. Veți avea de făcut cîteva aprecieri rezonabile asupra greutății și debitului energetic al unei baterii acumulatoare, și veți avea de decis ce limitează viteza unui tambur. Care este un avantaj al condensatorului ca rezervor de energie?

9.14. Figura arată schematic două procese diferite, în fiecare din ele o bucată de dielectric este introdusă între

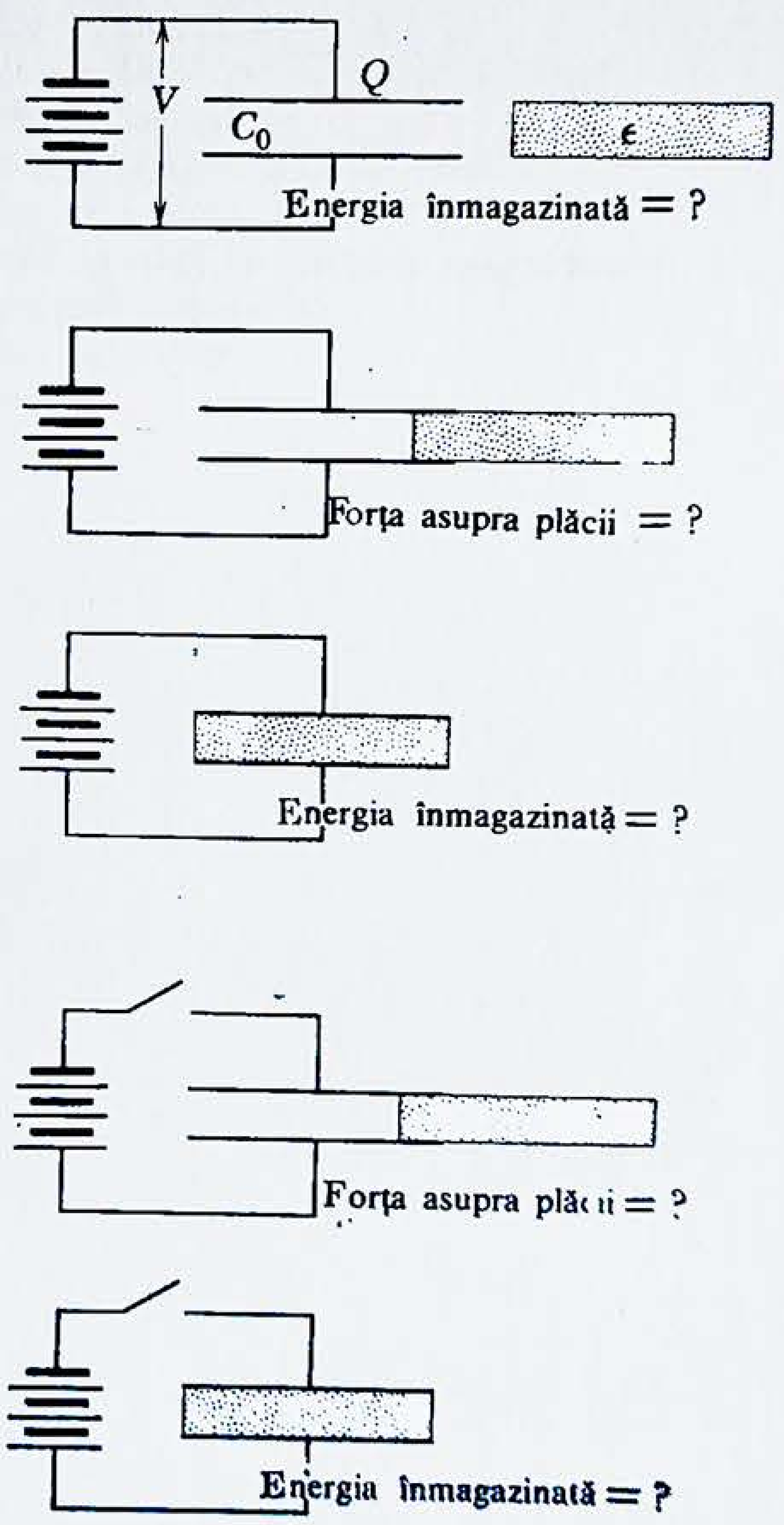


Fig. la problema 9.14

plăcile unui condensator încărcat. Urmează să analizaţi variaţiile de energie implicate, cum se sugerează prin întrebările din desene. Ce puteţi spune despre forţa asupra dielectricului?

9.15. O sferă metalică de rază a este înconjurată printr-o pătură dielectrică groasă de rază interioară a, rază exterioară b, şi constantă dielectrică k. Sfera metalică poartă o sarcină liberă Q. Nu există sarcină liberă pe sau în dielectric. Analizaţi complet acest sistem, determinînd potenţialul sferei metalice şi distribuţia de sarcină legată.

plăcile unui condensator încărcat. Urmează să analizaţi variaţiile de energie implicate, cum se sugerează prin întrebările din desene. Ce puteţi spune despre forţa asupra dielectricului?

9.15. O sferă metalică de rază a este înconjurată printr-o pătură dielectrică groasă de rază interioară a, rază exterioară b, şi constantă dielectrică k. Sfera metalică poartă o sarcină liberă Q. Nu există sarcină liberă pe sau în dielectric. Analizaţi complet acest sistem, determinînd potenţialul sferei metalice şi distribuţia de sarcină legată.

Capitolul 10

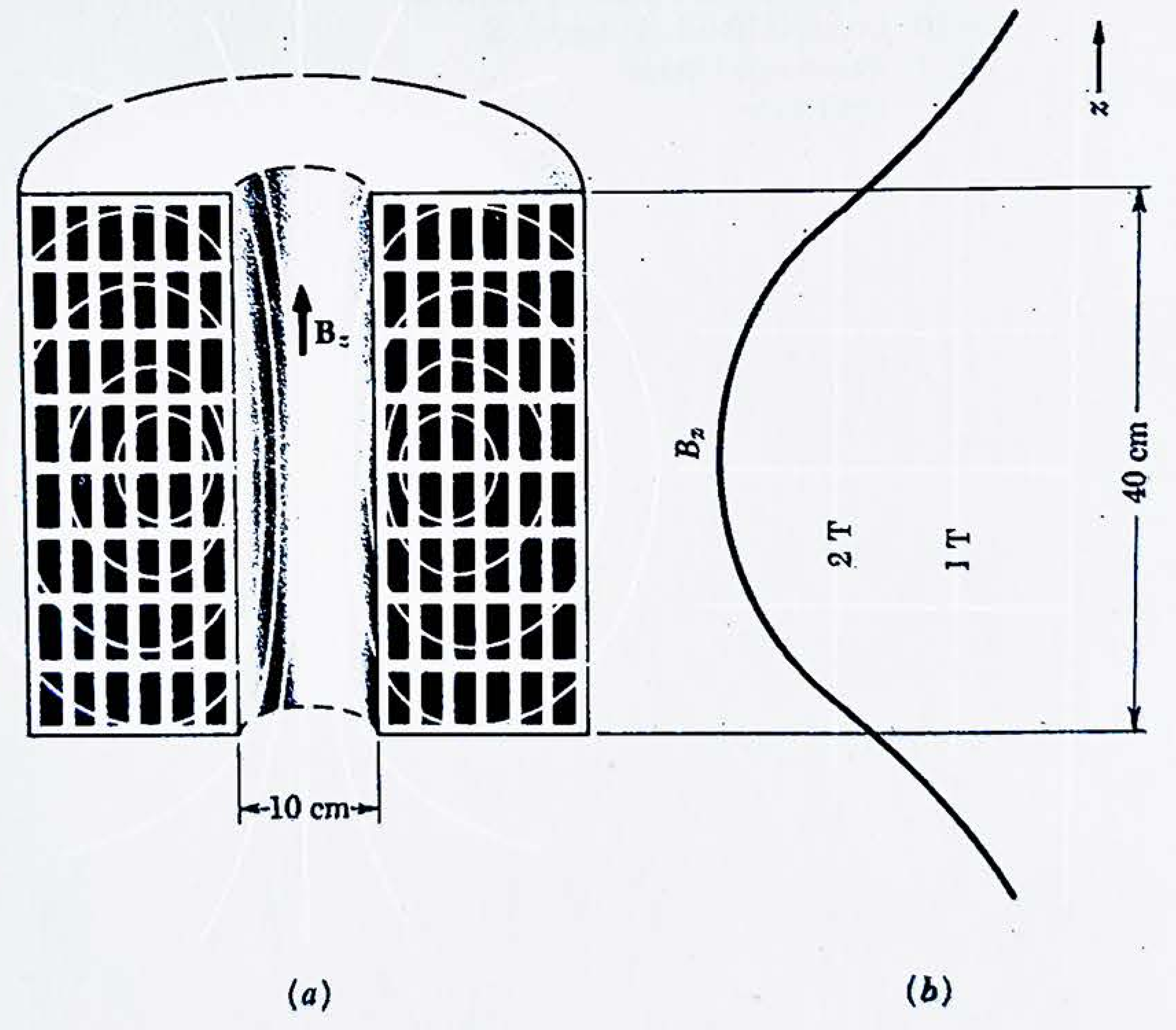
Cîmpuri magnetice în substanță

10.1. Cum răspund diferite substanțe la un cîmp magnetic 370
10.2. Absența „sarcinii" magnetice 375
10.3. Cîmpul unei bucle de curent 377
10.4. Forța asupra unui dipol într-un cîmp exterior 383
10.5. Curenți electrici în atomi 385
10.6. Spinul electronului și momentul magnetic 392
10.7. Susceptibilitatea magnetică 395
10.8. Cîmpul magnetic produs de materia magnetizată 396
10.9. Cîmpul unui magnet permanent 401
10.10. Curenții liberi și cîmpul H 405
10.11. Feromagnetismul 409
Probleme 415

10.1. CUM RĂSPUND DIFERITE SUBSTANȚE LA UN CÎMP MAGNETIC

Să ne gîndim că facem niște experiențe cu un cîmp magnetic foarte intens. Mai precis, să presupunem că am construit un solenoid de diametru interior 10 cm, lungime 40 cm, ca acela arătat în figura 10.1 Diametrul său exterior este 40 cm, cea mai mare parte din spațiu fiind umplută cu înfășurarea de cupru. Această bobină dă un cîmp staționar de 3 tesla

Fig. 10.1. (*a*) O bobină proiectată să producă un cîmp magnetic intens. Înfășurarea răcită cu apă este arătată în secțiune. (*b*) Un grafic al inducției magnetice B_z, pe axa bobinei.



constantă pe o regiune de cîţiva centimetri întindere, la capătul bobinei; dacă folosim probe nu mai mari de 1 sau 2 cm³ în volum ele pot fi bine ţinute în interiorul acestei regiuni.) Putem exprima rezultatele noastre cantitative, pentru o substanţă dată, ca atîţia newton forţă pe gram de probă, în condiţiile $B_z = 1{,}8$ tesla, $dB_z/dz = 17$ tesla/metru.

Dar mai întîi rezultatele calitative, care sînt puţin deconcertante: Pentru un mare număr de substanţe pure cu totul obişnuite forţa observată, deşi uşor măsurabilă, pare după întreg efortul nostru de a obţine un cîmp magnetic intens, ridicol de mică. Ea este de 10^{-4} sau 2×10^{-4} newton pe gram, în mod tipic, nu mai mult decît cîteva procente din greutatea probei. Forţa este orientată în sus pentru unele substanţe, şi în jos pentru alte substanţe. Aceasta nu are nimic de-a face cu *sensul* cîmpului magnetic, după cum putem verifica inversînd curentul în bobină. În schimb, apare că unele substanţe sînt totdeauna atrase în sensul inducţiei *crescătoare*, altele în direcţia intensităţii de cîmp *descrescătoare*, independent de direcţia cîmpului.

Forţa care acţionează asupra unui gram de probă aflată în cîmp magnetic, cu $B_z = 1{,}8$ tesla, $dB_z/dz = 17$ tesla/metru

Substanţa	Formula	Forţa* (10^{-5} N)
Diamagnetice		
Apă	H_2O	—22
Cupru	Cu	—2,6
Plumb	Pb	—37
Clorură de sodiu	NaCl	—15
Cuarţ	SiO_2	—16
Sulf	S	—16
Diamant	C	—16
Grafit	C	—110
Azot lichid	N_2	—10 (78K)
Paramagnetice		
Sodiu	Na	+20
Aluminiu	Al	+17
Clorură de cupru	$CuCl_2$	+280
Sulfat de nichel	$NiSO_4$	+830
Oxigen lichid	O_2	+7 500 (90K)
Feromagnetice		
Fier	Fe	+400 000
Magnetit	Fe_3O_4	+120 000

* Sensul forţei: în jos +, în sus —. Toate măsurătorile făcute la 20° (cu excepţiile notate).

Găsim cîteva substanţe care sînt atrase în bobină cu o forţă considerabil mai mare. De exemplu, cristalele de clorură de cupru sînt atrase în jos cu o forţă de $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ newtoni pe gram de probă. Oxigenul lichid se comportă spectaculos în această experienţă; el este atras în bobină cu o forţă de opt ori greutatea sa. De fapt, dacă am fi adus un balon neacoperit de oxigen lichid lîngă capătul de jos al bobinei, lichidul ar fi ridicat în afară din balon. (Unde credeţi că s-ar opri?) Azotul lichid, de altă parte,

se dovedește a fi cu totul neinteresant; un gram de azot lichid este împins în afară din bobină cu forța slabă de 10^{-4} newtoni. În tabelul precedent am trecut cîteva rezultate care s-ar putea obține într-o astfel de experiență. Substanțele, incluzîndu-le pe cele deja amintite, au fost alese pentru a sugera, cît se poate mai bine cu cîteva exemple, domeniul larg de comportare magnetică pe care îl întîlnim în materiale obișnuite.

După cum știți, cîteva substanțe, dintre care cea mai familiară este fierul, par mult mai „magnetice" decît oricare altele. În tabel dăm forța care ar acționa asupra unei bucăți de 1 gram de fier așezată în aceeași poziție în cîmp ca și celelalte probe. Forța este aproape 5 N! (Nu vom fi fost atît de naivi încît să ne apropiem de magnetul nostru cu mai multe grame de fier suspendate într-un tub de probă pe o spirală delicată — trebuie folosită o suspensie diferită.) Observați că există un factor de mai mult de 10^5 între forța care acționează asupra unui gram de fier și forța asupra unui gram de cupru, elemente altfel nu radical diferite. Incidental, aceasta sugerează că măsurători magnetice demne de încredere asupra unei substanțe cum este cuprul pot să nu fie ușoare. O contaminare de cîteva părți la milion prin particule de fier metalic vor falsifica cu totul rezultatul.

Există o altă diferență esențială între comportarea fierului și a magnetitei și aceea a celorlalte substanțe din tabel. Să presupunem că facem încercarea simplă, prin variere a intensității cîmpului magnetului, pentru a vedea dacă forța asupra probei este proporțională cu cîmpul. De exemplu, am putea reduce curentul în bobină la jumătate, prin aceasta înjumătățind atît intensitatea cîmpului cît și gradientul dB_z/dz. Am găsi, în cazul fiecărei substanțe deasupra fierului în tabelă, că forța este redusă la o *pătrime* din valoarea sa precedentă, în timp ce forța asupra probei de fier și aceea asupra magnetitei, ar fi reduse doar la jumătate sau poate ceva mai puțin. Evident forța, cel puțin în aceste condiții, este proporțională cu pătratul intensității cîmpului pentru toate celelalte substanțe listate, dar aproape proporțională intensității însăși a cîmpului pentru Fe și F_3O_4.

Apare că am putea avea de a face cu mai multe fenomene diferite aici. Ca un mic pas către înțelegere, putem introduce o clasificare.

Mai întîi, acele substanțe care sînt slab respinse de magnetul nostru, apă, clorură de sodiu, cuarț etc., sînt numite *diamagnetice*. Majoritatea compușilor anorganici și practic toți compușii organici sînt diamagnetici. Apare, de fapt, că diamagnetismul este o proprietate a *fiecărui* atom sau molecule. Cînd comportarea opusă este observată, aceasta se întîmplă deoarece diamagnetismul este întrecut de un efect diferit și mai puternic, unul care conduce la atracție.

Substanțele care sînt atrase către regiunea de cîmp mai intens sînt numite *paramagnetice*. În unele cazuri, paramagnetismul nu este mult mai puternic decît diamagnetismul comun. În alte materiale cum este $NiSO_4$ și $CuCl_2$ din lista noastră, efectul paramagnetic este mult mai puternic. În aceste substanțe de asemenea, efectul *crește* cînd temperatura este coborîtă, conducînd la efecte deosebit de mari la temperaturi lîngă zero absolut. Creșterea paramagnetismului cu scăderea temperaturii este responsabilă în parte pentru forța mare măsurată pentru oxigenul lichid. Dacă gîndiți că toate acestea se pot explica simplu, observați că cuprul este diamagnetic în timp ce clorura de cupru este paramagnetică, dar sodiul este paramagnetic în timp ce clorura de sodiu este diamagnetică.

În fine, substanțele care se comportă ca fierul și magnetita sînt numite *feromagnetice*. Pe lîngă metalele comune din această clasă, fier, cobalt și nichel, sînt cunoscute multe aliaje feromagnetice și compuși cristalini. De fapt cercetarea curentă în feromagnetism mărește în mod constant lista.

În acest capitol avem două sarcini. Una este să dezvoltăm o tratare de scară largă a fenomenelor implicînd materiale magnetizate, în care materialul însuși este caracterizat prin cîțiva parametri și relațiile determinate experimental între ei. Este ca o tratare a dielectricilor bazată pe cîteva relații observate între cîmpul electric și polarizarea globală. Uneori numim o astfel de teorie *fenomenologică*. A doua noastră sarcină este să încercăm să înțelegem, cel puțin într-un mod general, originea atomică a diferitelor efecte magnetice. Chiar mai mult decît fenomenele dielectrice efectele magnetice, odată înțelese, dezvăluie cîteva trăsături de bază ale structurii atomice.

Un fapt general se desprinde din tabel. Foarte puțină energie, în scara energiilor moleculare, este implicată în diamagnetism și paramagnetism. Să luăm exemplul extrem al oxigenului lichid. Pentru a scoate 1 gram de oxigen lichid în afara cîmpului magnetului nostru, am avea nevoie de o cantitate de lucru de ordinul de mărime a $7{,}5 \times 10^{-2}$ newton ori o distanță de cîțiva centimetri (deoarece intensitatea cîmpului descrește substanțial pe o distanță de cîțiva centimetri). Să spunem, în mare, 5×10^{-3} joule. Acum este nevoie de 300 de ori acea energie (0,4 calorii, sau 1,6 joule) pentru a ridica temperatura a 1 gram de O_2 lichid cu un grad, și este nevoie de mai mult de 30 000 ori atîta energie pentru a evapora lichidul, adică, pentru a separa moleculele una de alta. Orice s-ar putea întîmpla în oxigen lichid la un nivel molecular, drept rezultat al cîmpului magnetic, este aparent un lucru foarte minor în termeni energetici.

Știm că fie și cîmpuri magnetice intense nu au practic nici o influență asupra proceselor chimice, și aceasta se petrece pentru biochimie, de asemenea. Vă puteți pune mîna și brațul (nu acela cu ceasul!) într-un solenoid de 3 tesla, fără nici o senzație semnificativă sau consecință. Este greu de prezis dacă brațul dumneavoastră va fi paramagnetic sau diamagnetic, dar forța asupra lui nu va fi în orice caz mai mult de 10^{-1} N. Generații de șoareci au fost născuți și crescuți în cîmpuri magnetice intense fără schimbări semnificative. Nici alte experiențe biologice nu au adus nimic remarcabil în sensul unor efecte magnetice asupra proceselor chimice*. Aceasta nu este surprinzător. În interacția cu materia, cîmpul magnetic joacă un rol complet diferit de acela al cîmpului electric. Deoarece atomii și moleculele sînt alcătuiți din sarcini electrice în mișcare lentă, forțele electrice domină întru totul scena moleculară.

---

* Aceasta nu înseamnă că efectele mici sînt totdeauna fără consecință. La urmă, un argument ca acela pe care tocmai l-am folosit ar arăta că gravitatea este energetic neimportantă la scară moleculară, totuși pomii pe coasta unui deal cresc vertical. Aceasta probabil implica forța globală asupra unei unități biologice mai mari decît dimensiunile moleculare. Într-adevăr, un „tropism" întrucîtva asemănător a fost demonstrat experimental în cazul puieților crescînd într-un cîmp magnetic puternic neomogen. Nici nu sugerăm că proprietățile magnetice ale moleculelor nu sînt interesante pentru biochimist. Din contră, intermediarii în reacții chimice sînt cîteodată detectabili, chiar identificabili, prin comportarea lor magnetică. Dar acesta este un lucru cu totul diferit de influența unui cîmp extern *asupra* unui proces chimic. În treacăt, dacă vă așezați capul într-un cîmp magnetic intens și îl scuturați, veți „gusta" curenții electrolitici în gura dumneavoastră — simplă manifestare a forței electromotoare induse.

În fine, substanţele care se comportă ca fierul şi magnetita sînt numite *feromagnetice*. Pe lîngă metalele comune din această clasă, fier, cobalt şi nichel, sînt cunoscute multe aliaje feromagnetice şi compuşi cristalini. De fapt cercetarea curentă în feromagnetism măreşte în mod constant lista.

În acest capitol avem două sarcini. Una este să dezvoltăm o tratare de scară largă a fenomenelor implicînd materiale magnetizate, în care materialul însuşi este caracterizat prin cîţiva parametri şi relaţiile determinate experimental între ei. Este ca o tratare a dielectricilor bazată pe cîteva relaţii observate între cîmpul electric şi polarizarea globală. Uneori numim o astfel de teorie *fenomenologică*. A doua noastră sarcină este să încercăm să înţelegem, cel puţin într-un mod general, originea atomică a diferitelor efecte magnetice. Chiar mai mult decît fenomenele dielectrice efectele magnetice, odată înţelese, dezvăluie cîteva trăsături de bază ale structurii atomice.

Un fapt general se desprinde din tabel. Foarte puţină energie, în scara energiilor moleculare, este implicată în diamagnetism şi paramagnetism. Să luăm exemplul extrem al oxigenului lichid. Pentru a scoate 1 gram de oxigen lichid în afara cîmpului magnetului nostru, am avea nevoie de o cantitate de lucru de ordinul de mărime a $7{,}5 \times 10^{-2}$ newton ori o distanţă de cîţiva centimetri (deoarece intensitatea cîmpului descreşte substanţial pe o distanţă de cîţiva centimetri). Să spunem, în mare, 5×10^{-3} joule. Acum este nevoie de 300 de ori acea energie (0,4 calorii, sau 1,6 joule) pentru a ridica temperatura a 1 gram de O_2 lichid cu un grad, şi este nevoie de mai mult de 30 000 ori atîta energie pentru a evapora lichidul, adică, pentru a separa moleculele una de alta. Orice s-ar putea întîmpla în oxigen lichid la un nivel molecular, drept rezultat al cîmpului magnetic, este aparent un lucru foarte minor în termeni energetici.

Ştim că fie şi cîmpuri magnetice intense nu au practic nici o influenţă asupra proceselor chimice, şi aceasta se petrece pentru biochimie, de asemenea. Vă puteţi pune mîna şi braţul (nu acela cu ceasul!) într-un solenoid de 3 tesla, fără nici o senzaţie semnificativă sau consecinţă. Este greu de prezis dacă braţul dumneavoastră va fi paramagnetic sau diamagnetic, dar forţa asupra lui nu va fi în orice caz mai mult de 10^{-1} N. Generaţii de şoareci au fost născuţi şi crescuţi în cîmpuri magnetice intense fără schimbări semnificative. Nici alte experienţe biologice nu au adus nimic remarcabil în sensul unor efecte magnetice asupra proceselor chimice*. Aceasta nu este surprinzător. În interacţia cu materia, cîmpul magnetic joacă un rol complet diferit de acela al cîmpului electric. Deoarece atomii şi moleculele sînt alcătuiţi din sarcini electrice în mişcare lentă, forţele electrice domină întru totul scena moleculară.

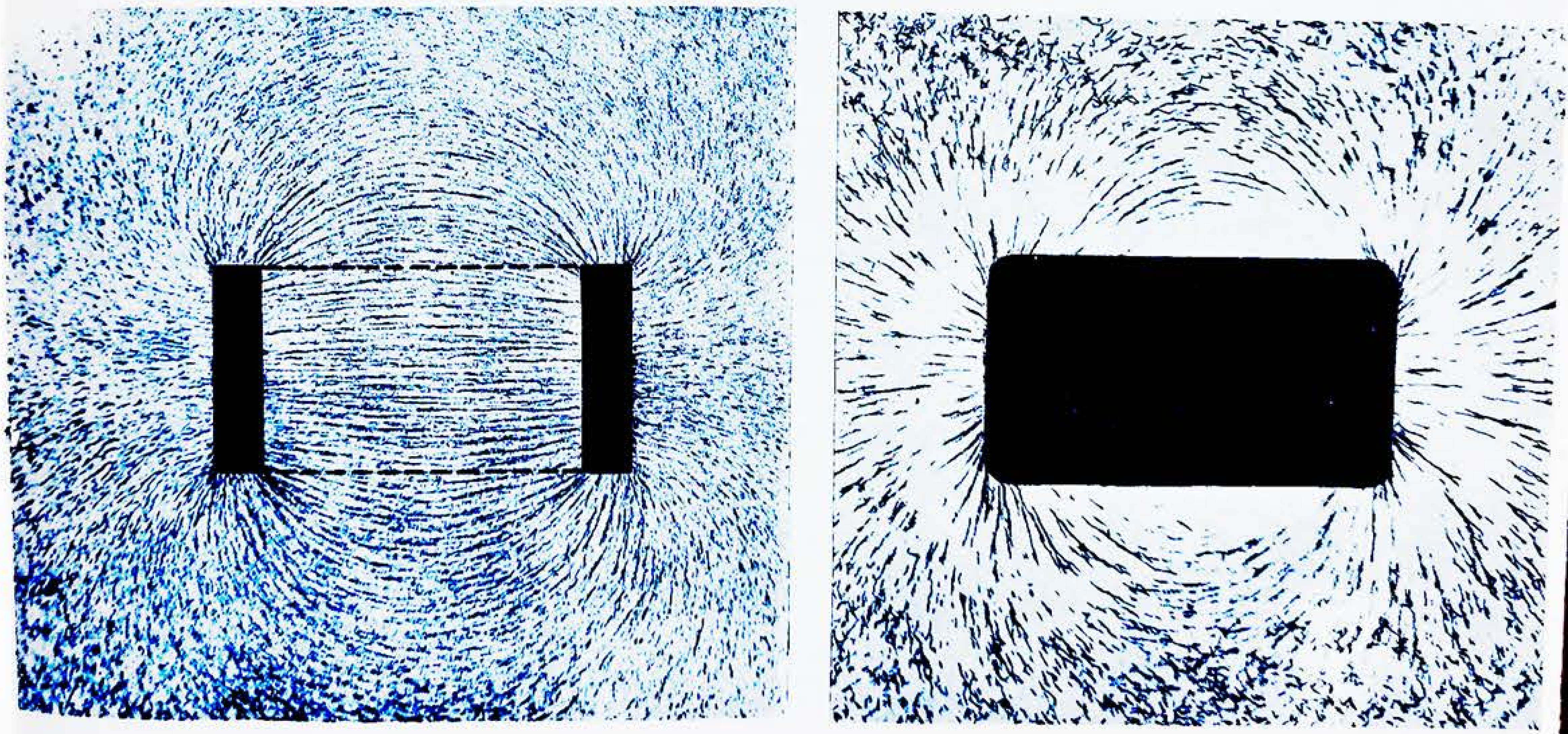
* Aceasta nu înseamnă că efectele mici sînt totdeauna fără consecinţă. La urmă, un argument ca acela pe care tocmai l-am folosit ar arăta că gravitatea este energetic neimportantă la scară moleculară, totuşi pomii pe coasta unui deal cresc vertical. Aceasta probabil implica forţa globală asupra unei unităţi biologice mai mari decît dimensiunile moleculare. Într-adevăr, un „tropism" întrucîtva asemănător a fost demonstrat experimental în cazul puieţilor crescînd într-un cîmp magnetic puternic neomogen. Nici nu sugerăm că proprietăţile magnetice ale moleculelor nu sînt interesante pentru biochimist. Din contră, intermediarii în reacţii chimice sînt cîteodată detectabili, chiar identificabili, prin comportarea lor magnetică. Dar acesta este un lucru cu totul diferit de influenţa unui cîmp extern *asupra* unui proces chimic. În treacăt, dacă vă aşezaţi capul într-un cîmp magnetic intens şi îl scuturaţi, veţi „gusta" curenţii electrolitici în gura dumneavoastră — simplă manifestare a forţei electromotoare induse.

10.2. ABSENȚA „SARCINII“ MAGNETICE

Cîmpul magnetic în exteriorul unei bare magnetizate ca de exemplu un ac de busolă arată foarte mult ca și cîmpul electric în exteriorul unei bare polarizate electric, o bară care are un exces de sarcină pozitivă la un capăt, sarcină negativă la celălalt (fig. 10.3). Se poate imagina că cîmpul magnetic are surse care îi sînt corelate în modul în care sarcina electrică este legată de cîmpul electric. Atunci „polul nord“ al acului de busolă ar fi localizarea unui exces al unui fel de „sarcină magnetică“ și polul sud ar fi localizarea unui exces de felul opus. Am putea numi „sarcina nordică“ pozitivă și „sarcina sudică“ negativă, cu cîmpul magnetic orientat de la pozitiv la negativ, o regulă ca aceea adoptată pentru cîmpul electric și

Fig. 10.3. (*a*) Două discuri încărcate cu sarcină de semn contrar (electrozii arătînd în secțiune ca bare negre continue) au un cîmp electric care este identic cu acela al unei vergele polarizate. Aceasta înseamnă că, dacă vă imaginați o astfel de vergea ocupînd regiunea în interiorul frontierei punctate, cîmpul ei exterior ar fi ca acela desenat. Cîmpul electric de aici a fost vizualizat printr-o mulțime de fibre negre minuscule, suspendate în ulei, care se orientează de-a lungul direcției cîmpului. Această metodă elegantă de a demonstra configurații de cîmp electric* este datorată lui Harold M. Waage, Palmer Physical Laboratory, Princeton University, care a avut amabilitatea să pregătească fotografia originală pentru această ilustrație. (*b*) Cîmpul magnetic în jurul unui cilindru magnetizat, arătat prin orientarea de mici bucăți de sîrmă de nichel, cufundate în glicerină. (Această încercare de a îmbunătăți demonstrarea cu tradiționala „pilitură de fier“ printr-o adaptare a metodei lui Waage nu a fost prea reușită — firele de nichel tind să se unească în corzi lungi care sînt apoi atrase spre magnet.) Diagramele construite teoretic ale cîmpurilor în cele două sisteme sînt arătate în figura 10.21.

* H.M. Waage, Am J. Phys. 32, 388/1964.



sarcina electrică. În mod istoric, acesta este modul în care a fost stabilită* convenţia noastră despre sensul pozitiv al cîmpului magnetic. Ceea ce am numit sarcină magnetică a fost numit în mod obişnuit intensitate de pol magnetic.

Această idee este perfect rezonabilă pînă aici. Ea devine încă mai plauzibilă cînd ne reamintim că ecuaţiile fundamentale ale cîmpului electromagnetic sînt cu totul simetrice în **E** şi **B**. De ce, atunci, să nu ne aşteptăm să găsim simetrie în sursele cîmpului? Cu sarcină magnetică drept sursă posibil a cîmpului magnetic static, am avea din $\mathbf{B} = \eta/\mu_0$, unde η desemnează densitatea de sarcină magnetică iar μ_0 permeabilitatea magnetică a spaţiului vid, în completă analogie cu densitatea de sarcină electrică ρ. Două sarcini magnetice pozitive (sau poli nord) de intensitate unitate, la o unitate de distanţă depărtare, s-ar respinge unul pe altul cu o forţă de o unitate, şi aşa mai departe.

Dificultatea este că lucrurile nu arată astfel. Dintr-un oarecare motiv, natura nu s-a folosit de această posibilitate. Lumea din jurul nostru apare cu totul asimetrică în sensul că nu găsim de loc sarcini magnetice. Nimenea nu a observat vreodată un exces local al unui fel de sarcină magnetică — un pol nord izolat de exemplu. Dacă un astfel de obiect exista ar fi putut fi recunoscut în mai multe feluri. El ar fi dat naştere unui cîmp magnetic orientat radial înspre exterior de la obiect şi descrescînd ca $1/r^2$ la distanţe mari. Poate încă mai izbitor, un astfel de obiect ar simţi o forţă dacă se află într-un cîmp magnetic *uniform*. Introdus într-un solenoid, polul magnetic ar simţi forţa maximă la centrul bobinei mai degrabă decît la capete. Şi spre deosebire de forţa asupra unei particule încărcate *electric* aflată *în mişcare* într-un cîmp magnetic, forţa asupra unui pol magnetic în repaus ar fi paralelă cu cîmpul în loc să-i fie perpendiculară.

Dintr-o regiune a spaţiului conţinînd un pol magnetic izolat ar exista un flux net al lui **B**. Absenţa aparentă a unor astfel de obiecte poate fi deci rezumată prin afirmaţia că, în loc de $\operatorname{div} \mathbf{B} = \eta/\mu_0$, găsim simplu că

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \textit{ peste tot}} \qquad (1)$$

În realitate *peste tot?* Se poate să existe poli nord şi sud uniţi în mod inseparabil în perechi de intensitate egală şi opusă, şi atît de aproape împreună încît să nu putem explora fizic regiunea dintre membrii perechii? Nu avem nici un motiv să gîndim astfel, dar nu ar apărea nici o diferenţă deoarece formularea din ecuaţia 1 încă ar fi corectă ori de cîte ori **B** însuşi ar avea înţeles. Au existat speculaţii foarte serioase, totuşi, că perechi de poli, asemenea perechilor de particule elementare, ar putea fi create şi

* În cap. 6, vă amintiţi, am stabilit sensul pozitiv la lui **B** prin referire la un sens de curent (sensul de mişcare a sarcinii pozitive) şi o regulă de mînă dreaptă. Acum „pol nord“ înseamnă „polul care caută nordul“ al acului de busolă. Astăzi nu înţelegem de ce polaritatea magnetică a Pămîntului este într-un sens şi nu în celălalt. Alegerea de către Franklin a electricităţii „pozitive“ nu a avut nimic de-a face cu acestea. Astfel încît dacă se ia o „regulă de mînă dreaptă“ în locul unei „reguli de mîna stîngă“, pentru a face teoria mai „consistentă“, este cel mai pur accident.

separate în reacţii nucleare foarte energetice. Mai multe căutări după astfel de particule, numite monopoli magnetici, nu au detectat nici unul.* Dacă ele *nu pot* exista, şi dacă e aşa de ce nu, rămîne o întrebare deschisă. Dacă va descoperi cineva un monopol acela va fi îndreptăţit să adauge triumfător după ecuaţia 1 calificarea: „...cu excepţia localizării acestui monopol magnetic nord (sau sud) care apare în placa mea fotografică (sau imagine de la camera cu bule, sau înregistrare de pulsuri etc.)". Dar chiar aceasta nu ar afecta concluzia majoră: Materia obişnuită este alcătuită din sarcini electrice, şi nu din sarcini magnetice.

Sîntem nevoiţi să tragem concluzia că singurele surse ale cîmpului magnetic sînt curenţii electrici. Aceasta ne duce înapoi la ipoteza lui Ampère, ideea sa că magnetismul în materie este explicat printr-o multitudine de inele minuscule de curent electric răspîndite în substanţă.

10.3. CÎMPUL UNEI BUCLE DE CURENT

O buclă conductoare închisă se află în planul xy înconjurînd originea, ca în figura 10.4, *a*. Un curent staţionar I, măsurat în amperi, curge prin buclă. Ne interesează cîmpul magnetic pe care îl creează acest curent — nu în apropierea buclei, dar într-un punct depărtat ca P_1 din figură. Vom presupune că r_1, distanţa la P_1, este mult mai mare decît orice dimensiune a buclei. Pentru a simplifica diagrama am situat P_1 în planul yz; va apărea că aceasta nu reprezintă o particularizare. Avem acum un bun prilej de a folosi potenţialul vector. Vom calcula mai întîi potenţialul vector $\mathbf{A}$ în punctul P_1, adică $\mathbf{A}\ (0, y_1, z_1)$. Din aceasta va fi evident care este potenţialul vector în orice alt punct (x, y, z) departe de buclă. Apoi luînd rotorul lui $\mathbf{A}$ vom obţine cîmpul magnetic $\mathbf{B}$.

Pentru un curent limitat într-un fir, am avut, ca în ecuaţia 6.35:

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{buclă}\frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \tag{2}$$

Atunci ne-am preocupat doar de contribuţia unui mic segment de circuit; acum avem de integrat în jurul întregii bucle. Să considerăm variaţia în numitorul lui r_{12} cînd parcurgem bucla. Dacă P_1 este departe, variaţia de ordinul întîi în r_{12} depinde doar de coordonata y_2 a segmentului $d\mathbf{l}_2$ şi nu de x_2. Aceasta devine clar din vederea laterală schiţată în figura 10.4, *b*.

---

* Pentru o relatare a cercetărilor asupra monopolilor magnetici, vezi articolul lui Kenneth Ford, Monopoli Magnetici, *Sci. American* 209, 30 (December, 1963). „Asimetria" evidentă în absenţa sarcinii magnetice este cu totul diferită de asimetria electrică cu care sîntem familiarizaţi, diferenţa în caracter între particulele pozitive şi negative. Electronii sînt particulele negative stabile; sarcina pozitivă se află sub forma protonului, o particulă mult mai grea. Dar ştim că aceasta nu trebuie să fie universal, deoarece se ştie că există *antiparticulele*. Toate faptele indică posibilitatea materiei alcătuite din electroni pozitivi şi protoni negativi; această „antimaterie" ar fi perechea geamănă a materiei pe care o găsim în partea noastră a universului. Am văzut ingredientele unei antimaterii în laborator — dar ingredientele unui „dublet magnetic" nu au fost văzute. Există o îndoială serioasă că ele există; şi există un motiv puternic că dacă ele există trebuie să fie cu totul diferite, în anumite alte privinţe, de particulele încărcate electric.

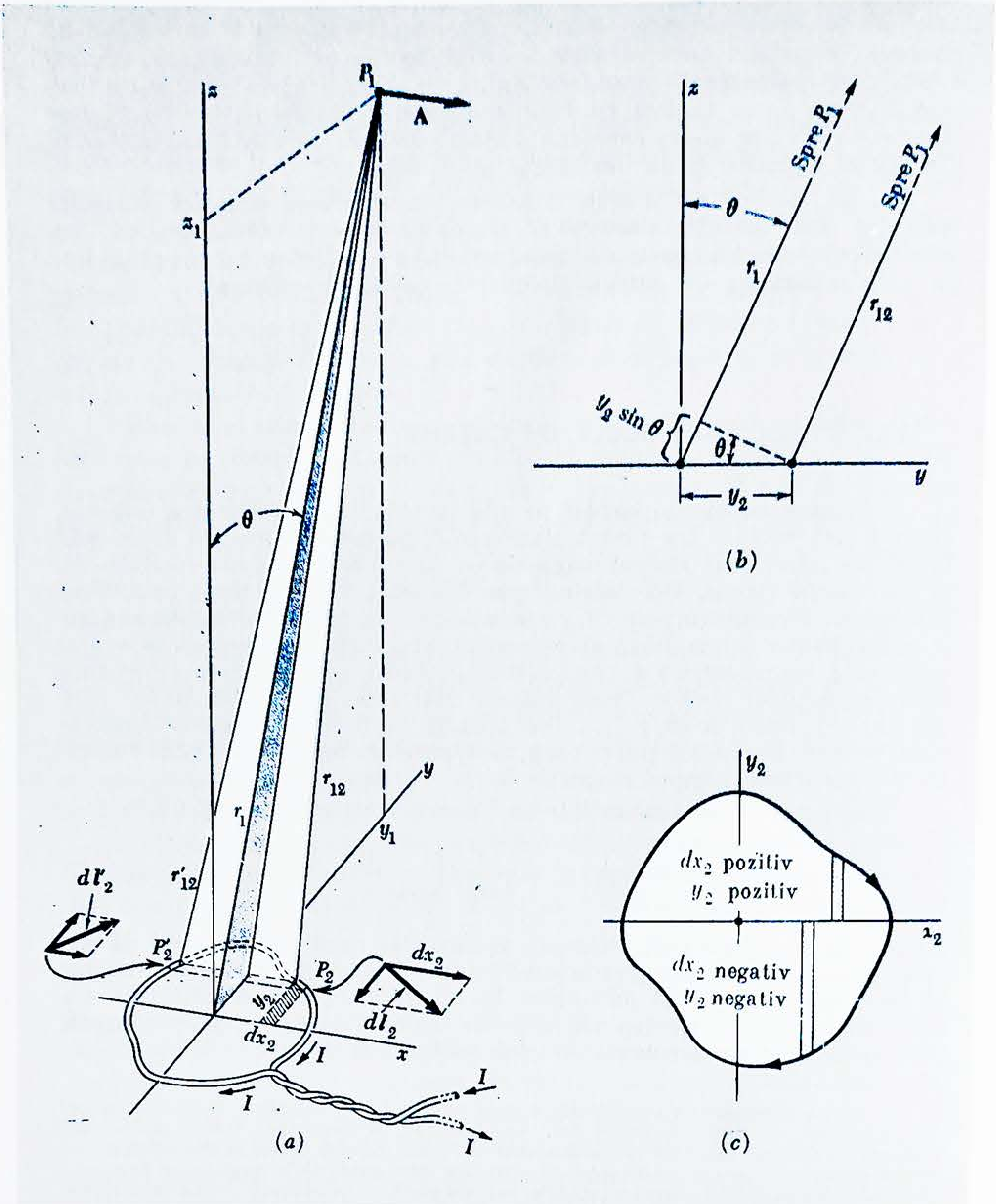


Fig. 10.4. (*a*) Calcularea potențialului vector A într-un punct departe de spira de curent. (*b*) Vedere laterală, privind de-a lungul axei x, arătînd că $r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin\theta$ dacă $r_1 \gg y_2$ (*c*) Vedere de sus, pentru a arăta că $\oint_{buclă} y_2 dx_2$ este aria buclei.

Astfel, neglijînd cantităţi proporţionale cu $(x_2/r_{12})^2$, putem considera r_{12} şi r'_{12}, care se află una peste cealaltă în vederea laterală, ca fiind egale. Şi în general, în primul ordin în raportul (dimensiunea buclei/distanţa la P_1) avem

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin\theta. \tag{3}$$

Să privim acum la cele două elemente de curbă $d\mathbf{l}_2$ şi $d\mathbf{l}'_2$, arătate în figura 10.4, *a*. Pentru acestea dy_2-i sînt egali şi opuşi, după cum am şi observat, iar r_{12}-i sînt egali în primul ordin. În acest ordin atunci, contribuţiile lor la integrala curbilinie se vor simplifica, şi aceasta va fi adevărat pentru întreagă bucla. Deci **A** în P_1 nu va avea componenta y. Evident nu va avea componenta z, deoarece curba de curent nu are nici unde o componentă z. Componenta x a potenţialului vector provine de la partea în dx a integralei curbilinii. Astfel

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int \frac{dx_2}{r_{12}}. \tag{4}$$

Fără a strica aproximaţia de ordinul întîi, putem transforma ecuaţia 3 în

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1}\left(1 + y_2 \frac{\sin\theta}{r_1}\right) \tag{5}$$

şi folosind aceasta pentru integrare avem

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_1} \int \left(1 + \frac{y_2 \sin\theta}{r_1}\right) dx_2. \tag{6}$$

În integrare r_1 şi θ sînt constante. Evident $\int dx_2$ în jurul buclei se anulează. Acum $\int y_2 dx_2$ în jurul buclei este chiar aria buclei, indiferent de forma sa (vezi fig. 10.4, *c*). Astfel obţinem în final

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_1^2} \cdot (\textit{aria buclei}). \tag{7}$$

Acum avem un pas simplu dar crucial: deoarece *forma* buclei nu a avut importanţă, situarea lui P_1 în planul yz nu poate produce nici o diferenţă esenţială. De aceea avem în ecuaţia 7 rezultatul general pe care îl căutăm, dacă îl *formulăm* în mod general. Potenţialul vector al unei bucle de curent de orice formă, la o distanţă r de la buclă care este mult mai mare decît dimensiunea buclei, este un vector perpendicular pe planul care conţine **r** şi normal pe planul buclei, de mărime

$$A = \frac{Ia \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} \tag{8}$$

unde a înseamnă aria buclei.

Acest potenţial vector este simetric în jurul axei buclei, ceea ce implică că cîmpul **B** va fi de asemenea simetric. Explicaţia este că noi considerăm regiuni atît de îndepărtate de buclă încît detaliile formei buclei au o influenţă neglijabilă. Toate buclele cu acelaşi produs *intensitatea curentului · arie* produc acelaşi cîmp de distanţe mari. Numim produsul I_a *momentul dipolar magnetic* al buclei de curent, şi îl notăm prin **m**. Momentul dipolar

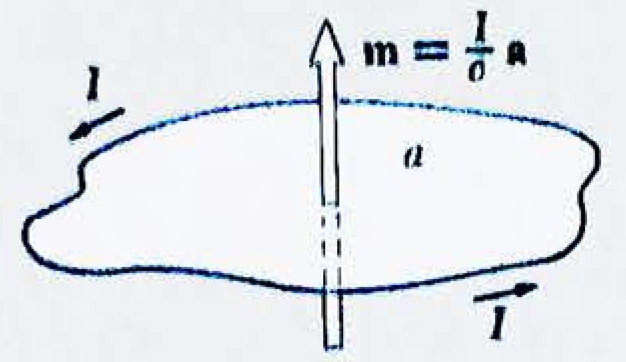


Fig. 10.5. Prin definiție, vectorul moment magnetic este legat de curent printr-o regulă de șurub drept, cum se arată aici.

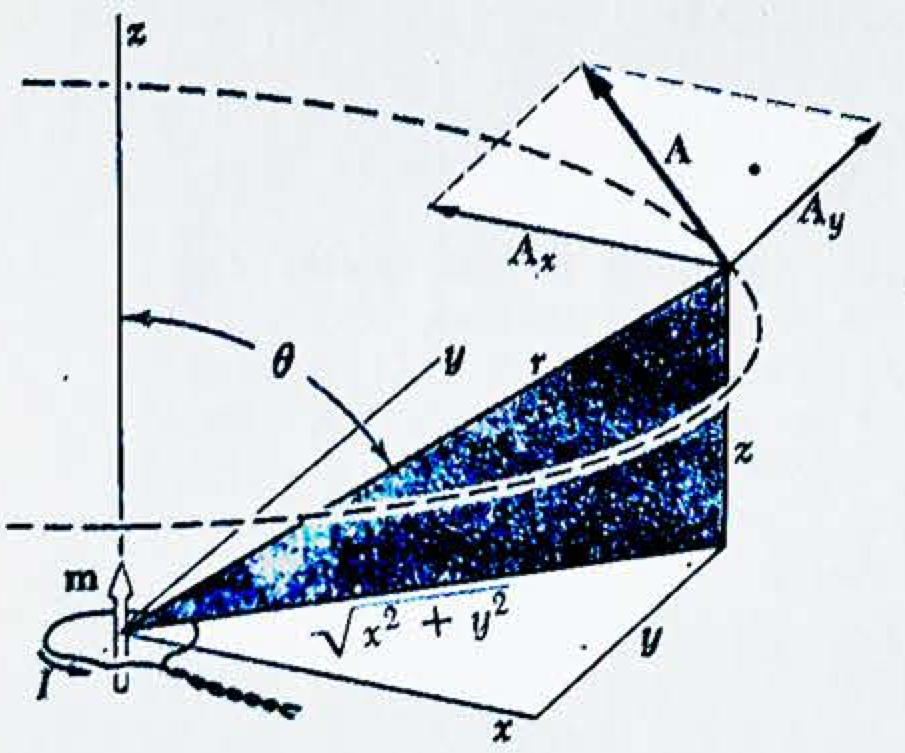


Fig. 10.6. Un dipol magnetic localizat în origine. În orice punct departe de buclă, A este un vector paralel la planul xy, tangent la un cerc în jurul axei z.

magnetic este evident un vector, direcția sa fiind după normala la buclă, sau aceea a vectorului **a**, aria orientată a suprafeței înconjurate de către buclă

$$\mathbf{m} = I\,\mathbf{a}. \qquad (9)$$

Cît pentru semn, convenim că direcția lui **m** și sensul curgerii de curent pozitiv în buclă urmează să fie corelate printr-o regulă de șurub drept, ilustrată în figura 10.5. (Momentul dipolar al buclei în figura 10.4, *a* este orientat în jos, după această regulă.) Potențialul vector al cîmpului unui dipol magnetic **m** se poate scrie acum cu vectori:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} \qquad (10)$$

unde $\hat{\mathbf{r}}$ este un vector unitate în direcția *de la* buclă *către* punctul în care **A** este calculat. Puteți verifica că aceasta este în acord cu convenția noastră despre semn. Observați că direcția lui **A** trebuie totdeauna să fie aceea a curentului în partea *mai apropiată* a buclei.

Figura 10.6 arată un dipol magnetic localizat în origine, cu vectorul moment dipolar **m** orientat în direcția *z* pozitivă. Pentru a exprima potențialul vector în orice punct (x, y, z) observăm că $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ și $\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}/r$. Mărimea A a potențialului vector în acel punct este

$$A = \frac{m \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} = \frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}. \qquad (11)$$

Deoarece A este tangent la un cerc orizontal în jurul axei z, componentele sale sînt:

$$A_x = A\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-my}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}$$

$$A_y = A\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{mx}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3} \qquad (12)$$

$$A_z = 0$$

Să evaluăm **B** într-un punct din planul xz, găsind componentele lui rot **A** şi apoi (nu înainte!) punînd $y = 0$.

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{mx}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}$$

$$B_y = (\nabla \times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{-my}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}$$

$$B_z = (\nabla \times A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{m}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] =$$

$$= \frac{m}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{(3z^2-r^2)}{r^5}. \tag{13}$$

În planul xz, $y = 0$, $\sin\theta = x/r$ şi $\cos\theta = z/r$. Componentele cîmpului în orice punct din acel plan sînt astfel date de

$$B_x = \frac{3m\sin\theta\,\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3};$$

$$B_y = 0; \tag{14}$$

$$B_z = \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}.$$

Să ne întoarcem acum înapoi la § 9.3, unde în ecuaţia 9.14 am exprimat componentele în planul xz al cîmpului **E** ale unui dipol electric **p**, care a fost situat exact ca şi dipolul nostru magnetic **m**. Expresiile sînt identice. Am găsit astfel că cîmpul magnetic al unei mici bucle de curent are în puncte îndepărtate aceeaşi formă ca şi cîmpul electric a două sarcini separate. Ştim deja cum arată acel cîmp, cîmpul de dipol electric. Figura 10.7 este o încercare de a sugera forma tridimensională a cîmpului magnetic **B** provenind de la bucla noastră de curent cu moment dipolar **m**.

Cîmpul magnetic *în apropierea* unei bucle de curent este complet diferit de cîmpul electric în apropierea sarcinilor separate pozitivă şi negativă, după cum

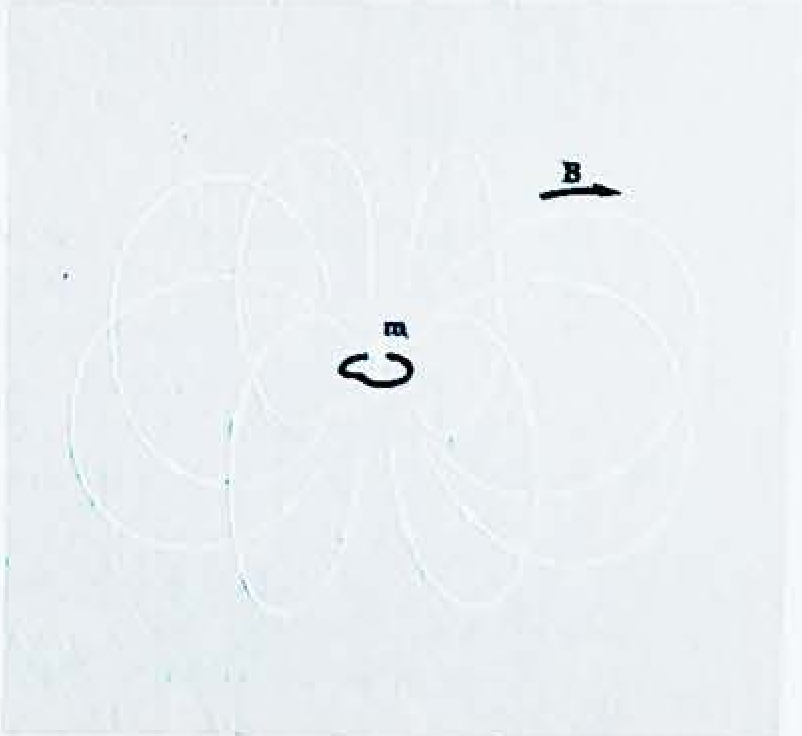
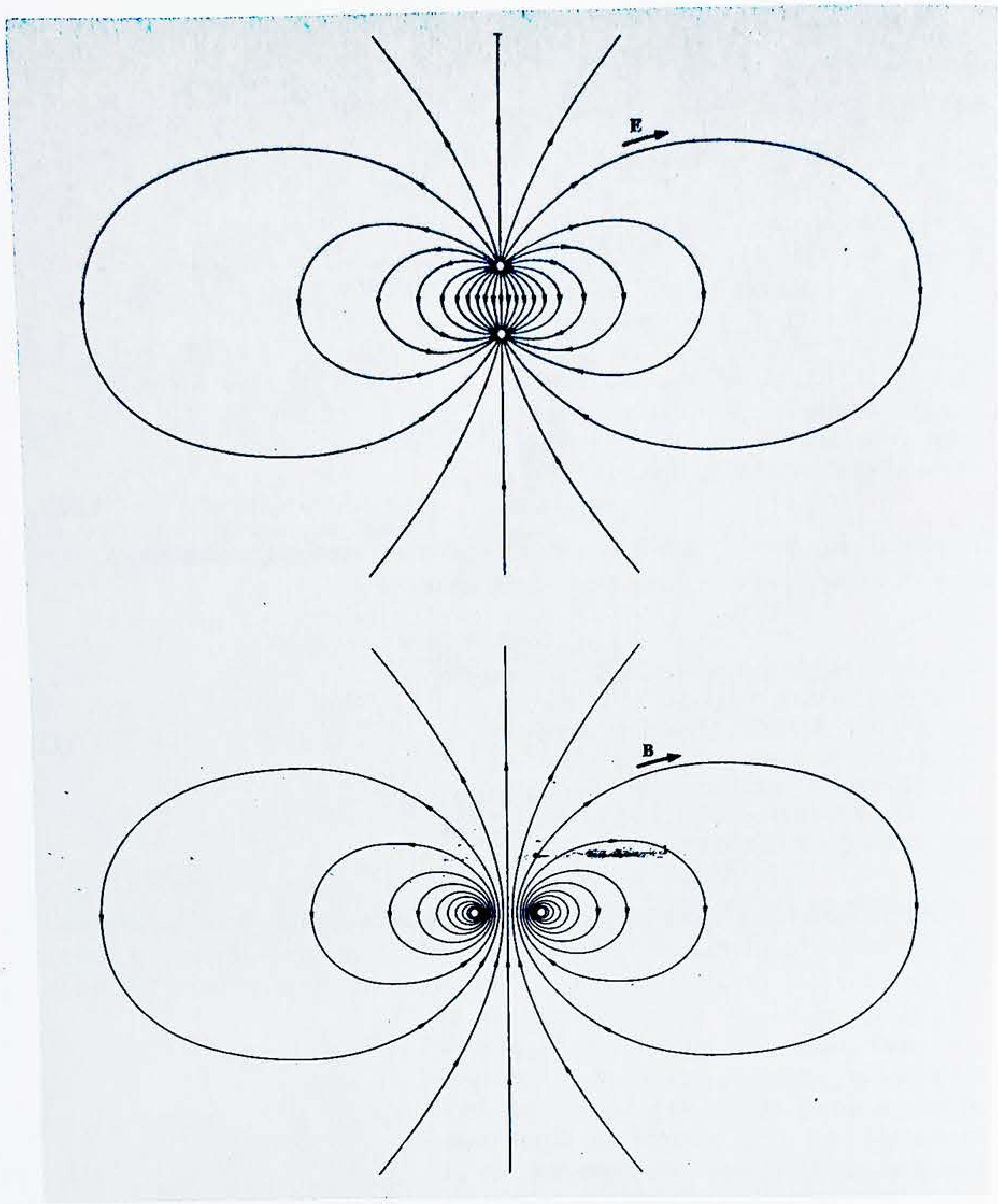


Fig. 10.7. Cîteva linii de cîmp magnetic în cîmpul unui dipol magnetic, adică, o mică buclă de curent.



arată comparația din figura 10.8. Observați că între sarcini cîmpul electric este orientat în jos, în timp ce în interiorul inelului de curent cîmpul magnetic este orientat în sus, deși cîmpurile la distanță sînt asemănătoare. Aceasta reflectă faptul că cîmpul magnetic satisface $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ peste tot, *chiar și în interiorul sursei*. Liniile de cîmp magnetic nu se termină. Prin aproape și departe înțelegem, desigur, relativ la dimensiunea curentului

Fig. 10.8. (*a*) Cîmpul electric al unei perechi de sarcini egale și opuse. La depărtare el devine cîmpul unui dipol electrc.
(*b*) Cîmpul magnetic al unui inel de curent. La depărtare el devine cîmpul unui dipol magnetic.

sau separarea dintre sarcini. Dacă ne imaginăm că inelul de curent se micşorează în dimensiune, în timp ce curentul creşte astfel încît momentul dipolar $m = Ia$ să rămînă constant, ne apropiem de dipolul magnetic infinitesimal, care corespunde la dipolul electric infinitesimal descris în capitolul 9.

10.4. FORŢA ASUPRA UNUI DIPOL ÎNTR-UN CÎMP EXTERIOR

Să considerăm o mică buclă de curent circulară de rază r, situată în cîmpul magnetic al unui oarecare alt sistem de curenţi, ca de exemplu un solenoid. În figura 10.9 este desenat un cîmp **B** care este în general în sensul lui z. Acela nu este un cîmp uniform. Din contră, el devine mai slab pe măsură ce înaintăm în sensul lui z; aceasta este evident din răspîndirea liniilor de cîmp. Să presupunem, pentru simplitate, că cîmpul este simetric în jurul axei z. Atunci el se aseamănă cu cîmpul lîngă capătul de sus al solenoidului în figura 10.1. Cîmpul reprezentat în figura 10.9 *nu* include cîmpul magnetic al însuşi inelului de curent. Vrem să găsim forţa asupra inelului de curent produsă de celălalt cîmp, pe care îl vom numi, din lipsa unui nume mai bun, cîmpul extern. Forţa netă asupra inelului de curent datorată *propriului* său cîmp este cu siguranţă zero, astfel încît sîntem liberi să neglijăm propriul său cîmp în această discuţie.

Dacă studiaţi situaţia în figura 10.9 veţi trage curînd concluzia că există o forţă netă asupra inelului de curent. Ea apare deoarece cîmpul extern **B** are o componentă *spre în afară* B_r peste tot în jurul inelului. De aceea dacă curentul curge în direcţia indicată, fiecare element al buclei, dl, trebuie să fie supus unei forţe de mărime $IB_r dl$. Dacă B_r are aceeaşi mărime în toate punctele inelului, cum trebuie să fie în cîmpul simetric divergent presupus, forţa totală în jos va avea mărimea

$$F = 2\pi r I B_r. \qquad (15)$$

Acum B_r poate fi legat de gradientul lui B_z. Deoarece div $\mathbf{B} = 0$ în toate punctele, fluxul net de cîmp magnetic din orice volum este zero. Să considerăm micul cilindru de rază r şi înălţime Δz (fig. 10.10). Fluxul exterior lateral este $2\pi r(\Delta z)\mathbf{B}_r$ iar fluxul exterior de la suprafeţele de capăt este

$$\pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

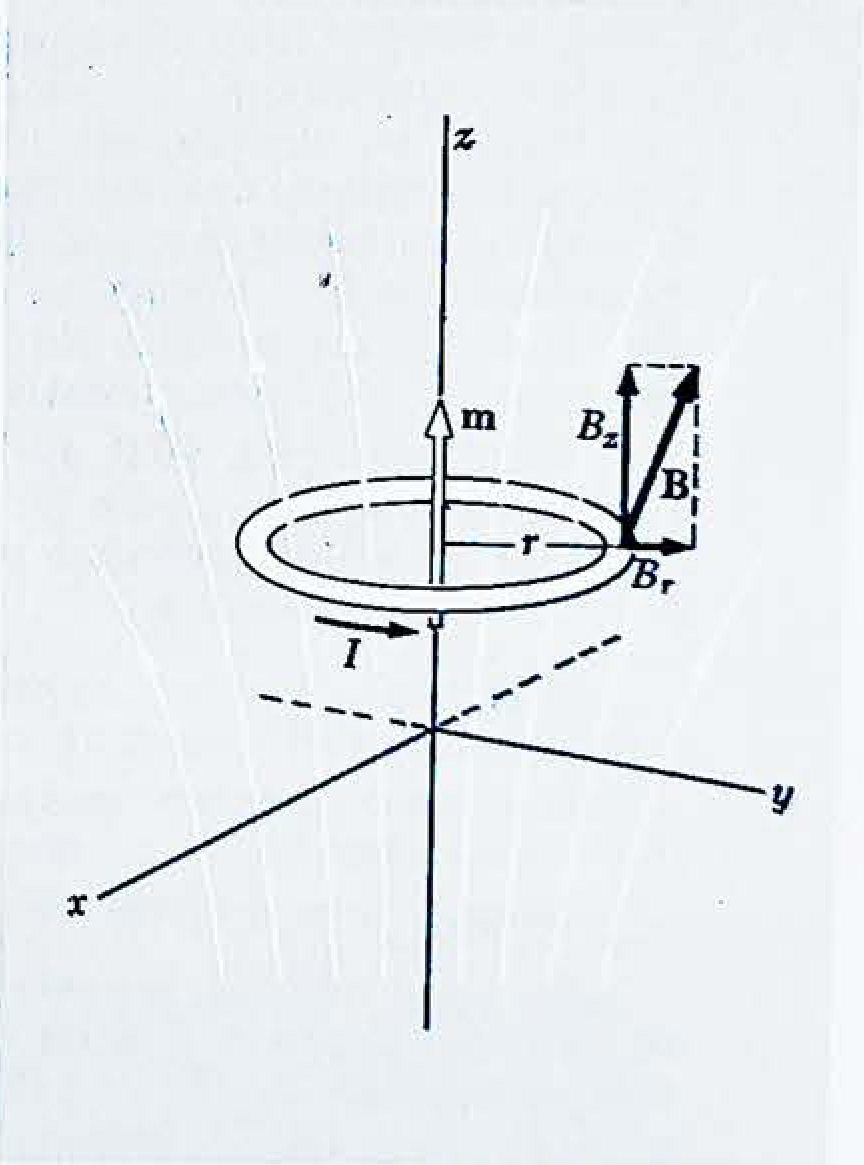


Fig.10.9. Un inel de curent într-un cîmp magnetic neomogen. (Cîmpul inelului însuşi nu este arătat.) Din cauza componentei radiale B_r a cîmpului, există o forţă asupra inelului ca un întreg.

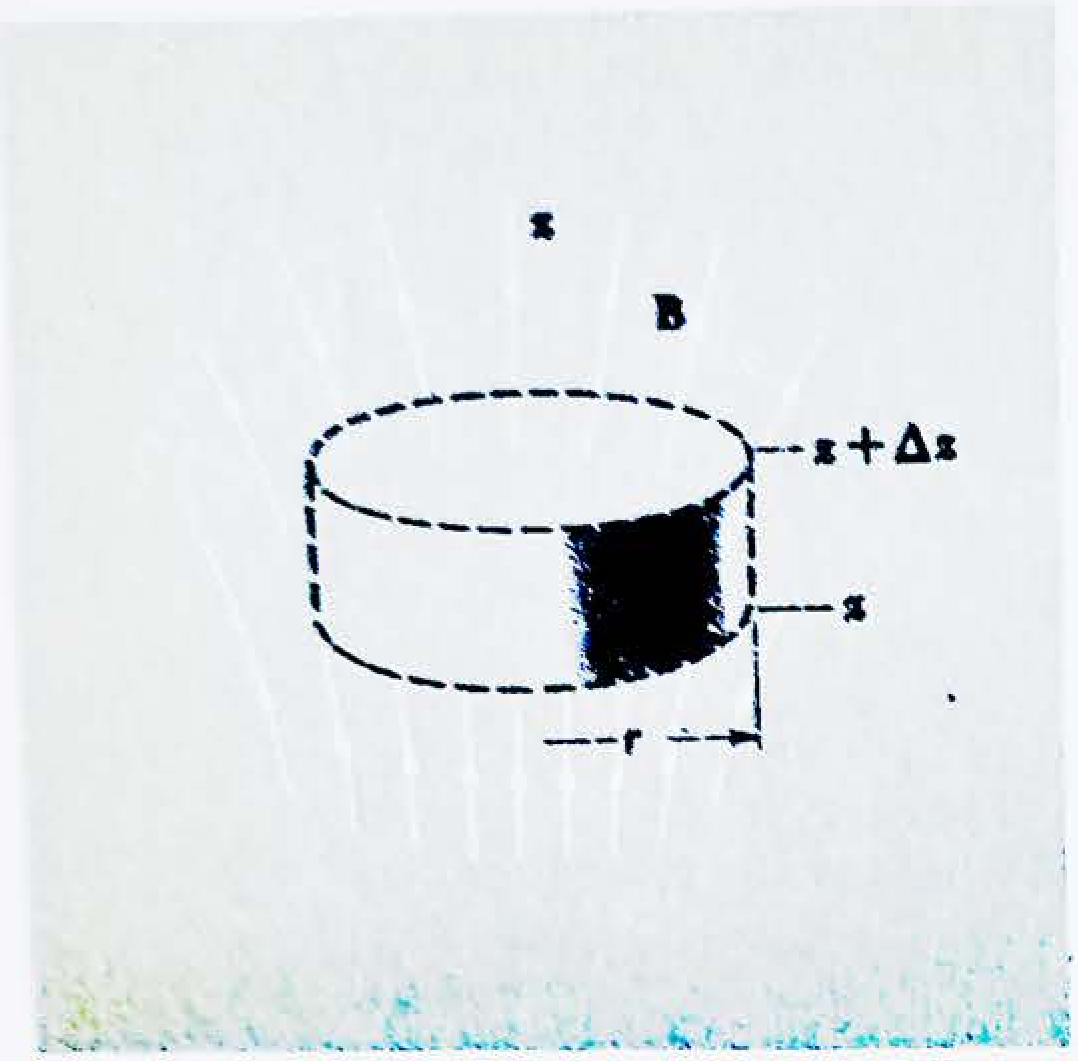


Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega B_r şi $\partial B_z/\partial z$, conducînd la ecuaţia 16.

care în primul ordin în distanţa mică Δz este $\pi r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z$. Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi^2 r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relaţia,

$$B_r = -\frac{r}{2}\,\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{16}$$

Ca o verificare a semnului, observaţi că după ecuaţia 16, B_r este pozitiv cînd B_z descreşte în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forţa asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcţie de gradientul componentei B_z a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2}\,\frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{17}$$

În factorul $\pi r^2 I$ recunoaştem mărimea m a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forţa asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{18}$$

Nu am dovedit-o, dar nu veţi fi surprinşi să auziţi că pentru bucle mici de orice altă formă forţa depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Fòrma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variaţia de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic **m** orientat în sus şi forţa asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd **m**, forţa şi-ar schimba direcţia. Situaţia poate fi rezumată în acest fel:

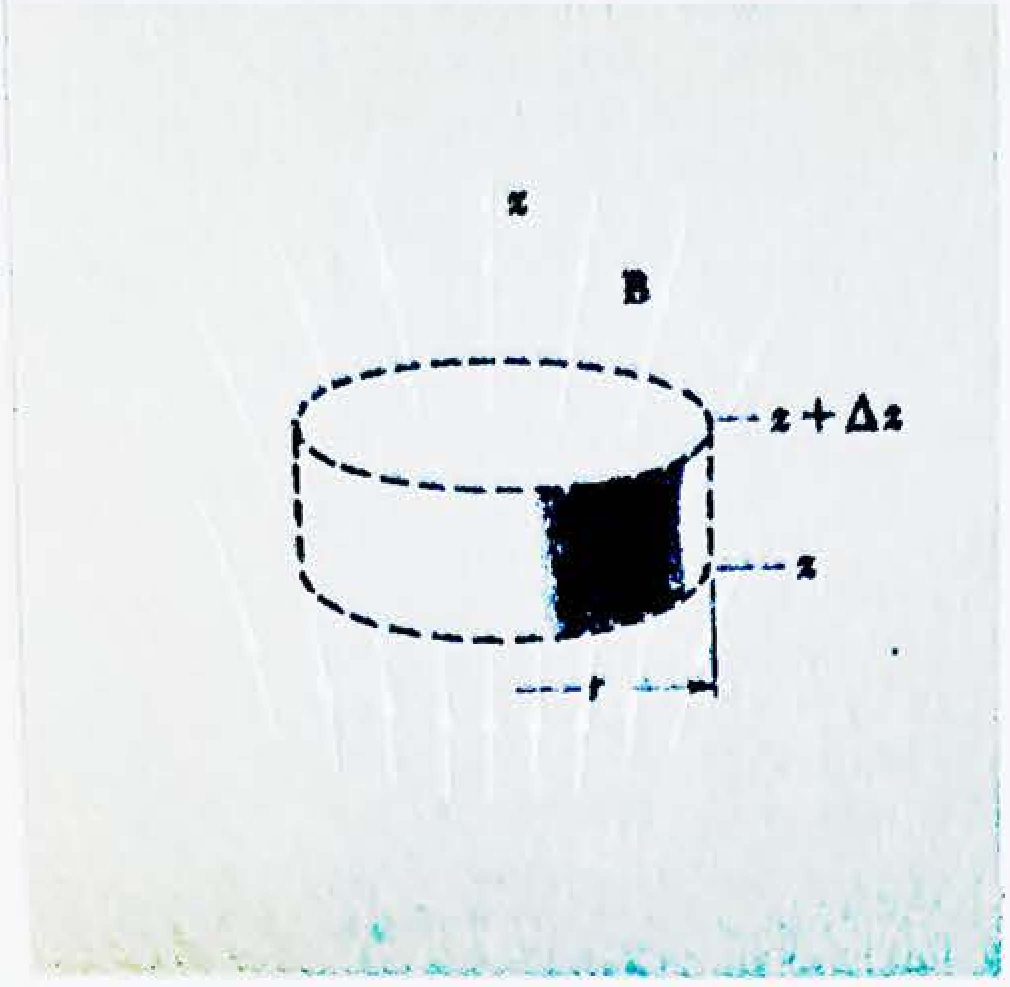
Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *crescătoare.*

Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *descrescătoare.*

Cîmp extern *uniform:* Forţă *zero.*

Cu totul evident, aceasta nu este situaţia cea mai generală. Momentul **m** ar putea fi orientat la un unghi oarecare faţă de cîmpul **B**, iar diversele componente ale lui **B** ar putea varia, spaţial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forţa **F** care este simţită în cazul

Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega B_r şi $\partial B_z/\partial z$, conducînd la ecuaţia 16.



care în primul ordin în distanţa mică Δz este $\pi r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z$. Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi^2 r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relaţia,

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}. \qquad (16)$$

Ca o verificare a semnului, observaţi că după ecuaţia 16, B_r este pozitiv cînd B_z descreşte în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forţa asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcţie de gradientul componentei B_z a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \qquad (17)$$

În factorul $\pi r^2 I$ recunoaştem mărimea m a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forţa asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m\frac{\partial B_z}{\partial z}. \qquad (18)$$

Nu am dovedit-o, dar nu veţi fi surprinşi să auziţi că pentru bucle mici de orice altă formă forţa depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Forma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variaţia de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic **m** orientat în sus şi forţa asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd **m**, forţa şi-ar schimba direcţia. Situaţia poate fi rezumată în acest fel:

Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *crescătoare*.

Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *descrescătoare*.

Cîmp extern *uniform*: Forţă *zero*.

Cu totul evident, aceasta nu este situaţia cea mai generală. Momentul **m** ar putea fi orientat la un unghi oarecare faţă de cîmpul **B**, iar diversele componente ale lui **B** ar putea varia, spaţial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forţa **F** care este simţită în cazul

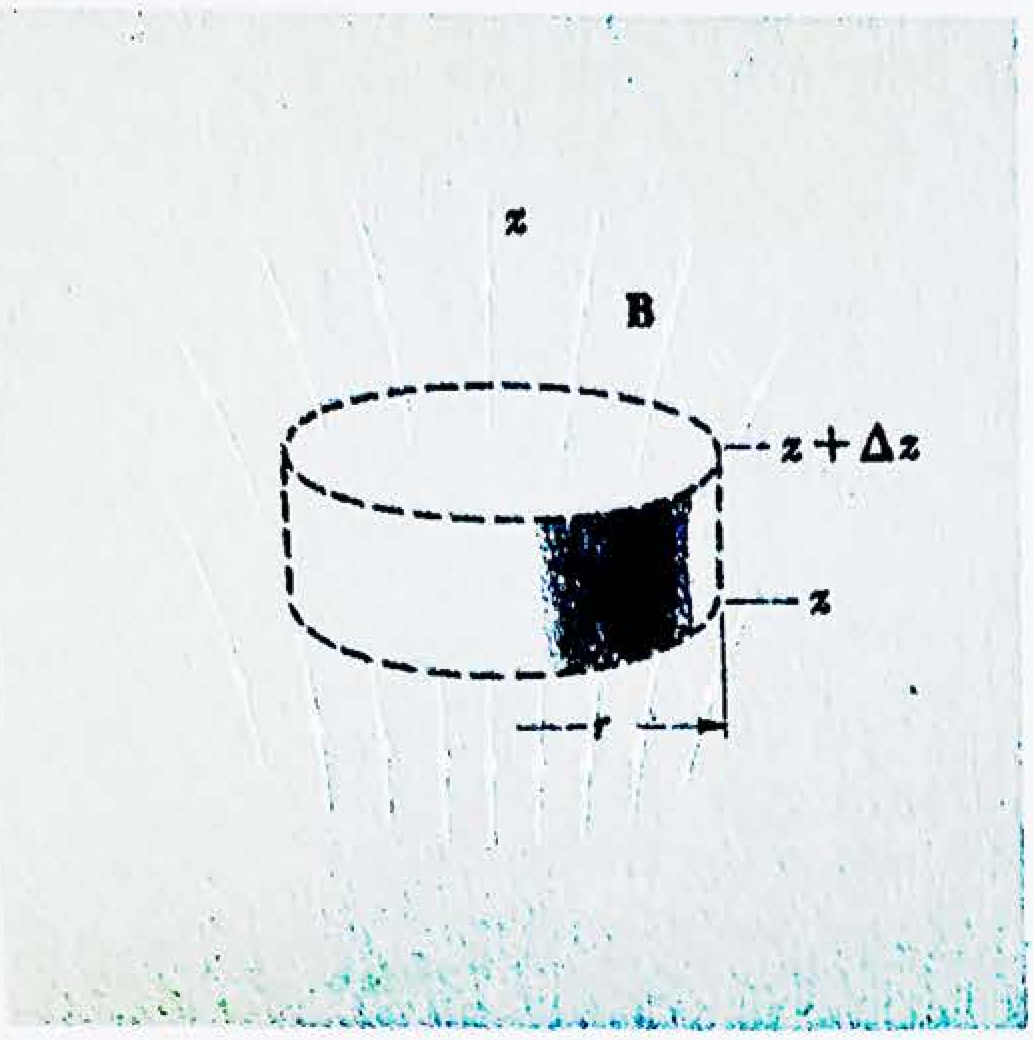


Fig. 10.10. Teorema lui Gauss poate fi folosită pentru a lega B_r şi $\partial B_z/\partial z$, conducînd la ecuaţia 16.

care în primul ordin în distanţa mică Δz este $\pi r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z$. Punînd fluxul total egal cu zero:

$$0 = \pi^2 r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z + 2\pi r B_r \Delta z,$$

care ne dă relaţia,

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{16}$$

Ca o verificare a semnului, observaţi că după ecuaţia 16, B_r este pozitiv cînd B_z descreşte în sus; o privire asupra figurii arată că acesta este corect.

Forţa asupra dipolului poate fi exprimată acum în funcţie de gradientul componentei B_z a cîmpului extern:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial r} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{17}$$

În factorul $\pi r^2 I$ recunoaştem mărimea m a momentului dipolar magnetic a inelului nostru de curent. Astfel că forţa asupra inelului se poate exprima foarte simplu prin momentul dipolar:

$$F = m\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{18}$$

Nu am dovedit-o, dar nu veţi fi surprinşi să auziţi că pentru bucle mici de orice altă formă forţa depinde doar de produsul curent-arie, adică, de momentul dipolar. Forma nu contează. Desigur, discutăm bucle destul de mici încît numai variaţia de ordinul întîi a cîmpului exterior, pe întinderea buclei, este semnificativă.

Inelul în figura 10.9 are un moment dipolar magnetic **m** orientat în sus şi forţa asupra sa este în jos. Evident, dacă am putea inversa curentul în inel, prin aceea inversînd **m**, forţa şi-ar schimba direcţia. Situaţia poate fi rezumată în acest fel:

Momentul dipolar *paralel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *crescătoare*.

Momentul dipolar *antiparalel* cu cîmpul exterior: Forţa acţionează în direcţia intensităţii de cîmp *descrescătoare*.

Cîmp extern *uniform:* Forţă *zero*.

Cu totul evident, aceasta nu este situaţia cea mai generală. Momentul **m** ar putea fi orientat la un unghi oarecare faţă de cîmpul **B**, iar diversele componente ale lui **B** ar putea varia, spaţial, în diverse moduri. Nu este greu de dezvoltat o formulă pentru forţa **F** care este simţită în cazul

general. Ar fi exact ca formula generală pe care am dat-o, ecuaţia 9.22, pentru forţa asupra unui dipol electric într-un cîmp electric neuniform. Adică, componenta x a forţei asupra oricărui dipol magnetic **m** este dată de

$$F_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_x \tag{19}$$

cu formula corespunzătoare pentru F_y şi F_z.

În ecuaţiile 18 şi 19 forţa este în newton, cu gradientul cîmpului magnetic în tesla/metru şi momentul dipolar magnetic m dat de ecuaţia 9, $m = Ia$ unde I este în amperi şi a în metri pătraţi. Există mai multe moduri echivalente de a exprima unităţile lui m. Noi vom adopta „joule/tesla". După cum puteţi vedea din ecuaţia 18,

$$m = \frac{\text{newton}}{(\text{tesla/metru})} = \frac{\text{newton} \cdot \text{metru}}{\text{tesla}} = \frac{\text{joule}}{\text{tesla}}.$$

Acum putem începe să vedem ce trebuie să se întîmple în experienţele descrise la începutul acestui capitol. O substanţă localizată în poziţia probei din figura 10.2 ar fi atrasă *în interiorul* solenoidului dacă ar conţine dipoli magnetici *paraleli* cu cîmpul **B** al bobinei. Ea ar fi fost împinsă *în afară* din solenoid dacă ar fi conţinut dipoli orientaţi în direcţia opusă, antiparaleli cu cîmpul. Forţa ar depinde de gradientul intensităţii cîmpului axial, şi ar fi zero în punctul median al solenoidului. De asemenea, dacă intensitatea totală a momentelor dipolare din probă era proporţională cu intensitatea **B** a cîmpului, atunci într-o poziţie dată forţa ar fi proporţională cu B ori $\partial B/\partial z$, şi deci cu pătratul curentului din solenoid. Aceasta este comportarea observată în cazul substanţelor diamagnetice şi paramagnetice. Se pare că probele feromagnetice trebuie să fi avut un moment magnetic aproape independent de intensitatea cîmpului, dar trebuie să le lăsăm deoparte pentru o discuţie specială în orice caz.

Cum se întîmplă că aplicarea unui cîmp magnetic unei substanţe provoacă în substanţă momente dipolare magnetice cu intensitatea totală proporţională cîmpului aplicat? Şi de ce să fie ele paralele cu cîmpul în unele substanţe, şi orientate opus în altele? Dacă putem răspunde acestor întrebări vom fi pe calea către înţelegerea fizicii diamagnetismului şi paramagnetismului.

10.5. CURENŢI ELECTRICI ÎN ATOMI

Ştim că un atom este alcătuit dintr-un nucleu pozitiv înconjurat de electroni negativi. Pentru a-l descrie complet am avea nevoie de conceptele fizicii cuantice pe care o veţi studia mai tîrziu în acest curs. Din fericire, un model simplu şi uşor de vizualizat al unui atom poate explica diamagnetismul foarte bine. Este un model planetar cu electroni pe orbite în jurul nucleului, ca modelul în prima teorie cuantică a lui Bohr a atomului de hidrogen.

Începem cu un electron în mişcare cu viteză constantă pe o traiectorie circulară. Deoarece nu încercăm aici să explicăm structura atomică, nu ne vom interesa de motivul pentru care electronul are această orbită particulară. Întrebăm doar, dacă electronul se mişcă pe o astfel de orbită, ce

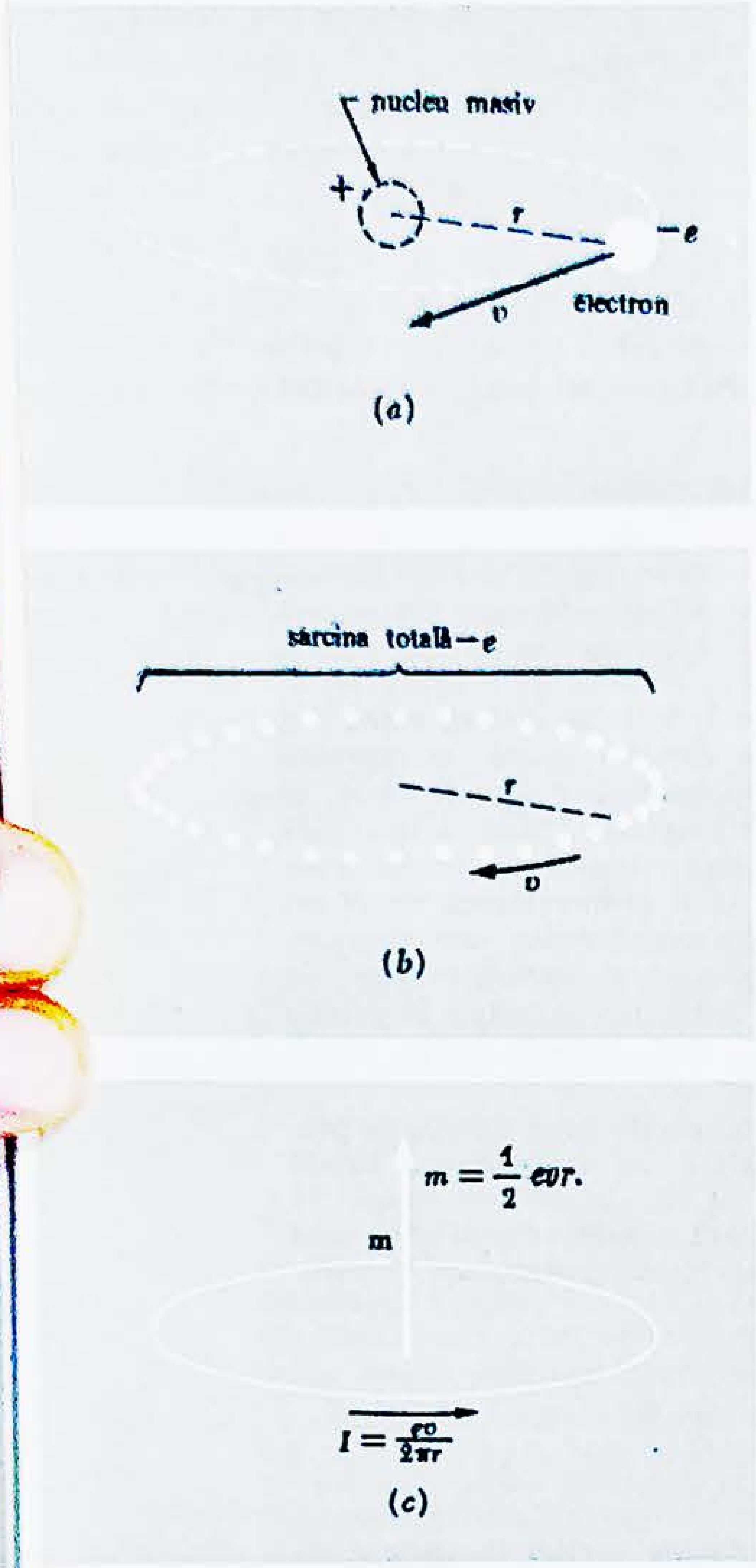


Fig. 10.11. *(a)* Un model de atom în care un electron se mişcă cu viteza *v* pe o orbită circulară.

(b) Distribuţie echivalentă de sarcină. Curentul electric mediu este acelaşi dacă sarcina $-e$ ar fi împărţită în mici bucăţi, formînd un inel rotitor de sarcină.

c) Momentul magnetic este produsul curentului şi ariei.

efecte magnetice sînt de aşteptat? În figura 10.11 vedem electronul, vizualizat drept o particulă purtînd o sarcină electrică concentrată $-e$, în mişcare cu viteza v pe o traiectorie circulară de rază r. În mijloc este o sarcină nucleară pozitivă, care face sistemul electric neutru, dar nucleul, din cauza masei sale relativ mare, se mişcă atît de încet încît efectele sale magnetice pot fi neglijate.

În orice moment, electronul şi sarcina pozitivă vor apărea ca un dipol electric, dar în medie temporală momentul dipolar electric este zero, care nu produce nici un cîmp electric staţionar la distanţă. Am discutat aceasta în § 9.5. Cîmpul *magnetic* al sistemului, la depărtare, *nu* este zero în medie temporală. Din contră, este tocmai cîmpul unui inel de curent. Deoarece, în ceea ce priveşte media temporală, nu poate apare nici o diferenţă dacă avem toată sarcina negativă strînsă într-o bucată, în mişcare pe traiectorie, sau distribuită în bucăţi, ca în figura 10.11, *b*, pentru a alcătui o procesiune uniformă fără sfîrşit. Curentul este cantitatea de sarcină care trece printr-un punct dat de pe inel, pe secundă. Deoarece electronul face $v/2\pi r$ revoluţii pe secundă, curentul, în amperi, este

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \qquad (20)$$

Electronul în rotaţie este echivalent cu un curent inelar de această mărime cu direcţia de trecere pozitivă opusă lui v, cum se arată în figura 10.11, *c*. Cîmpul de distanţe mari este deci acela al unui dipol magnetic, de intensitate

$$m = \pi r^2 I = \frac{1}{2} evr. \qquad (21)$$

Să observăm în trecere o relaţie simplă între momentul magnetic **m** asociat cu orbita electronului, şi momentul unghiular orbital **L**. Momentul unghiular este un

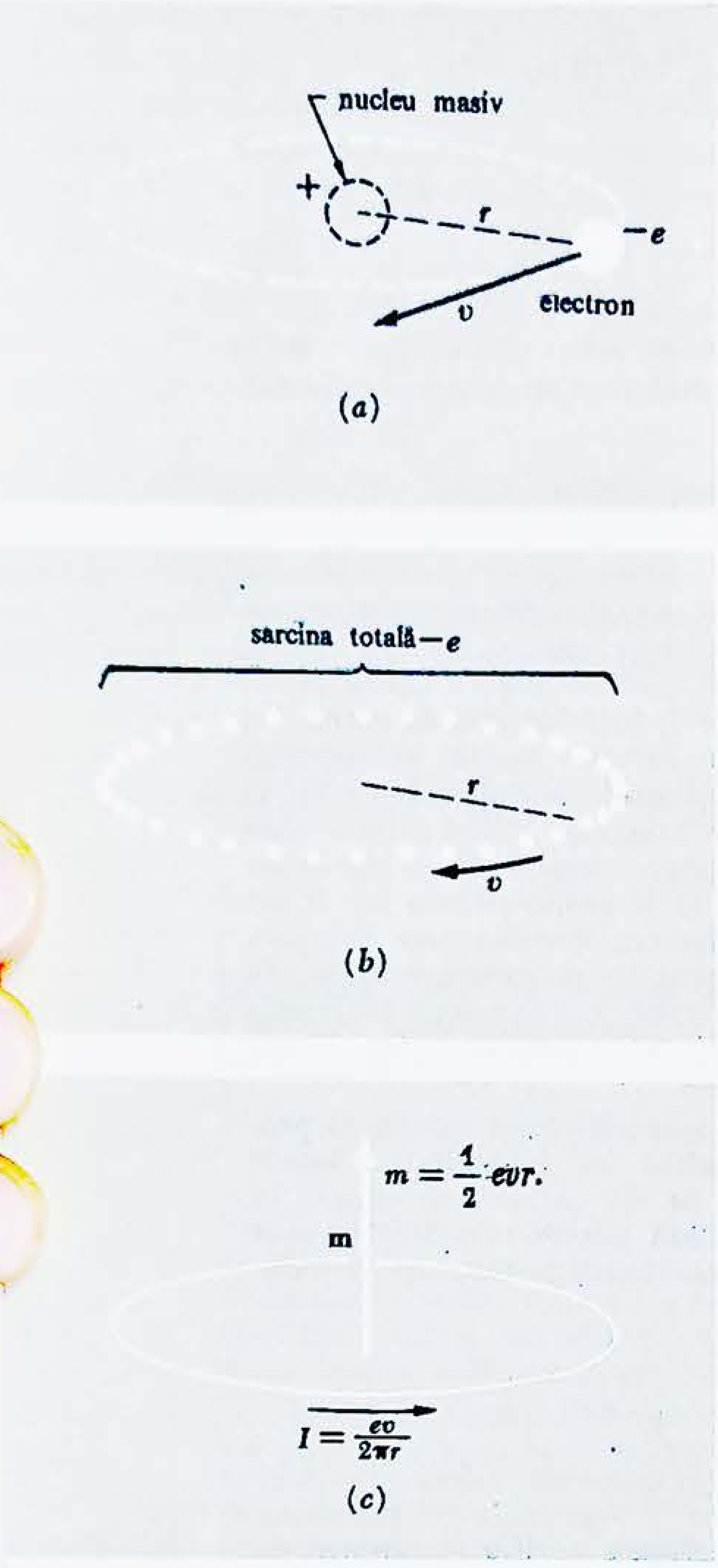


Fig. 10.11. *(a)* Un model de atom în care un electron se mişcă cu viteza v pe o orbită circulară.

(b) Distribuţie echivalentă de sarcină. Curentul electric mediu este acelaşi dacă sarcina —e ar fi împărţită în mici bucăţi, formînd un inel rotitor de sarcină.

c) Momentul magnetic este produsul curentului şi ariei.

efecte magnetice sînt de aşteptat? În figura 10.11 vedem electronul, vizualizat drept o particulă purtînd o sarcină electrică concentrată $-e$, în mişcare cu viteza v pe o traiectorie circulară de rază r. În mijloc este o sarcină nucleară pozitivă, care face sistemul electric neutru, dar nucleul, din cauza masei sale relativ mare, se mişcă atît de încet încît efectele sale magnetice pot fi neglijate.

În orice moment, electronul şi sarcina pozitivă vor apărea ca un dipol electric, dar în medie temporală momentul dipolar electric este zero, care nu produce nici un cîmp electric staţionar la distanţă. Am discutat aceasta în § 9.5. Cîmpul *magnetic* al sistemului, la depărtare, *nu* este zero în medie temporală. Din contră, este tocmai cîmpul unui inel de curent. Deoarece, în ceea ce priveşte media temporală, nu poate apare nici o diferenţă dacă avem toată sarcina negativă strînsă într-o bucată, în mişcare pe traiectorie, sau distribuită în bucăţi, ca în figura 10.11, *b*, pentru a alcătui o procesiune uniformă fără sfîrşit. Curentul este cantitatea de sarcină care trece printr-un punct dat de pe inel, pe secundă. Deoarece electronul face $v/2\pi r$ revoluţii pe secundă, curentul, în amperi, este

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \qquad (20)$$

Electronul în rotaţie este echivalent cu un curent inelar de această mărime cu direcţia de trecere pozitivă opusă lui v, cum se arată în figura 10.11, *c*. Cîmpul de distanţe mari este deci acela al unui dipol magnetic, de intensitate

$$m = \pi r^2 I = \frac{1}{2} evr. \qquad (21)$$

Să observăm în trecere o relaţie simplă între momentul magnetic $\mathbf{m}$ asociat cu orbita electronului, şi momentul unghiular orbital $\mathbf{L}$. Momentul unghiular este un

vector de mărime $L = m_e vr$, unde m_e desemnează masa electronului* și este orientat în jos dacă electronul se rotește în sensul arătat în figura 10.11, *a*. Observați că produsul vr apare în ambii m și L. Cu atenția datorată direcției, putem scrie

$$\mathbf{m} = \frac{-e}{2m_e}\mathbf{L}. \tag{22}$$

Această relație nu implică decît constante fundamentale, care v-ar face să bănuiți că ea are loc în mod cu totul general. Într-adevăr acesta este cazul, deși nu o vom dovedi aici. Ea este corectă pentru orbite eliptice, și are loc chiar pentru orbite în formă de rozetă care apar într-un cîmp central care nu este invers-pătratic. Amintiți-vă proprietatea importantă a oricărei orbite într-un cîmp central: momentul unghiular este o integrală a mișcării, adică o constantă. Urmează atunci, din relația generală exprimată prin ecuația 22 (dedusă de noi doar într-un caz particular), că ori de cîte ori momentul unghiular este conservat, momentul magnetic rămîne de asemenea constant în mărime și direcție. Factorul

$$\frac{-e}{2m_e}$$

este numit *raport magneto-mecanic orbital* pentru electron**. Legătura intimă dintre momentul magnetic și momentul unghiular este centrală în orice explicare a magnetismului atomic.

De ce nu observăm cîmpurile magnetice ale tuturor electronilor rotitori din toți atomii oricărei substanțe? Răspunsul trebuie să fie că există o anulare mutuală. Într-o bucată obișnuită de materie trebuie să fie tot atîția electroni mergînd într-un sens ca și în celălalt. Aceasta este de așteptat, deoarece nu există nimic care să facă un sens de rotație intrinsec mai ușor decît celălalt, sau altfel spus de a distinge o direcție axială unică. Ar trebui să fie ceva în structura materialului care să individualizeze nu numai o axă, dar un *sens de rotație în jurul acelei axe!*

Putem imagina o bucată de materie, în absența oricărui cîmp magnetic exterior, drept conținînd electroni pe orbite cu diverșii lor vectori moment, unghiular orbital și moment magnetic orbital asociate distribuite în mod egal după toate direcțiile spațiului. Să considerăm acele orbite care se întîmplă să aibă planele lor aproximativ paralele cu planul xy, din care vor exista numere egale cu $\mathbf{m}$ în sus și $\mathbf{m}$ în jos. Să aflăm ce se întîmplă cu una dintre aceste orbite cînd comutăm un cîmp magnetic exterior în direcția z.

---

* Vom avea de-a face cu viteze v mult mai mici decît c, astfel încît m_e reprezintă masa de repaus, $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. Alegerea noastră a simbolului $\mathbf{m}$ pentru momentul magnetic face necesară, în acest capitol, folosirea unui simbol diferit pentru masa electronului. Pentru momentul unghiular alegem simbolul $\mathbf{L}$, în locul lui $\mathbf{J}$ folosit în volumul I, capitolul 6, deoarece $\mathbf{L}$ este folosit în mod tradițional în fizica atomică pentru moment unghiular orbital, care este ceea ce considerăm aici, și deoarece am folosit $\mathbf{J}$ pentru densitatea de curent.

** De multe ori se folosește termenul raport *giromagnetic* pentru această cantitate. Noi preferăm raport magneto-mecanic, cum s-a folosit în volumul I, capitolul 8.

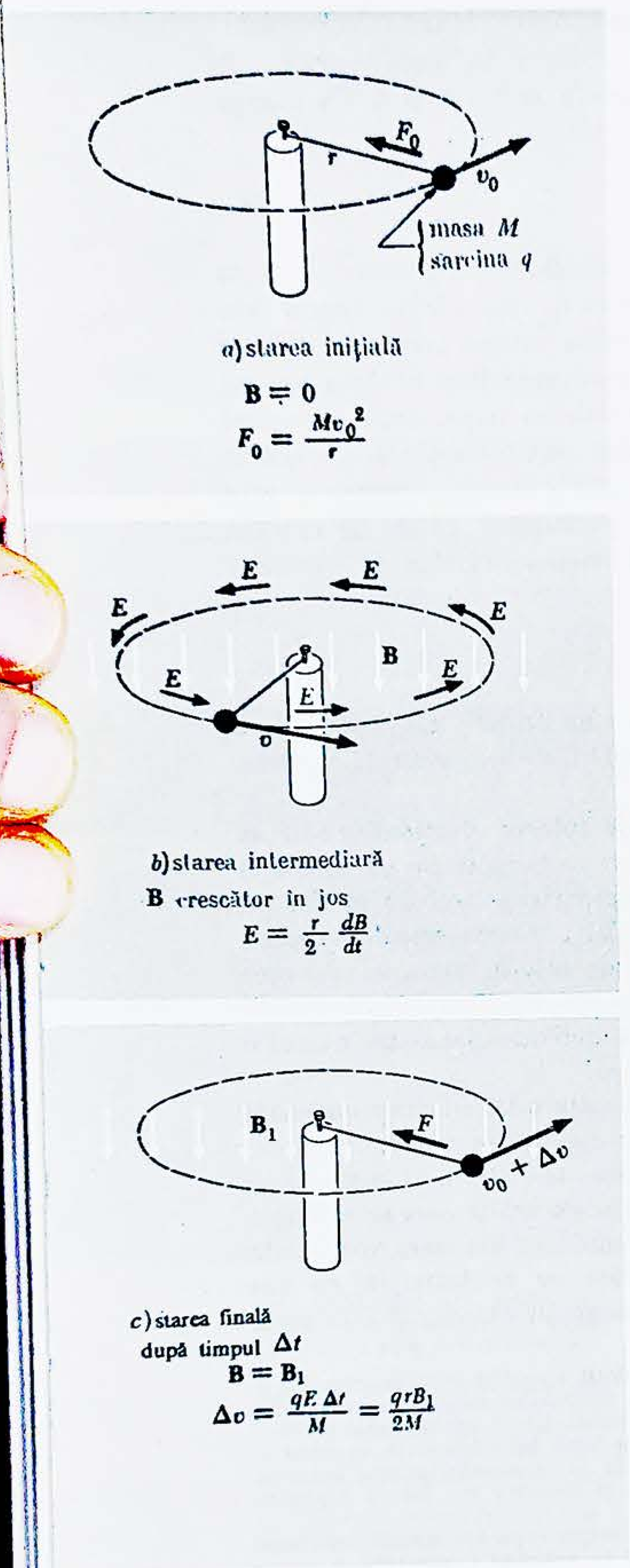


Fig. 10.12. Creșterea inducției magnetice **B** induce un cîmp electric de intensitate **E** care accelerează corpul încărcat de pe orbită.

Vom analiza mai întîi un sistem electromecanic care nu arată prea mult ca un atom. În figura 10.12 există un obiect de masă M și sarcină electrică q, legat la un punct fix printr-o coardă de lungime fixă r. Această coardă dă forța centripetă care ține obiectul pe orbita sa circulară. Mărimea acelei forțe F_0 este dată, după cum știm, de

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}. \qquad (23)$$

În starea inițială, figura 10.12, *a*, nu există nici un cîmp magnetic extern. Acum, prin intermediul unui oarecare solenoid mare, convenabil, începem să creăm un cîmp de inducție **B** în direcția z negativă, uniform peste întreaga regiune la orice moment dat. În timp ce cîmpul crește cu rata dB/dt, va exista un cîmp electric indus **E** peste tot în jurul traiectoriei, cum se arată în figura 10.12, *b*. Pentru a găsi mărimea acestui cîmp **E** observăm că rata de variație a fluxului prin traiectoria circulară este

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}. \qquad (24)$$

Aceasta determină integrala curbilinie a cîmpului electric, care este de fapt tot ceea ce contează (presupunem doar pentru simplitate și simetrie că este identic pe toată traiectoria).

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi r E. \qquad (25)$$

Găsim astfel că

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \qquad (26)$$

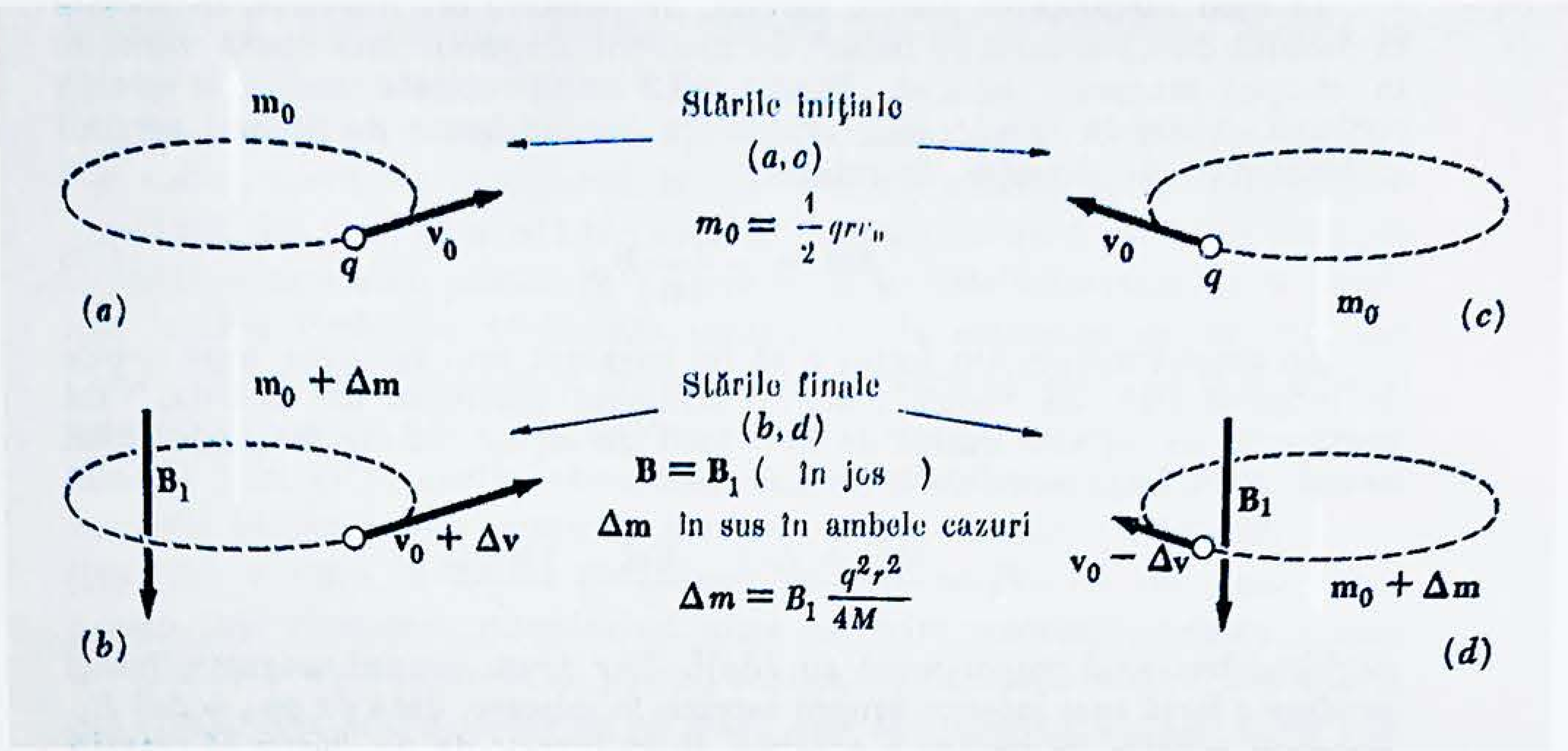


Fig. 10.13. *Variaţia* vectorului moment magnetic este opusă sensului lui $\vec{\mathbf{B}}$, pentru *ambele* sensuri de mişcare.

Am neglijat semnele pînă aici, dar dacă aplicaţi la figura 10.12 regula dumneavoastră preferată de a găsi direcţia unei forţe electromotoare induse, veţi vedea că $\mathbf{E}$ trebuie să fie într-o direcţie în care să accelereze corpul, dacă q este o sarcină pozitivă. Acceleraţia de-a lungul traiectoriei, dv/dt, este determinată de forţa qE:

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qE = \frac{qr}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{27}$$

astfel încît avem o relaţie între variaţia în v şi variaţia în B:

$$\mathrm{d}v = \frac{qr}{2M}\,\mathrm{d}B. \tag{28}$$

Raza r fiind fixată de lungimea corzii, factorul $(qr/2M)$ este constant. Fie Δv variaţia totală în v în întreg procesul de aducere a cîmpului pînă la valoarea finală B_1. Atunci:

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\mathrm{d}v = \frac{qr}{2M}\int_0^{B_1}\mathrm{d}B = \frac{qrB_1}{2M}. \tag{29}$$

Observaţi că timpul a dispărut — viteza finală este aceeaşi dacă variaţia este făcută încet sau repede.

Viteza crescută a sarcinii în starea finală înseamnă o creştere în momentul magnetic $\mathbf{m}$ orientat în sus. Un corp încărcat *negativ* ar fi frînat în împrejurări asemănătoare, ceea ce ar fi descrescut momentul *orientat în jos*. În fiecare din cazuri, atunci, aplicarea cîmpului $\mathbf{B}_1$ a produs o variaţie în momentul magnetic opusă cîmpului. Mărimea variaţiei de moment magnetic Δm, este

$$\Delta m = \frac{qr}{2}\Delta v = \frac{q^2r^2}{4M}B_1. \tag{30}$$

În mod asemănător pentru sarcini, fie pozitive ori negative, în rotație în cealaltă direcție, variația indusă de moment magnetic este opusă variației în cîmpul magnetic aplicat. Figura 10.3 arată aceasta pentru o sarcină pozitivă. Apare că următoarea relație are loc indiferent de semnul sarcinii și indiferent de direcția de rotație:

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q^2r^2}{4M}\mathbf{B}_1. \tag{31}$$

În acest exemplu am forțat r să fie constant prin folosirea unei coarde de lungime fixă. Să vedem cum s-a schimbat tensiunea din coardă. Vom presupune că B_1 este destul de mic încît $\Delta v \ll v_0$. În starea finală avem nevoie de o forță centripetă de mărime:

$$F_1 = \frac{M(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx \frac{Mv_0^2}{r} + \frac{2Mv_0\Delta v}{r} \tag{32}$$

neglijînd termenul proporțional cu $(\Delta v)^2$. Dar acum cîmpul magnetic însuși produce o forță spre interior asupra sarcinii în mișcare, dată de $q(v_0 + \Delta v)\, B_1$. Folosind ecuația 29 pentru a exprima B_1 în funcție de Δv, găsim că această forță suplimentară orientată spre interior are mărimea $q(v_0 + \Delta v) \cdot \frac{2M\Delta v}{qr}$ care, în primul ordin în $\Delta v/v_0$, este $2Mv_0\Delta v/r$. Aceasta este tocmai ceea ce este necesar, după ecuația 32, pentru a evita orice extrasolicitare asupra coardei noastre! Deci tensiunea în coardă *rămîne neschimbată, la valoarea* F_0.

Aceasta ne aduce la o concluzie surprinzătoare: rezultatul nostru, ecuația 31, trebuie să fie adevărat pentru *orice* fel de forță de legătură care variază cu raza. Coarda noastră ar putea fi înlocuită printr-un resort elastic fără a afecta concluzia — raza încă ar fi neschimbată în starea finală. Sau ca să trecem imediat la un sistem care ne interesează, ar putea fi înlocuit prin atracția Coulomb a unui nucleu pentru un electron. Ori ar putea fi forța efectivă care acționează asupra unui electron într-un atom care conține mulți electroni, care are o dependență diferită de rază. Dintr-o relație atît de *generală* cum pare a fi ecuația 31 putem spera că unele rezultate rezonabile chiar fără o bună teorie a structurii atomice. Singura trăsătură a atomului care apare explicit este r^2. Desigur, trebuie să observăm limitarea $\Delta v/v_0 \ll 1$, de fapt o limitare asupra lui B_1, care a permis această aplicabilitate generală.

Efectul asupra orbitelor electronice al comutării unui cîmp magnetic **B** poate fi vizualizat în acest mod: fiecare electron continuă să se rotească la aceeași rază, dar viteza sa unghiulară, care era $\pm v_0/r$, depinzînd de sensul de rotație, și-a adăugat o mică creștere $\Delta\omega = \Delta v/r$. După ecuația 29 valoarea acestei creșteri este

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{eB}{2m_e} \tag{33}$$

o viteză unghiulară care depinde doar de intensitatea cîmpului aplicat și de raportul sarcină-masă al electronului. Toate rotațiile într-un sens sînt accelerate prin aceeași cantitate, exprimată în radiani pe secundă, iar acelea în cealaltă direcție încetinite prin aceeași cantitate. Noul sistem arată exact ca și vechiul sistem văzut dintr-un *sistem de referință în rotație*. Viteza unghiulară $eB/2m_e$ în ecuația 33 este numită „viteză unghiulară

Larmor" sau „frecvență Larmor". Sir Joseph Larmor, fizicianul-matematician britanic, a demonstrat această teoremă generală în 1895, înainte ca cineva să știe cum este construit un atom.

Am considerat doar orbite perpendiculare pe **B**. Concluzia noastră s-ar aplica, aproximativ vorbind, la o treime din orbitele electronice dintr-o substanță, dat fiind că există trei direcții perpendiculare. Ceea ce se întîmplă cu orbitele care stau paralel cu planele xz și yz este interesant, și o puteți afla lucrînd Problema 10.22. Ele contribuie de asemenea cu un moment dipolar indus opus cîmpului și proporțional cu pătratul razei orbitale. Efectul tuturor orbitelor poate fi rezumat într-o ecuație ca ecuația 31, cu r^2 înlocuit prin $\langle r^2 \rangle$, media pătratelor razelor orbitale, și cu niște factori numerici pentru a ține seama de medierea după orientarea orbitelor.

Fără a intra în aceste detalii, să folosim ecuația 31 așa cum arată pentru toți electronii, introducînd niște estimări rezonabile pentru o rază de orbită, și să vedem dacă putem explica aproximativ cîteva din datele din tabelă. Numărul de electroni per gram este aproximativ același în cele mai multe substanțe, deoarece există un proton în nucleu pentru fiecare electron în atom, și în mare un neutron pe proton. Astfel numărul de electroni pe gram, n, este aproximativ același ca în substanța de greutate atomică 2 și număr atomic 1, anume:

$$n \approx \frac{6 \cdot 10^{23}}{2} = 3 \cdot 10^{23}. \tag{34}$$

Pentru r vom lua $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm, o distanță cu care veți deveni foarte familiarizați ca o rază atomică „tipică". În atomi cu mai mulți electroni, desigur, unii electroni au orbite mari iar alții mici. Pentru M înlocuim masa electronului m_e. Intensitatea cîmpului magnetic la poziția probei era 1,8 tesla. Atunci momentul magnetic total indus într-un gram de substanță este, în mare:

$$n\Delta m = \frac{ne^2r^2B}{4m_e} = \frac{(3 \cdot 10^{23})\,(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2(0{,}5 \cdot 10^{-10})^2(1{,}8)}{4(9 \cdot 10^{-31})} =$$

$$= 0{,}96 \cdot 10^{-5} \text{ (joule/tesla)/gram} \tag{35}$$

Gradientul cîmpului $\partial B_z/\partial z$ a fost 17 T/m. Folosind ecuația 18 pentru a calcula forța, am prezice o forță în mărime de $17 \cdot 0{,}96 \cdot 10^{-5}$ newtoni, sau aproximativ $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ newtoni. Aceasta este apropiată de cifrele date pentru un număr de substanțe în tabelă. De fapt, este mai aproape decît am fi avut dreptul să ne așteptăm, astfel încît acordul este de aceea accidental.*

---

* Formula exactă, obținută prin medierea peste orbite orientate în mod izotrop, înlocuiește factorul $\frac{1}{4}$ din ecuația 31 prin $\frac{1}{6}$, înlocuind r^2 prin $\langle r^2 \rangle$. O teorie cuanto-mecanică riguroasă conduce la exact același rezultat, și concordanța cu experiența este excelentă. Într-adevăr, pentru mulți atomi diamagnetici măsurările magnetice dau cea mai precisă cale de a determina $\langle r^2 \rangle$.

Avem de verificat că presupunerea noastră $\Delta v \ll v_0$ este îndeplinită în această situaţie. Introducînd aceleaşi valori în ecuaţia 29, putem estima Δv:

$$\Delta v = \frac{erB}{2m_e} = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})\,(0{,}5 \cdot 10^{-10})\,(1{,}8)}{2(9 \cdot 10^{-31})} \approx 10 \text{ m/sec.} \qquad (36)$$

Nu aveţi nevoie să cunoaşteţi multă fizică atomică pentru a realiza că 10 m/sec este mic în comparaţie cu viteza unui electron într-un atom. Aceasta se poate calcula repede! O viteză tipică pentru un electron atomic este mai degrabă 10^6 m/sec, sau mai mare. Aceasta arată că fie şi magnetul nostru destul de puternic aplică un cîmp care este foarte slab, din punctul de vedere al unui electron atomic, producînd doar mici variaţii în vitezele de revoluţie.

Putem vedea acum de ce diamagnetismul este un fenomen universal, şi destul de puţin manifest. Este aproximativ acelaşi în molecule ca şi în atomi. Faptul că o moleculă poate fi o structură mult mai mare decît un atom — ea poate fi construită din sute sau mii de atomi — nu creşte în general raza orbitală pătratică medie efectivă. Motivul este că într-o moleculă orice electron dat este destul de bine localizat pe un atom. Există unele excepţii interesante şi am inclus una în tabel — grafitul. Diamagnetismul anormal al grafitului este datorat unei structuri neuzuale care permite unora dintre electroni să circule destul de liber în interiorul unui grup planar de atomi din reţeaua cristalină.

10.6. SPINUL ELECTRONULUI ŞI MOMENTUL MAGNETIC

Electronul posedă moment unghiular care nu are nimic de-a face cu mişcarea sa orbitală. El se comportă în multe privinţe ca şi cînd ar fi în continuă rotaţie în jurul unei axe proprii. Această proprietate este numită *spin*. Cînd mărimea momentului unghiular de spin este măsurată, totdeauna este obţinut acelaşi rezultat: $h/4\pi$, unde h este constanta lui Planck. Spinul electronului este un fenomen cuantic. Veţi auzi mai multe despre descoperirea şi implicaţiile sale în volumul IV al acestui curs. Semnificaţia sa pentru noi stă acum în faptul că există un *moment magnetic* asociat cu acest moment unghiular intrinsec, de asemenea de mărime invariabilă. Acest moment magnetic este orientat în direcţia la care v-aţi aştepta dacă vizualizaţi electronul drept o bilă de sarcină negativă rotindu-se în jurul axei sale. Aceasta înseamnă că vectorul moment magnetic este orientat antiparalel cu vectorul moment unghiular de spin, cum se indică în figura 10.14. Momentul magnetic, totuşi, este de două ori mai mare, relativ la momentul unghiular, decît în cazul mişcării orbitale.

Nu are sens să încercăm să facem un model clasic al acestui obiect; proprietăţile sale sînt esenţialmente cuanto-mecanice. Nici măcar nu avem nevoie să mergem atît de departe încît să spunem că *este* o buclă de curent. Ceea ce contează este numai că se comportă astfel în următoarele privinţe: (i) produce un cîmp magnetic care, la distanţă, este acela al unui dipol magnetic; (ii) într-un cîmp extern $\mathbf{B}$ el este supus unui cuplu egal cu acela care ar acţiona asupra unei bucle de curent de moment dipolar echivalent; (iii) în interiorul sursei, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ peste tot, ca în sursele obişnuite de cîmp magnetic cu care sîntem deja familiarizaţi.

Deoarece mărimea momentului magnetic de spin este totdeauna aceeaşi, singurul lucru pe care îl poate influenţa un cîmp extern este direcţia. Un moment magnetic într-un cîmp extern simte un cuplu. Dacă aţi rezolvat Problema 6.22, aţi demonstrat că cuplul **N** asupra unei bucle de curent de orice formă, de moment dipolar **m**, într-un cîmp **B**, este dată de

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \tag{37}$$

Pentru aceia care nu au trecut prin acea demonstraţie, să calculăm cuplul într-un caz special simplu. În figura 10.15 vedem o buclă dreptunghiulară de sîrmă care poartă un curent I. Bucla are un moment magnetic **m**, de mărime $m = Iab$. Cuplul asupra buclei provine de la forţele F_1 şi F_2 care acţionează asupra firelor orizontale. Fiecare dintre aceste forţe are mărimea $F = IbB$ şi braţul corespunzător al momentului este distanţa $(a/2) \sin\theta$. Vedem că mărimea cuplului asupra buclei este

$$N = 2\, IbB \cdot \frac{a}{2} \sin\theta = (Iab)B \sin\theta = $$

$$= mB \sin\theta. \tag{38}$$

Cuplul acţionează într-o direcţie încît să aducă **m** paralel cu **B**; el este reprezentat printr-un vector **N** în direcţia x pozitivă, în situaţia arătată. Toate acestea sînt în acord cu formula generală, ecuaţia 37. Observaţi că ecuaţia 37 corespunde exact la formula pe care am dedus-o în capitolul 9 pentru cuplul asupra unui dipol electric **p** într-un cîmp exterior **E**, anume $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. Orientarea cu **m** în direcţia lui **B**, ca şi aceea a dipolului electric paralel cu **E**, este poziţia de cea mai joasă energie. În mod asemănător, lucrul necesar pentru a roti un dipol **m** de la paralel la antiparalel este $2\,mB$. (Vezi ec. 9.18; pur şi simplu putem să preluăm acest rezultat pentru cazul magnetic.)

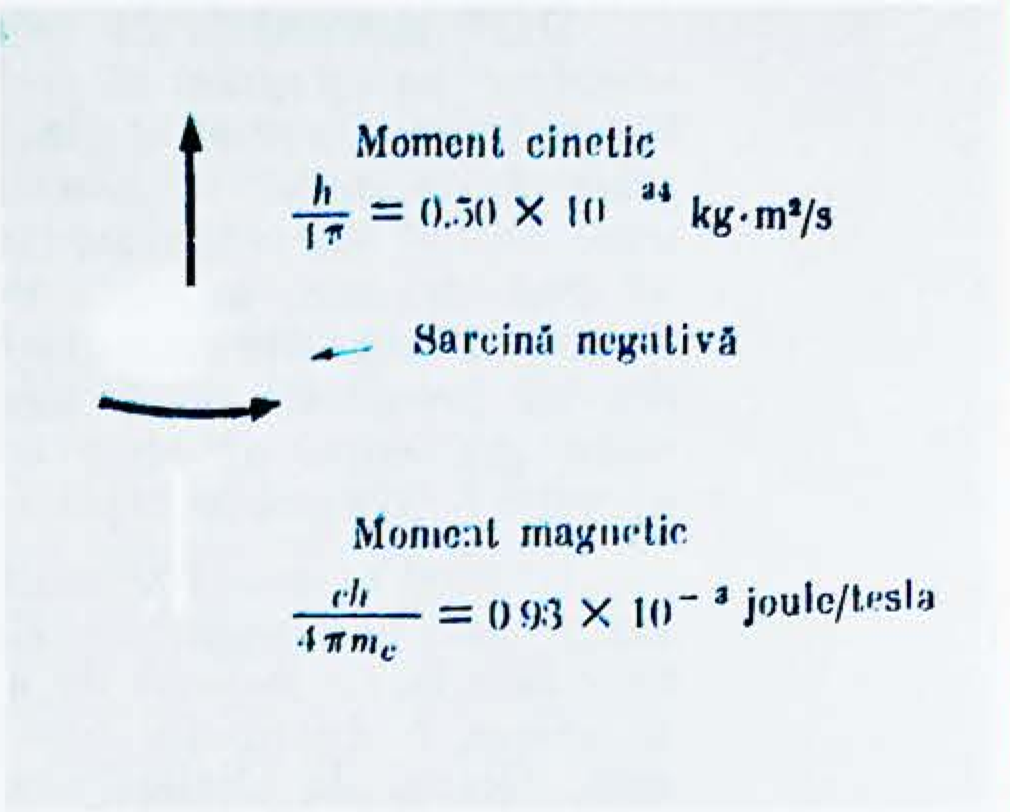


Fig. 10.14. Momentul cinetic intrinsec, sau *spinul*, şi momentul magnetic asociat al electronului.

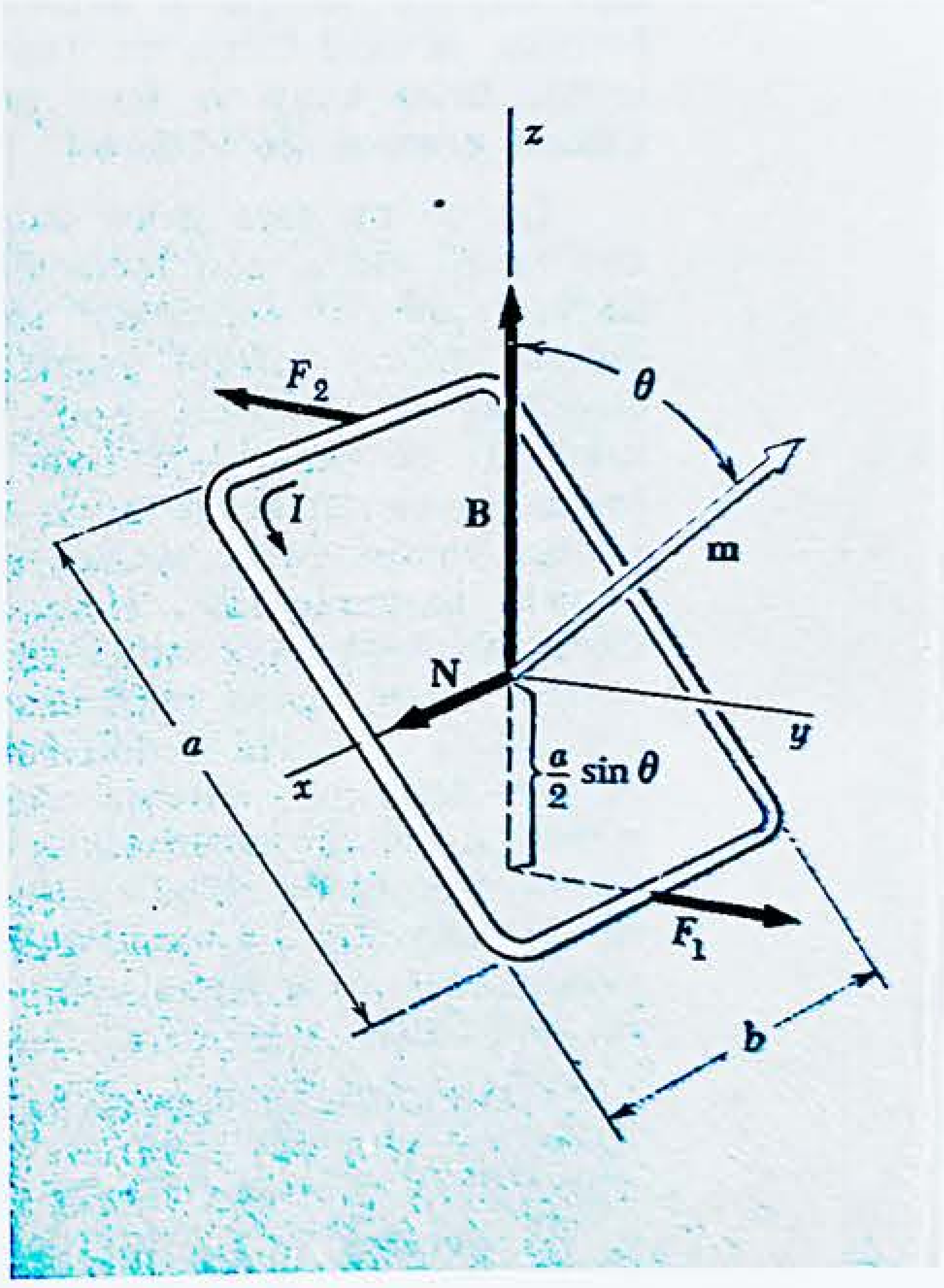


Fig. 10.15. Calcularea cuplului asupra unei spire într-un cîmp magnetic de inducţie **B**. Momentul magnetic al buclei de curent este **m**.

Dacă momentele de spin electronic într-o substanță sînt libere să se orienteze, ne așteptăm să prefere orientarea în direcția oricărui cîmp aplicat **B**, orientarea de energie minimă. Să presupunem că fiecare electron dintr-un gram de material ia această orientare. Am calculat deja că se află în mare $3 \cdot 10^{23}$ electroni într-un gram din orice. Momentul magnetic de spin al unui electron, m_s, este dat în figura 10.14 ca $0{,}93 \cdot 10^{-23}$ joule/tesla. Momentul magnetic total al spinilor noștri aliniați va fi $(3 \cdot 10^{23}) \times (0{,}9 \cdot 10^{-23})$, sau 2,7 joule/tesla. Forța asupra unei astfel de probe, în bobina noastră unde gradientul de cîmp a fost 17 tesla/metru, ar fi 46 newton, sau aproape 5 kilograme-forță!

Evident aceasta este mult mai mare decît forța observată pentru oricare din probele paramagnetice. Explicația este că alinierea momentelor electronilor este foarte departe de a fi perfectă. Agitația termică tinde totdeauna să creeze o distribuție haotică, sau la întîmplare, a direcțiilor axelor de spin. Gradul de aliniere care apare în realitate reprezintă un compromis între preferința pentru direcția de cea mai joasă energie și influența desorientantă a mișcării termice. Apare că momentul magnetic total este în general proporțional cu cîmpul aplicat **B**, și invers proporțional cu temperatura absolută T. Cum se obține aceasta trebuie să lăsăm pentru volumul V al acestui curs, tema căruia ar putea fi descrisă drept competiția care implică energia și dezordinea. Paramagnetismul spinilor electronici va furniza, la acel timp, un exemplu instructiv. Fizica cuantică pe care o veți învăța între timp va face problema *mai simplă* decît apare din punctul nostru prezent de vedere.

De ce nu este orice substanță paramagnetică? Motivul este că în cei mai mulți atomi sau molecule, electronii sînt grupați în perechi, cu spinii fiecărei perechi constrînși să fie orientați în direcții opuse indiferent de cîmpul aplicat. Drept rezultat, momentele magnetice ale unei perechi de electroni se anulează unul pe celălalt. Tot ceea ce rămîne este diamagnetismul pe care deja l-am explorat. Unele molecule conțin un număr impar de electroni, și în ele anularea totală în perechi este evident imposibilă. Oxidul de azot, NO, cu 15 electroni în moleculă este un exemplu; el este paramagnetic. Molecula de oxigen O_2 conține un număr par de electroni, dar structura sa electronică se întîmplă să favorizeze neanularea a doi dintre spinii electronici. În anumite grupe de elemente, mai ales elementele în jurul gadoliniului în sistemul periodic, și de asemenea acelea în jurul fierului, atomii conțin spini electronici neîmperecheați care sînt relativ liberi să se orienteze într-un cîmp magnetic. (Momentul magnetic al unui astfel de atom adesea include și o oarecare contribuție de la mișcarea orbitală.) În conductori metalici, electronii „liberi" care rătăcesc prin metal au o slabă comportare paramagnetică proprie. Toate acestea au la bază fizica cuantică.

Chiar diamagnetismul, în mod fundamental, implică mecanică cuantică. Să considerăm doi electroni rotindu-se în direcții opuse într-un atom. Am explicat că diamagnetismul provine din aceea că un cîmp aplicat **B** face ca un electron să fie ușor accelerat iar celălalt să fie încetinit. Dar de ce nu se deplasează ambele orbite astfel încît momentele lor magnetice să fie orientate în aceeași direcție, paralelă cu cîmpul? Răspunsul este că celor doi electroni, în cele mai multe cazuri, li se impune prin legi cuanto-mecanice să-și mențină direcțiile opuse de revoluție orbitală, în mare parte asemănător cu cazul spinilor electronici grupați doi cîte doi.

10.7. SUSCEPTIBILITATEA MAGNETICĂ

Am văzut că atît substanțele diamagnetice cît și substanțele paramagnetice dezvoltă un moment magnetic proporțional cu cîmpul aplicat. Cel puțin, aceasta este adevărat în cele mai multe situații. La temperaturi foarte joase, în cîmpuri deosebit de puternice, momentul paramagnetic indus se apropie de o valoare limită cînd intensitatea cîmpului este crescută. Lăsînd la o parte acest efect de „saturare" relația dintre moment și cîmpul aplicat este lineară, astfel încît putem caracteriza proprietățile magnetice ale unei substanțe prin raportul momentului indus la cîmpul aplicat. Raportul este numit susceptibilitate magnetică. Depinzînd de faptul că alegem momentul unei unități de masă, volum, sau a 1 mol de material, definim susceptibilitatea *specifică*, susceptibilitatea *de volum*, sau susceptibilitatea *molară*. Discuția noastră din § 10.5 sugerează că pentru substanțe diamagnetice susceptibilitatea specifică, care se bazează pe momentul indus pe unitatea de masă, ar trebui să fie aproape același de la o substanță la alta. Totuși, susceptibilitatea de volum, care se bazează pe momentul magnetic indus per centimetru cub, este mai relevant pentru preocupările noastre de acum.

Momentul magnetic pe unitate de volum îl vom numi polarizarea magnetică, sau *magnetizarea*, folosind pentru ea simbolul **M**. Dacă definim acum susceptibilitatea magnetică de volum, notată χ_m, prin relația

$$\mathbf{M} = \varepsilon_0 c^2 \chi_m \mathbf{B} \text{ (vezi observațiile mai departe)} \tag{39}$$

susceptibilitatea va fi un număr adimensional, negativ pentru substanțe diamagnetice, pozitiv pentru paramagnetice. Aceasta este exact analog procedeului, exprimat în ecuația 9.38, prin care am definit susceptibilitatea electrică χ_e drept raportul polarizării electrice P și intensitatea cîmpului electric E. Vom vedea imediat că analogia merge chiar mai adînc deoarece cîmpul macroscopic **B** în interiorul materiei va apărea a fi media celui microscopic **B**, întocmai cum cîmpul macroscopic **E** a apărut a fi media cîmpului microscopic **E**.

Din nefericire, ecuația 39 *nu* este definiția obișnuită a susceptibilității magnetice de volum. În definiția uzuală un alt cîmp **H**, pe care îl vom introduce la timpul potrivit, apare în locul lui **B** (vezi ec. 55). Deși nelogică, definirea în funcție de **H** are o anumită justificare practică, iar tradiția este atît de bine stabilită încît în final vom avea să i ne supunem. Dar în acest capitol vrem să urmăm atît cît putem un drum care merge în mod natural și consistent paralel cu descrierea cîmpurilor electrice în materie.

Diferența de definiție nu are nici o consecință practică cîtă vreme χ_m este un număr foarte mic în comparație cu unu. Valorile lui χ_m pentru substanțe pur diamagnetice, solide sau lichide, se află între $-0{,}6 \times 10^{-5}$ și $-1{,}2 \times 10^{-5}$. Chiar pentru oxigen în condițiile date în tabelă, susceptibilitatea paramagnetică este mai mică de 10^{-3}. Aceasta înseamnă că cîmpul magnetic produs de momentele dipolare din substanțe, cel puțin ca o medie de scară largă, este mult mai slab decît cîmpul aplicat **B**. Aceasta ne dă o oarecare încredere că în astfel de sisteme putem presupune cîmpul care acționează asupra dipolilor atomici pentru a-i orienta același ca și cîmpul care ar exista acolo în lipsa probei. Totuși, vom fi interesați în alte

sisteme în care cîmpul momentelor magnetice *nu* este mic. De aceea trebuie să studiem, exact cum am făcut în cazul polarizării electrice, cîmpurile magnetice pe care materia magnetizată le produce, atît în interiorul cît şi în exteriorul materialului.

10.8. CÎMPUL MAGNETIC PRODUS DE MATERIA MAGNETIZATĂ

O bucată de material care conţine, distribuite în mod uniform în volumul său, un mare număr de dipoli magnetici atomici orientaţi toţi în aceeaşi direcţie, este numit *uniform magnetizată*. Vectorul de magnetizare **M** este simplu produsul numărului de dipoli orientaţi per unitate de volum şi a momentului magnetic **m** al fiecărui dipol. Nu ne preocupăm cum este menţinută alinierea acestor dipoli. Poate că printr-un cîmp oarecare aplicat de la o altă sursă, dar nu sîntem interesaţi în aceasta. Vrem să studiem doar cîmpul produs de dipolii înşişi.

Să considerăm mai întîi o placă de material de grosime dz, tăiată perpendicular pe direcţia magnetizării, cum se arată în figura 10.16, *a*. Placa poate fi împărţită în mici cărămizi. O astfel de cărămidă, care are o suprafaţă de arie da, conţine un moment dipolar total care este Mdadz, deoarece M este momentul dipolar per unitate de volum (fig. 10.16, *b*). Cîmpul magnetic pe care îl produce această cărămidă în toate punctele *îndepărtate* — depărtate în comparaţie cu mărimea cărămizii — este acela al oricărui dipol cu acelaşi moment magnetic. Am putea construi un dipol de acea intensitate prin aplicarea unei panglici conductoare de lăţime dz pe forma cărămizii, şi trimiţînd în jurul acestei bucle un curent $I = M$dz (fig. 10.16, *c*). Aceasta va da buclei un moment dipolar:

$$m = I \cdot aria = M\mathrm{d}z\mathrm{d}a \qquad (40)$$

care este identic cu acela al cărămizii.

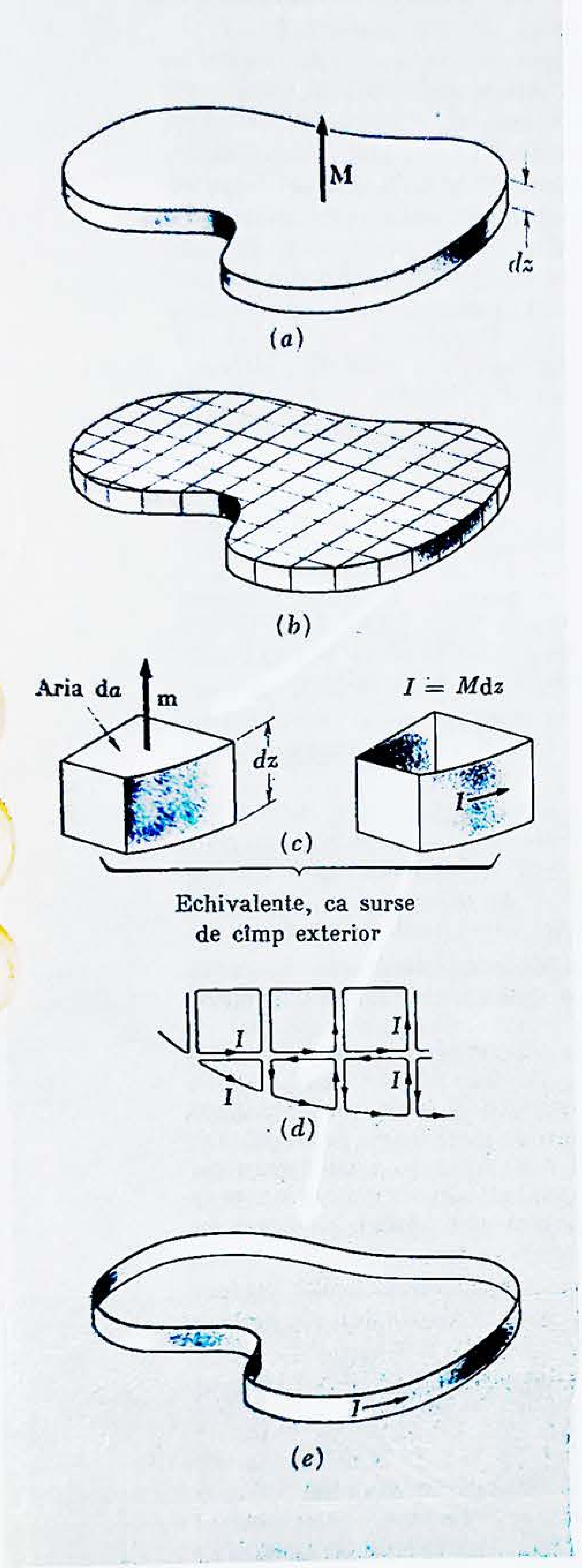


Fig. 10.16. Placa subţire, magnetizată perpendicular pe suprafaţa sa largă, este echivalentă unei panglici de curent cîtă vreme se consideră cîmpul exterior.

Să substituim o astfel de buclă de curent pentru fiecare cărămidă din placă, cum se indică în figura 10.16, *d*. Curentul este acelaşi în toate şi în consecinţă, la fiecare frontieră interioară găsim curenţi egali şi opuşi, echivalenţi cu curent zero. Buclele noastre sînt deci echivalente cu o singură panglică împrejur la exterior, care poartă curentul $M dz$ (fig. 10.16, *e*). Acum aceste cărămizi pot fi făcute foarte mici, atît cît să nu ne apropiem de dimensiunile moleculare. Ele trebuie să fie destul de mari încît magnetizarea lor nu variază apreciabil de la o cărămidă la alta. Cu această limitare, putem afirma că cîmpul în orice punct *exterior*, chiar apropiat de placă, este identic cu acela al panglicii de curent.

Rămîne doar să reconstruim un întreg bloc din astfel de plăci, ca în figura 10.17, *a*. Întregul bloc este atunci echivalent cu panglica lată din figura 10.17, *b* în jurul căreia curge un curent $M dz$, în amperi, în fiecare fîşie dz, sau, formulat mai simplu, un curent superficial de densitate $\mathcal{J}$, în amperi/metru, dat de

$$\mathcal{J} = M. \tag{41}$$

Cîmpul magnetic **B** în orice punct în afara blocului magnetizat din figura 10.17, *a*, şi chiar în vecinătatea blocului presupunînd că nu ne apropiem la distanţe moleculare, este identic cu cîmpul **B'** în punctul corespunzător din vecinătatea panglicii de curent late din figura 10.17, *b*.

Dar care este cîmpul în interiorul blocului magnetizat? Aici avem de-a face cu o întrebare ca aceea pe care am întîlnit-o în capitolul 9. În interiorul materiei cîmpul magnetic nu este de loc uniform dacă îl observăm la scara atomică pe care am numit-o „microscopică". El variază puternic atît în mărime cît şi în direcţie între puncte la o depărtare de cîţiva angstromi. Acest cîmp **B** *microscopic* este simplu un cîmp magnetic în vid, deoarece din punctul de vedere microscopic, după cum am subliniat în capitolul 9, materia este o mulţime de particule şi sarcină electrică în spaţiul altfel vid. Singurul cîmp de scară largă care poate fi definit în mod unic în interiorul materiei este media spaţială a cîmpului microscopic.

Din cauza absenţei efectelor care să fie atribuite sarcinii magnetice, credem că cîmpul microscopic însuşi satisface $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Dacă aceasta este corect, urmează imediat

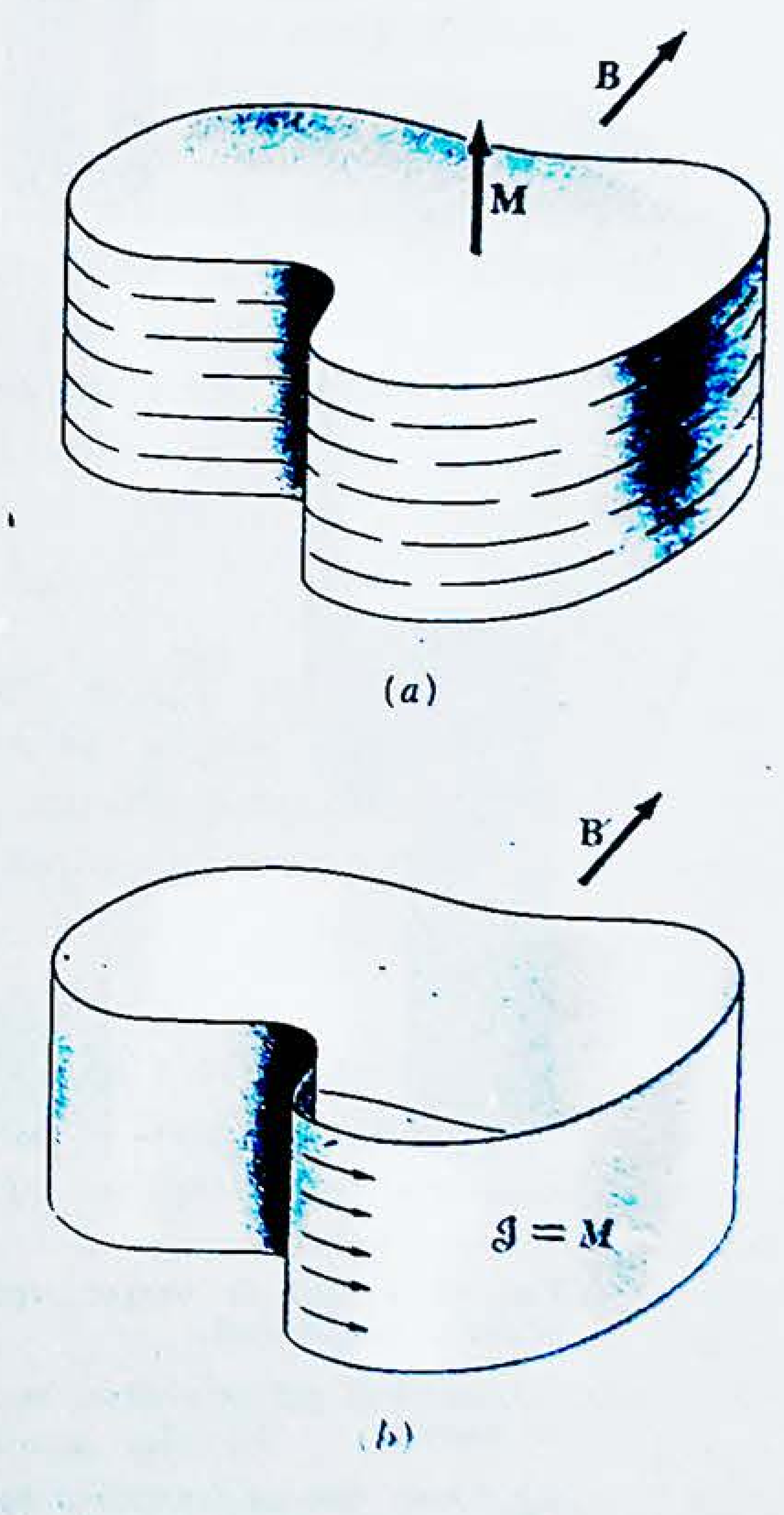


Fig. 10.17. Un bloc magnetizat uniform este echivalent unei benzi de curent superficial.

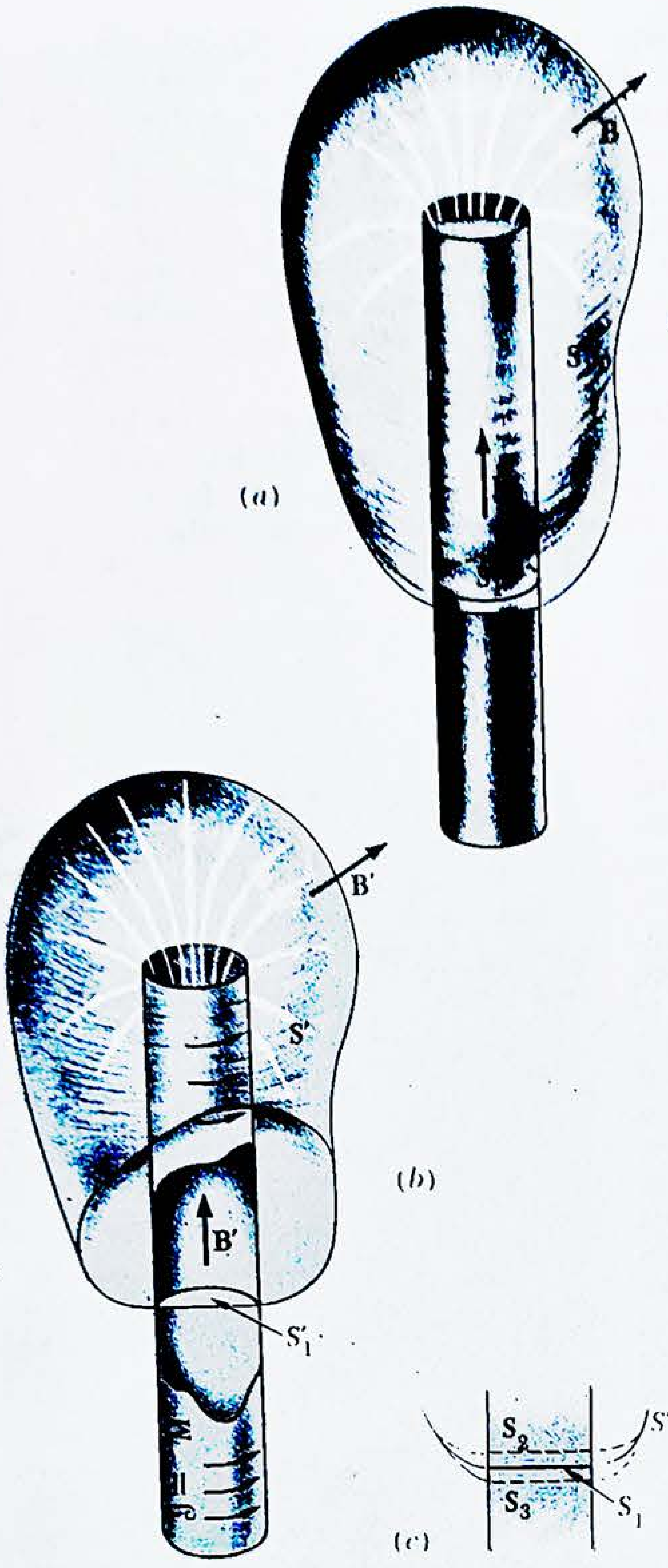


Fig. 10.18. *(a)* O vergea cilindrică uniform magnetizată.

(b) Cilindrul gol echivalent, sau teacă de curent.

(c) Putem eşalona interiorul barei, şi obţine astfel o medie spaţială a cîmpului microscopic, prin suprafeţe paralele apropiate, S_1, S_2, ...

că media spaţială a cîmpului intern microscopic din blocul nostru este acelaşi cu cîmpul **B'** în interiorul pangliciii de curent echivalente.

Pentru a demonstra aceasta, să considerăm bara lungă magnetizată uniform paralel cu lungimea sa, arătată în figura 10.18, *a*. Tocmai am arătat că cîmpul extern va fi identic cu acela al unui cilindru lung de curent (practic echivalent cu un solenoid cu un singur strat) arătat în figura 10.18, *b*. S în figura 10.18, *a* indică o suprafaţă închisă care include o porţiune S_1 care trece prin interiorul barei. Deoarece div $\mathbf{B}=0$ pentru cîmpul intern microscopic, ca şi pentru cîmpul extern, div **B** este zero peste tot volumul închis de S. Urmează atunci din teorema lui Gauss că integrala de suprafaţă a lui **B** pe S trebuie să fie zero. Integrala de suprafaţă a lui **B'** pe suprafaţa închisă S' este de asemenea zero. Pe porţiunile lui S şi S' *externe* cilindrilor, B şi B' sînt identice. De aceea integrala de suprafaţă a lui **B** pe discul interior S_1 trebuie să fie egală cu integrala de suprafaţă a lui **B'** pe discul interior S'_1. Aceasta trebuie să aibă loc de asemenea pentru oricare dintre mulţimea de discuri paralele apropiate, ca S_2, S_3 etc., indicate în figura 10.18, *c*, deoarece cîmpul în exteriorul cilindrului în această regiune este neglijabil de mic, astfel încît partea din afară nu schimbă nimic. Acum a lua integrala de suprafaţă pe o serie de plane egal distanţate este un bun mod de a calcula media de volum a cîmpului **B** din acea regiune, deoarece alegerea elementelor de volum este imparţială. Urmează că media spaţială a cîmpului microscopic **B** în interiorul barei magnetizate este egală cu cîmpul **B'** în interiorul stratului de curent din figura 10.18, *b*.

Este instructiv să comparăm argumentele pe care tocmai le-am dezvoltat cu analiza noastră a problemelor corespunzătoare în capitolul 9.

Figura 10.19 arată aceste dezvoltări una alături de cealaltă. Veți vedea că ele merg logic paralel, dar că în fiecare stadiu există o diferență care reflectă asimetria esențială rezumată în observația că *sarcinile electrice* sînt sursa *cîmpurilor electrice*, în timp ce *sarcini electrice în mișcare* sînt sursa *cîmpurilor magnetice*. De exemplu, în argumentele despre media cîmpului microscopic, cheia la problemă în cazul electric este presupunerea că rot $\mathbf{E} = 0$ pentru cîmpul electric microscopic. În cazul magnetic, cheia este presupunerea că div $\mathbf{B} = 0$ pentru cîmpul magnetic microscopic.

Dacă magnetizarea M din volumul unui material nu este uniformă dar variază cu poziția ca $\mathbf{M}(x, y, z)$, distribuția echivalentă de curent este dată simplu de

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M}. \tag{42}$$

Să vedem cum rezultă aceasta într-un caz dat. Să presupunem că există o magnetizare în direcția z, care devine mai puternică cînd înaintăm în direcția y. Aceasta este reprezentată în figura 10.20, *a*, care arată o mică regiune din material subîmpărțită în mici blocuri. Blocurile sînt presupuse atît de mici încît putem presupune magnetizarea uniformă în interiorul unui bloc. Apoi putem înlocui fiecare bloc printr-o panglică de curent, cu densitate de curent superficial $\mathcal{J} = Mz$. Curentul I purtat de o astfel de panglică, dacă blocul are înălțimea Δz, este $\mathcal{J}\Delta z$ sau $M_z\Delta z$. Acum fiecare panglică are ceva mai multă densitate de curent decît cea din stînga ei. Curentul în fiecare buclă este mai mare decît curentul din bucla din stînga prin

$$\Delta I = \Delta z \, \Delta M_z = \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta z. \tag{43}$$

La fiecare interfață din această linie de blocuri există un curent net în direcția x de mărime ΔI (fig. 10.20, *c*). Pentru a găsi curentul pe unitatea de arie curgînd în direcția x avem de înmulțit prin numărul de blocuri pe unitate de arie, care este $1/(\Delta y \cdot \Delta z)$. Astfel

$$J_x = \Delta I \left(\frac{1}{\Delta y \, \Delta z} \right) = \frac{\partial M_z}{\partial y}. \tag{44}$$

Un alt mod de a obține un curent în direcția x este de a avea o componentă y a magnetizării care variază în direcția z. Dacă urmăriți acest caz, folosind o coloană verticală de blocuri, veți găsi că densitatea de curent orientată după axa x este dată de

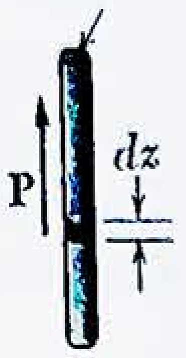
$$J_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}. \tag{45}$$

În general atunci, prin superpunerea acestor două situații,

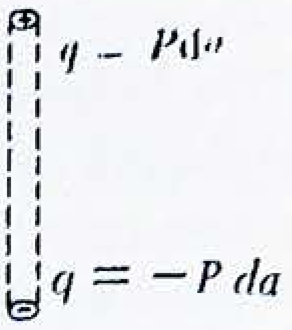
$$J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = (\text{rot } \mathbf{M})_x \tag{46}$$

care ajunge pentru a stabili ecuația 42.

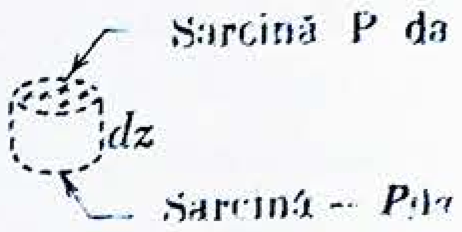
(c) Ca sursă de cîmp electric *exterior* **E**

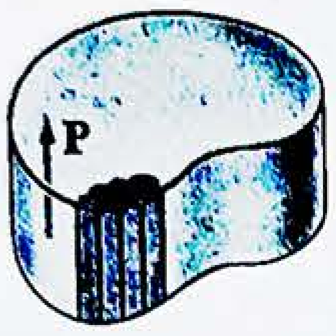


este echivalent cu

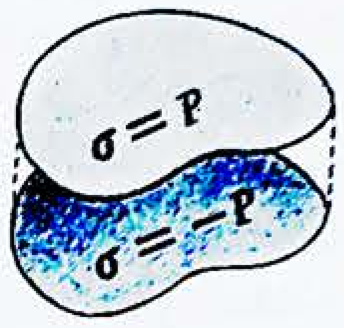


pentru că o bucată de substanță polarizată, de volum da dz, are momentul dipolar egal cu acela al:





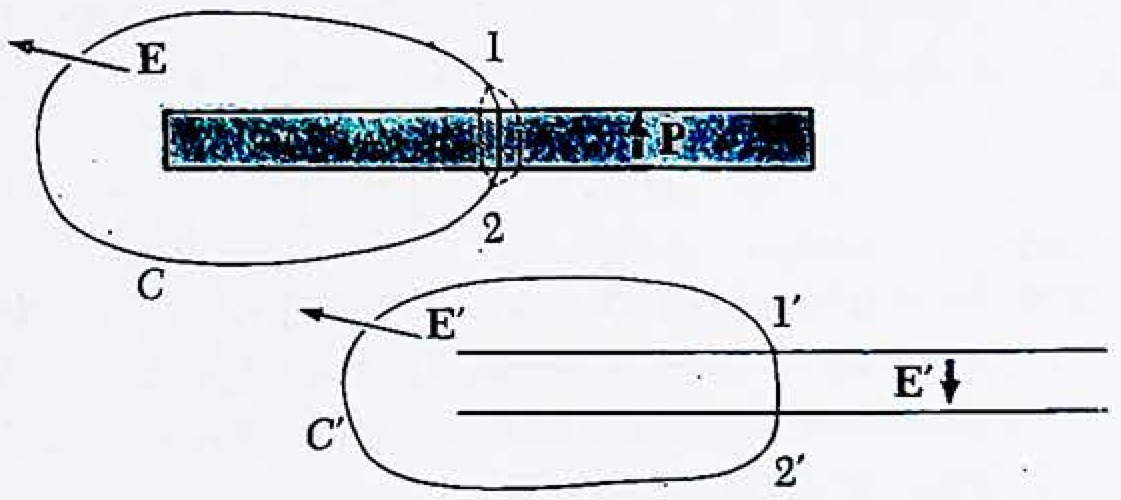
Un bloc polarizat uniform poate fi subîmpărțit în astfel de vergele. Deci blocul are același cîmp electric ca două structuri de sarcină superficială cu $\sigma = P_n$



[Mai general, pentru polarizări neuniforme, materia polarizată este echivalentă unei distribuții de sarcină $\rho = -\text{div}\,\mathbf{P}$.]

DEMONSTRAȚIE CĂ ECHIVALENȚA SE EXTINDE LA M

Să considerăm o placă subțire, largă, polarizată uniform și straturile echivalente de sarcină superficială. În vecinătatea mijlocului, cîmpul exterior este slab și E'

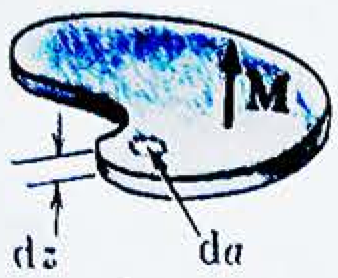


este uniform. Dacă $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ pentru cîmpul intern, atunci $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Dar $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ pe drumul exterior.

De aici $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{1'}^{2'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}'$ pentru toate drumurile interne.

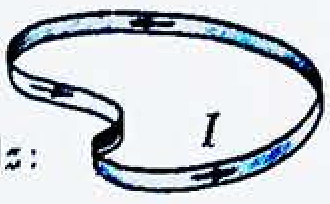
Concluzie: $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}'$; media spațială a cîmpului electric intern este egală cu cîmpul **E'** care ar fi produs în acel punct în spațiul gol de către distribuția de sarcină echivalentă descrisă mai sus (împreună cu orice surse externe).

(*b*) Ca sursă de cîmp magnetic *exterior* **B**



este echivalent cu

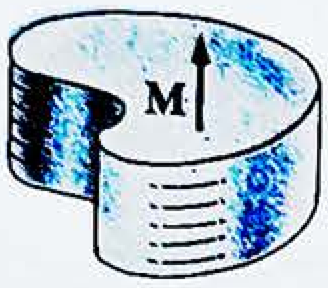
$I = M\,dz$:



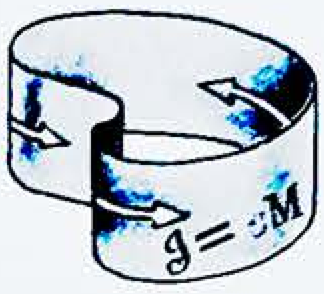
deoarece o bucată de substanță magnetizată,
de volum da dz, are momentul dipolar egal cu acela al:



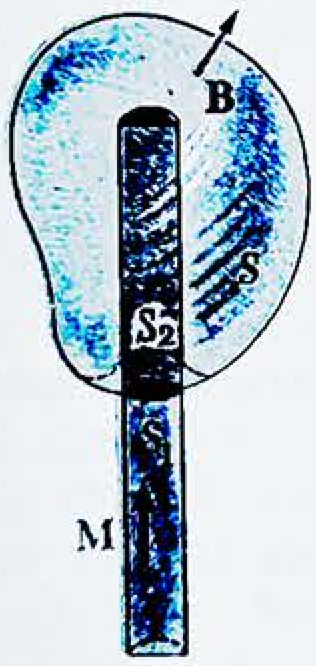
Curent $M dz$:



Un bloc magnetizat uniform poate fi împărțit în astfel de straturi. Deci blocul are același cîmp exterior ca panglica lată de curent superficial cu **J** = **M**.
Mai general, pentru magnetizare neuniformă, materia magnetizată este echivalentă unei distribuții de curent **J** = rot **M**.



MEDIA SPAȚIALĂ A CÎMPURILOR INTERNE



Să considerăm o coloană lungă uniform magnetizată și cilindrul echivalent de curent superficial. În vecinătatea mijlocului cîmpul exterior este slab și **B′** este uniform. Dacă $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pentru cîmpul interior, atunci $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$.

Dar **B** = **B′** pe suprafața exterioară coloanei. De aici $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'_1} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ pe orice porțiune interioară de suprafață ca S_1, S_2 etc.

Concluzie: $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}'$; media spațială a cîmpului magnetic interior este egală cîmpului **B′** care ar fi produs în acel punct în spațiul vid de către distribuția de curent echivalentă descrisă mai sus (împreună cu orice surse externe).

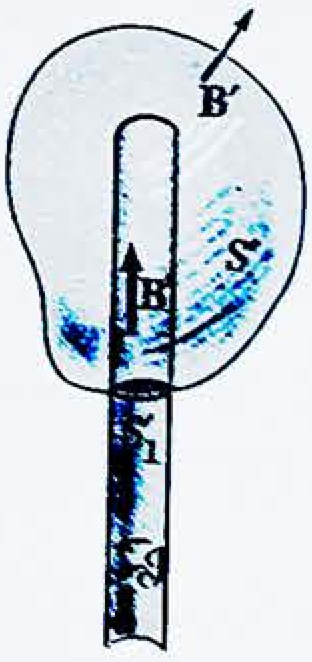


Fig. 10.19. Cazurile electric (*a*) și magnetic (*b*) comparate.

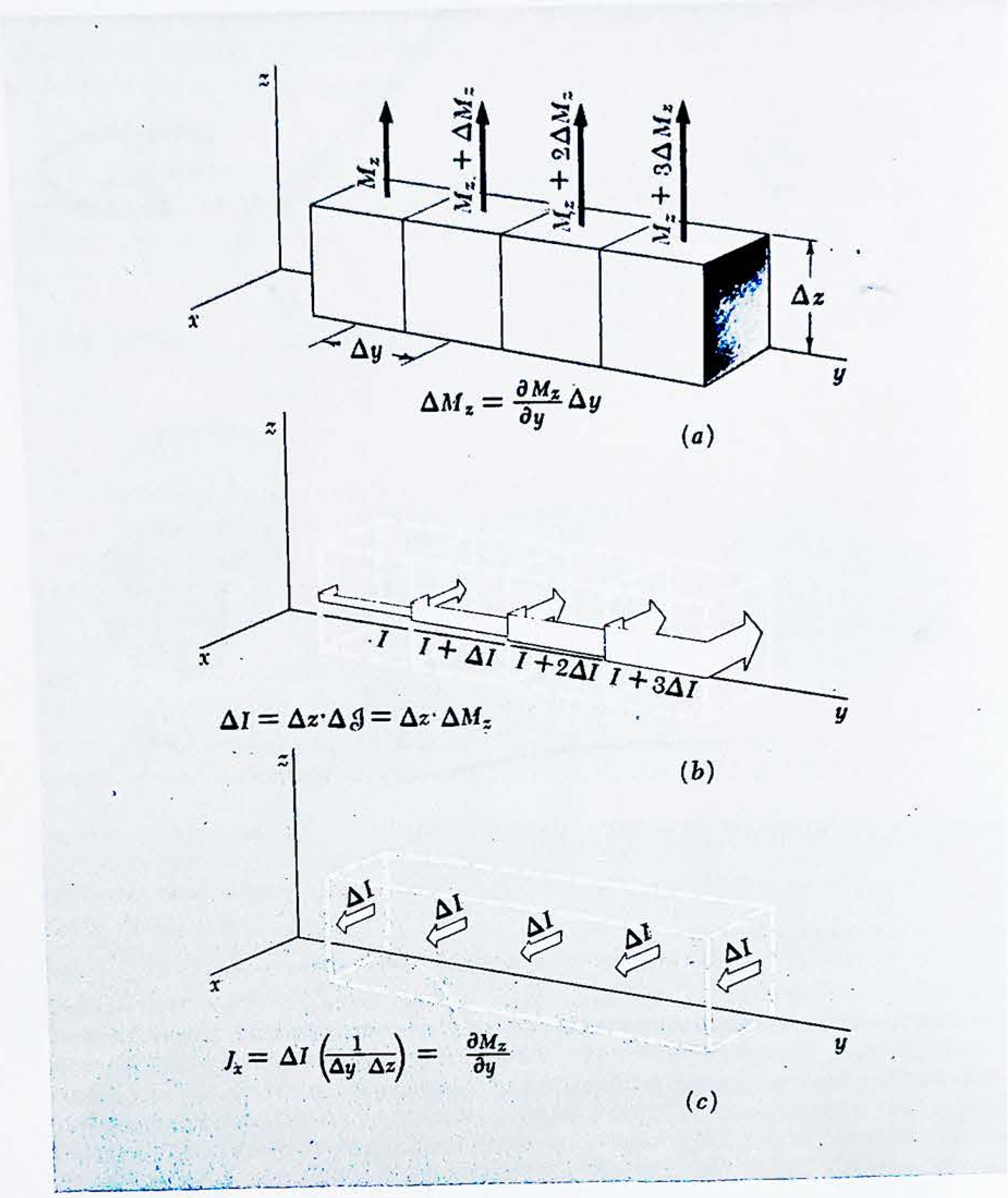


Fig. 10.20. Magnetizarea neuniformă este echivalentă unei densități de curent de volum.

10.9. CÎMPUL UNUI MAGNET PERMANENT

Sferele și barele uniform polarizate despre care am vorbit în capitolul 9 sînt rareori văzute, chiar în laborator. O polarizare electrică intrinsecă poate apare în unele substanțe, deși ea este uzual mascată prin acumulare de

sarcină liberă. Pentru a face figura 10.3, *a*, care arată cum *ar* arăta cîmpul unei bare polarizate, a fost necesar să folosim două discuri încărcate. De altă parte, materiale cu polarizare magnetică permanentă, adică, *magnetizare* permanentă, sînt familiare şi folositoare. Magneţi permanenţi pot fi făcuţi din multe aliaje şi compuşi ai substanţelor feromagnetice. Ce face ca aceasta să fie posibil este o întrebare pe care o vom lăsa pentru § 10.11, unde intrăm pe scurt în fizica feromagnetismului. În această secţiune, luînd existenţa magneţilor permanenţi ca atare, vrem să studiem cîmpul magnetic **B** al unei bare cilindrice uniform magnetizate, şi să îl comparăm atent cu cîmpul electric **E** al unei bare polarizate uniforme de aceeaşi formă.

Figura 10.21 arată fiecare dintre aceşti cilindri plini în secţiune. Polarizarea, în fiecare caz, este paralelă cu axa, şi este uniformă, adică, polarizarea **P** şi magnetizarea **M** au aceeaşi mărime şi direcţie peste tot în interiorul cilindrilor respectivi. În cazul magnetic aceasta implică faptul că fiecare milimetru cub al magnetului permanent are acelaşi număr de spini electronici aliniaţi, orientaţi în aceeaşi direcţie. (O foarte bună aproximaţie la aceasta se poate realiza cu materialele permanent magnetice moderne.)

Prin cîmpul în interiorul cilindrului înţelegem, desigur, cîmpul macroscopic definit drept media spaţială a cîmpului microscopic. În acest înţeles, arătăm în figura 10.21 liniile de cîmp atît în interior cît şi în exteriorul barelor. În treacăt, aceste bare nu sînt presupuse apropiate; alăturăm diagramele pentru convenienţa comparării. Fiecare bară este izolată într-un spaţiu altfel fără cîmp. (Care credeţi că ar perturba mai mult cîmpul celeilalte, dacă ar fi fost apropiate una de alta?)

În afara barelor cîmpurile **E** şi **B** *arată asemănător*. De fapt liniile de cîmp urmează exact acelaşi curs. Aceasta nu trebuie să vă surprindă dacă vă reamintiţi că dipolii electrici şi dipolii magnetici au cîmpuri „la depărtare“ asemănătoare. Fiecare

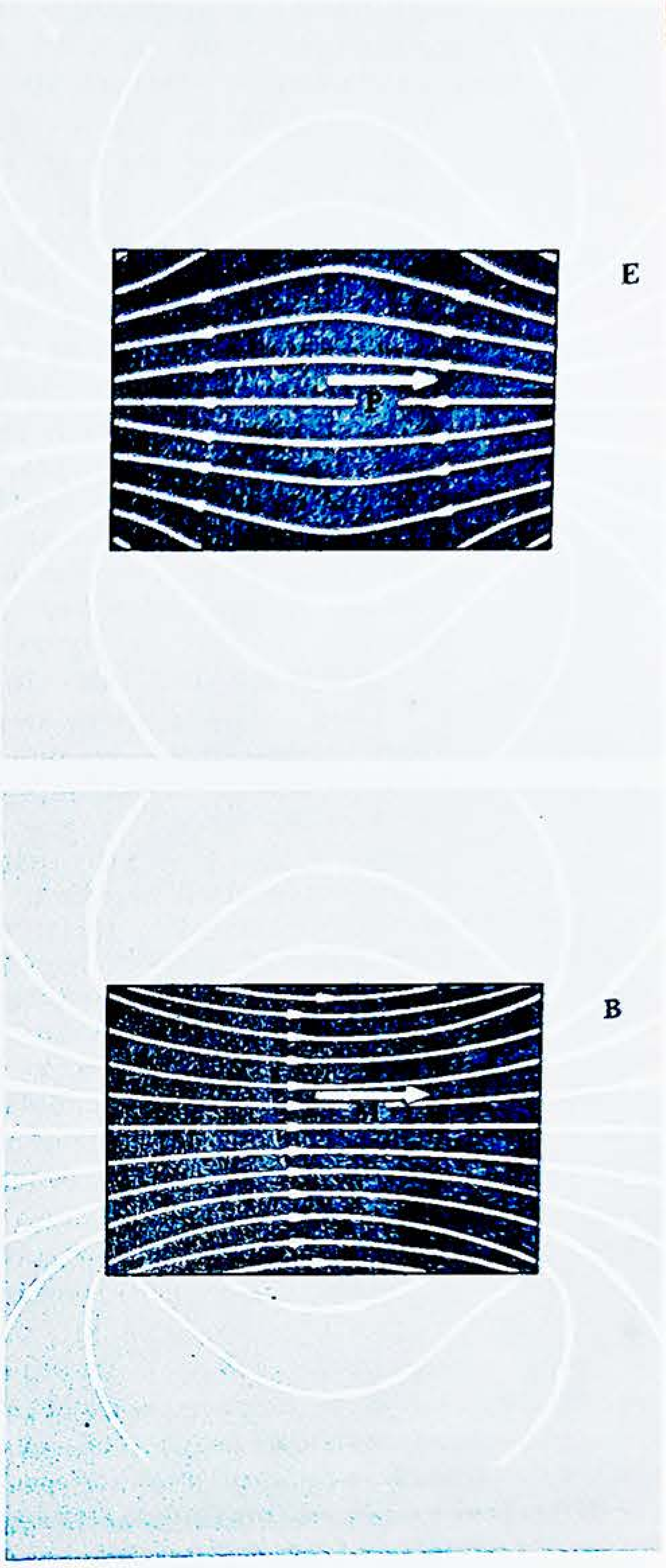


Fig. 10.21. *(a)* Intensitatea cîmpului electric **E** în afară şi înăuntrul unui cilindru uniform polarizat.
(b) Inducţia magnetică **B** în afara şi înăuntrul unui cilindru uniform magnetizat. În fiecare caz, cîmpul interior arătat este *cîmpul macroscopic*, adică, *media* locală a cîmpului *microscopic* sau atomic.

mică bucată a magnetului este un dipol magnetic, și fiecare mică bucată a barei polarizate (numită cîteodată „electret") este un dipol electric, iar cîmpul exterior este superpoziția tuturor cîmpurilor la depărtare.

Cîmpul **B**, în interior și exterior, este identic cu acela al unui strat cilindric de curent. De fapt dacă am înfășura foarte uniform, pe un cilindru de carton, un solenoid cu un singur strat din sîrmă subțire, am putea să-i legăm o baterie și să reproducem cîmpul exterior și interior **B** al magnetului permanent. (Bobina s-ar încălzi iar bateria s-ar consuma; spinii electronici furnizează curentul liber și fără frecare!) Cîmpul electric **E**, atît în interiorul cît și în exteriorul barei polarizate, este acela a două discuri de sarcină, unul la fiecare capăt al cilindrului.

Observați că cîmpurile *interioare* **E** și **B** sînt esențial diferite în formă: **B** este orientat spre dreapta, este continuu la capetele cilindrului, și suferă o schimbare bruscă de direcție la suprafața cilindrului. **E** este orientat spre stînga, trece prin suprafața cilindrului ca și cînd nu ar fi acolo, dar este discontinuu la suprafețele de capăt. Aceste diferențe provin din diferența esențială dintre „interiorul" dipolului electric fizic, și „interiorul" dipolului magnetic, văzute în figura 10.8. Prin *fizice*, înțelegem acele deosebiri pe care Natura ni le-a lăsat în realitate.

Dacă cîmpul exterior ar fi fost singura noastră preocupare, am fi putut folosi fiecare dintre imagini pentru a descrie cîmpul unui magnet. Am fi putut spune că cîmpul magnetic al magnetului permanent provine de la un strat de sarcină magnetică pozitivă — o densitate superficială de poli magnetici „nord" — pe capătul de dreapta al magnetului, și un strat de sarcină magnetică negativă, poli „sud" pe celălalt capăt. Am putea lua o funcție de potențial scalar φ_{mag}, astfel încît $\mathbf{B} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi_{mag}$. Funcția de potențial φ_{mag} ar fi legată de densitatea de poli fictivi cum este legat potențialul electric de densitatea de sarcină. Simplitatea potențialului scalar în comparație cu potențialul vector este destul de atrăgătoare. Mai mult, potențialul scalar magnetic poate fi legat într-un mod foarte simplu de curenții care sînt sursa reală a lui **B**, și astfel se poate folosi potențialul scalar fără nici o utilizare explicită a polilor fictivi. Poate veți folosi această tehnică dacă veți avea vreodată de proiectat magneți sau de calculat cîmpuri magnetice.

Trebuie să abandonăm ficțiunea polilor magnetici, totuși, dacă vrem să înțelegem cîmpul în interiorul materialului magnetizat. Faptul că cîmpul magnetic macroscopic în interiorul unui magnet permanent este, într-un sens foarte real, ca și cîmpul din figura 10.21, *b* și nu ca în figura 10.21, *a* a fost demonstrat experimental prin deflexia particulelor încărcate energetice în fier magnetizat, ca și prin efectele magnetice asupra neutronilor lenți, care trec încă mai ușor prin interiorul materiei.

Figura 10.22, *a* arată un magnet permanent în forma unui mic disc, în care magnetizarea este paralelă cu axa de simetrie. Dumneavoastră sînteți probabil mai familiarizați cu magneți permanenți în formă de bare lungi. Totuși, magneți în formă de disc de intensitate considerabilă pot fi făcuți cu anumite materiale noi. Dimensiunile în acest exemplu au fost alese aceleași ca și dimensiunile discului polarizat electric din figura 9.21. Magnetizarea M este dată ca $1{,}5 \cdot 10^5$ în unități SI. Momentul magnetic al electronului este $0{,}93 \cdot 10^{-23}$ joule/tesla, astfel încît această valoare a lui M corespunde la $1{,}6 \cdot 10^{22}$ spini electroni aliniați, pe centimetru cub.

Discul este echivalent cu o bandă de curent în jurul său, de densitate superficială $\mathcal{J} = M$. Grosimea discului fiind 0,3 cm, curentul I se ridică la

$$3 \cdot 10^{-3} M = (3 \cdot 10^{-3}) (1{,}5 \cdot 10^{5})$$

sau 450 amperi — chiar mai mult curent decît ați obține prin scurtcircuitarea unei baterii de automobil! Cîmpul **B** în orice punct din spațiu, incluzînd punctele din interiorul discului, este simplu cîmpul acestei bande de curent. De exemplu, în vecinătatea centrului discului, **B** este aproximativ:

$$B = \frac{I}{2\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{3 \cdot 10^{-3} M}{2\varepsilon_0 c^2 r} =$$

$$= \frac{2\pi(10^{-7}) (3 \cdot 10^{-3}) (1{,}5 \cdot 10^{5})}{10^{-2}} =$$

$$= 2{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ tesla.} \qquad (47)$$

Această aproximație constă în a trata banda de curent de lărgime 0,3 cm ca și cînd ar fi fost concentrată într-un simplu inel. (În aproximația corespunzătoare pentru exemplul electric am tratat straturile de sarcină echivalente drept mari în comparație cu separarea dintre ele.) Cît privește cîmpul într-un punct depărtat, ar fi ușor să-l calculăm pentru inelul de curent, dar am putea proceda de asemenea, într-un calcul aproximativ, cum am făcut în exemplul electric. Adică am putea găsi momentul magnetic total al obiectului, și găsi cîmpul la depărtare al unui dipol individual de acea intensitate.

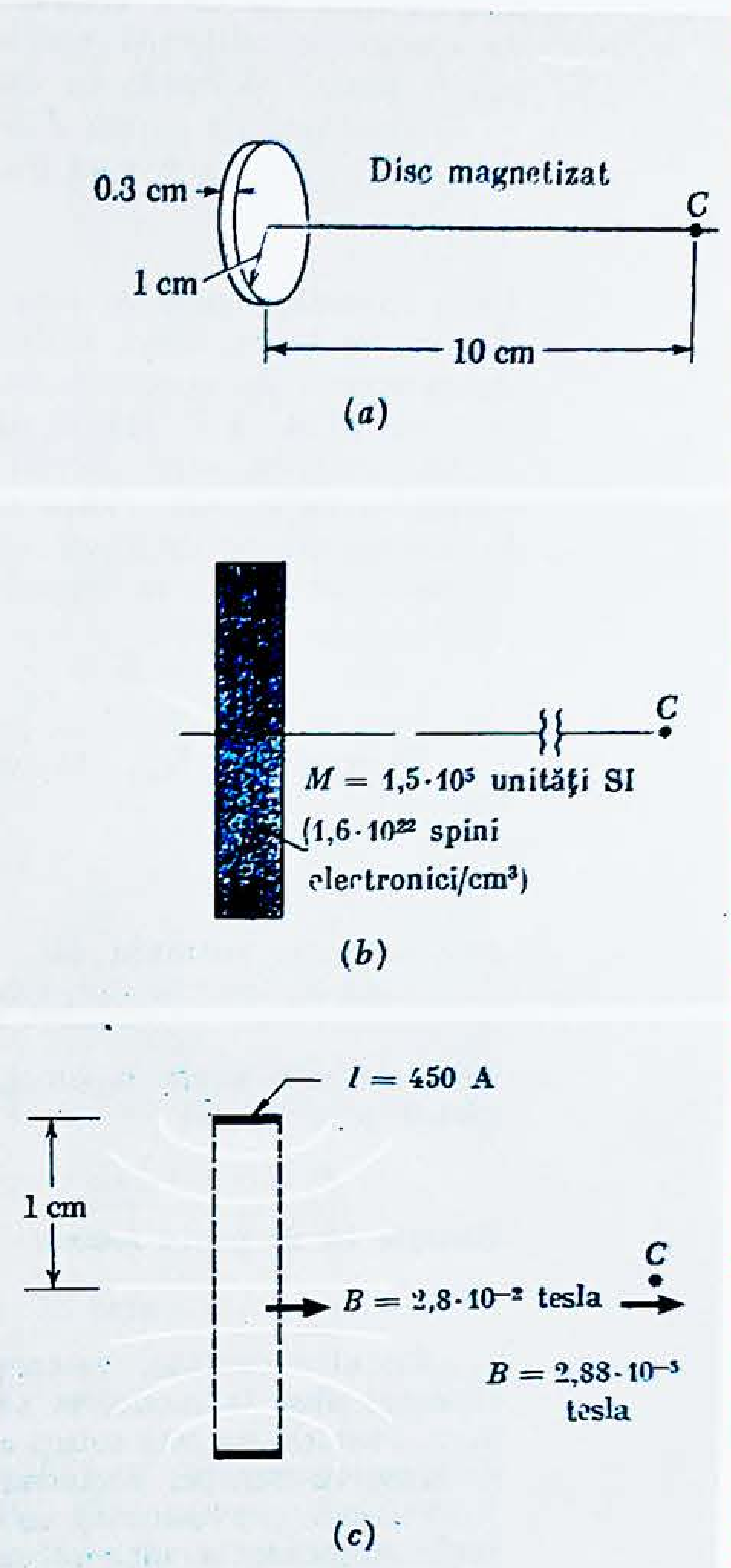


Fig. 10.22. *(a)* Un disc magnetizat uniform paralel cu axa sa. *(b)* Vedere în secțiune a discului. *(c)* Curentul echivalent este o bandă de curent de 450 amperi, în jurul marginii discului. Inducția magnetică **B** este aceeași cu cîmpul magnetic al unui solenoid foarte scurt, sau aproximativ acela al unui inel de curent de rază 1 cm.

10.10. CURENȚII LIBERI ȘI CÎMPUL H

Este adesea folositor să distingem între curenții *legați* și curenții *liberi*. Curenții *legați* sînt curenții asociați cu momentele magnetice atomice sau moleculare, incluzînd momentul magnetic intrinsec al particulelor cu spin. Acestea sînt buclele de curent molecular întrevăzute de Ampère, sursa

magnetizării pe care tocmai am considerat-o. Curenţii *liberi* sînt curenţi de conducţie obişnuiţi curgînd pe traiectorii macroscopice — curenţi care pot fi porniţi şi opriţi cu un comutator şi măsuraţi cu un ampermetru.

Densitatea de curent $\mathbf{J}$ în ecuaţia 42 este media macroscopică a curenţilor legaţi, aşa că o vom numi de aici înainte $\mathbf{J}_{legat}$:

$$\mathbf{J}_{legat} = \text{rot } \mathbf{M} \tag{48}$$

La o suprafaţă unde $\mathbf{M}$ este discontinuu, ca marginea blocului magnetizat din figura 10.17, avem o densitate de curent superficial $\mathcal{J}$ care reprezintă de asemenea un curent legat.

Am găsit că $\mathbf{B}$, atît în afara materiei cît şi, ca medie spaţială, în interiorul materiei, este corelat cu $\mathbf{J}_{legat}$ întocmai ca şi cu orice densitate obişnuită de curent. Adică rot $\mathbf{B} = (1/\varepsilon_0 c^2)\, \mathbf{J}_{legat}$. Dar aceasta se petrece în absenţa curenţilor liberi. Dacă îi considerăm şi pe aceştia, cîmpul pe care îl produc se adună la cîmpul produs de către materia magnetizată şi avem

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} (\mathbf{J}_{legat} + \mathbf{J}_{liber}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J}_{total}. \tag{49}$$

Să exprimăm $\mathbf{J}_{legat}$, în funcţie de $\mathbf{M}$, prin ecuaţia 48. Atunci ecuaţia 49 devine

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J}_{liber}, \tag{50}$$

care se poate rearanja ca

$$\text{rot } (\varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_{liber}. \tag{51}$$

Dacă *definim* acum o funcţie vectorială $\mathbf{H}\,(x, y, z)$ în fiecare punct din spaţiu prin relaţia

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}. \tag{52}$$

Ecuaţia 51 se poate rescrie

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{liber}. \tag{53}$$

Cu alte cuvinte, vectorul $\mathbf{H}$, definit prin ecuaţia 52, este corelat cu curentul liber în modul în care $\mathbf{B}$ este corelat cu curentul total, *legat* plus *liber*. Paralela nu este totuşi completă, deoarece avem totdeauna div $\mathbf{B} = 0$, în timp ce funcţia vectorială $\mathbf{H}$ nu are în mod necesar divergenţa zero.

Aceasta v-a reamintit cu siguranţă de vectorul $\mathbf{D}$ pe care l-am introdus, puţin sceptici, în ultimul capitol. $\mathbf{D}$, vă amintiţi, era corelat cu sarcina liberă aşa cum $\mathbf{E}$ era corelat cu sarcina totală. Deşi noi am discreditat întrucîtva vectorul $\mathbf{D}$, vectorul $\mathbf{H}$ este în realitate folositor, dintr-un motiv practic pe care merită să îl înţelegem. În sisteme electrice, ceea ce putem controla şi măsura uşor sînt diferenţele de potenţial ale corpurilor, şi nu cantităţile de sarcină liberă de pe ele. Astfel controlăm cîmpul $\mathbf{E}$ în mod direct. $\mathbf{D}$ este în afara controlului nostru direct, şi deoarece nu este o cantitate fundamentală în nici într-un sens, ceea ce se întîmplă cu el nu este de mare interes. În sisteme magnetice, totuşi, sînt tocmai curenţii liberi pe care îi putem controla cel mai uşor. Îi conducem prin fire, îi măsurăm cu ampermetre, îi dirijăm pe căi bine definite prin izolare, şi aşa mai departe. Avem mult mai puţin control direct, de regulă, asupra magnetizării, şi deci asupra lui $\mathbf{B}$. Astfel că vectorul auxiliar $\mathbf{H}$ *este* folositor, chiar dacă $\mathbf{D}$ nu este.

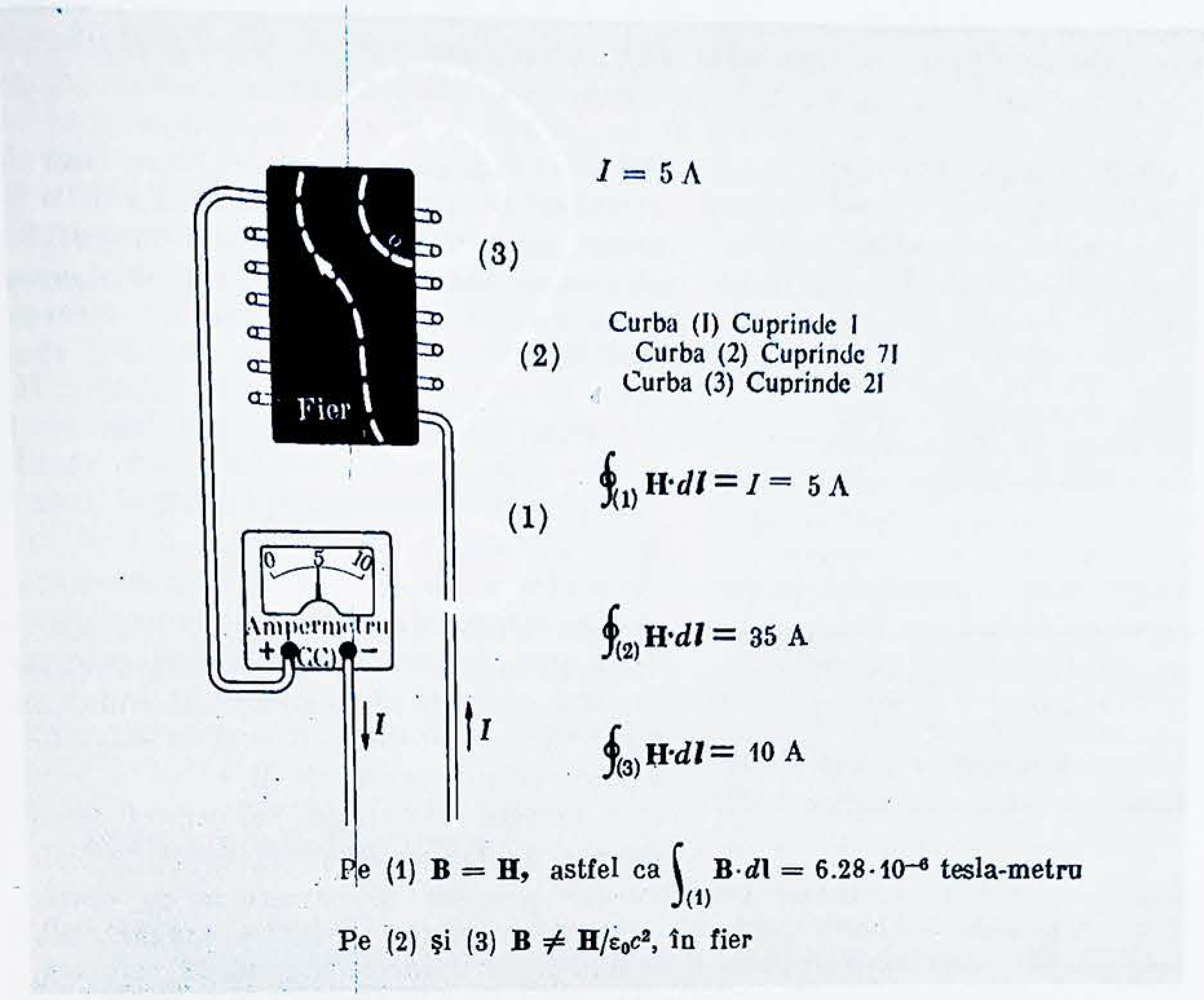


Fig. 10.23. Ilustrarea relaţiei între curentul liber şi integrala curbilinie a lui **H**.

Relaţia integrală echivalentă cu ecuaţia 53 este

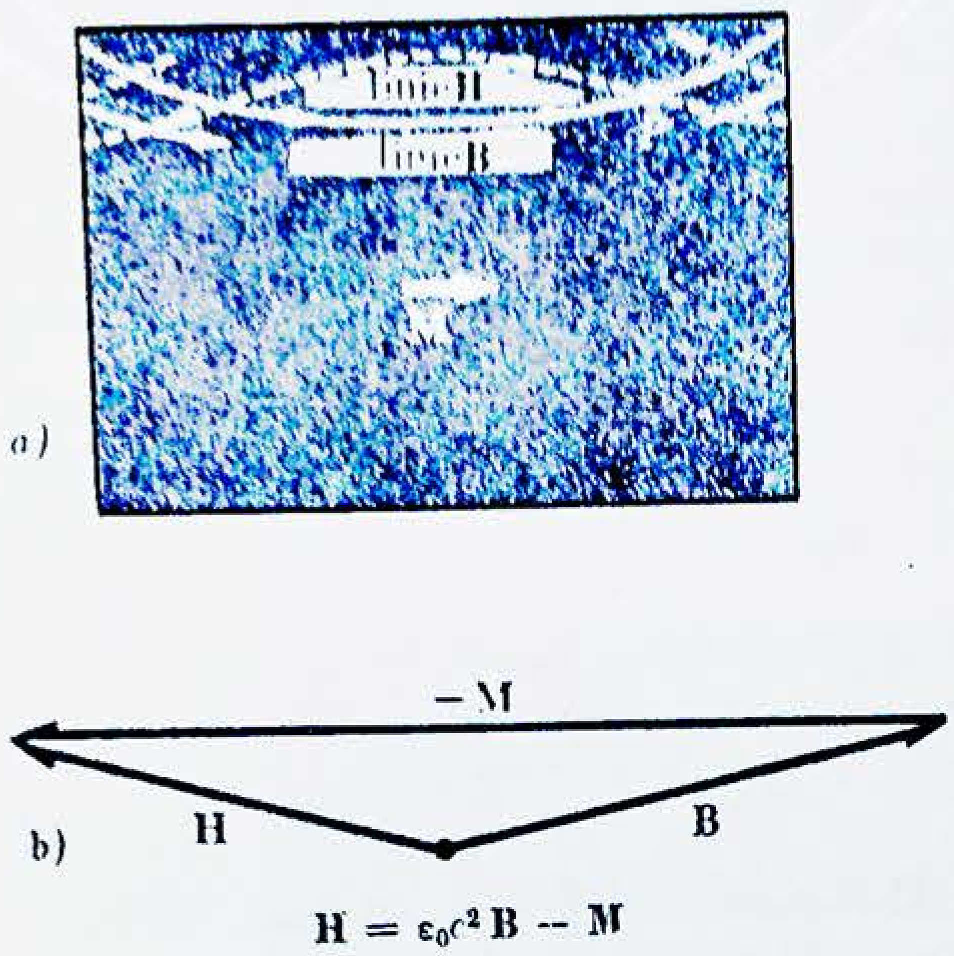
$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \mathbf{J}_{liber} \cdot \mathbf{da} = I_{\text{liber}} \tag{54}$$

unde I_{liber} este curentul total cuprins de curba C. Să presupunem că înfăşurăm o bobină în jurul unei bucăţi de fier şi trimitem prin această bobină un anumit curent I pe care îl putem măsura prin conectarea unui ampermetru în serie cu bobina. Acesta este curentul liber, şi este singurul curent liber în sistem. De aceea un lucru pe care îl ştim sigur este integrala curbilinie a lui **H** în jurul oricărei curbe închise, indiferent dacă curba trece prin fire sau nu. Integrala depinde doar de numărul de spire al bobinei noastre care sînt cuprinse de curbă, şi nu de magnetizarea în fier. Determinarea lui **M** şi **B** în acest sistem poate fi destul de complicată. Este de ajutor de a fi identificat o cantitate pe care o putem determina cu totul direct.

Figura 10.23 ilustrează această proprietate a lui **H** printr-un exemplu, şi ne reaminteşte unităţile pe care le folosim într-un caz practic. H are dimensiunea amper/metru, iar unitatea de intensitate a cîmpului magnetic B este numită tesla.

Considerăm **B** drept vectorul fundamental de cîmp magnetic deoarece absenţa sarcinii magnetice, pe care am discutat-o în § 10.2, implică

Fig. 10.24. *(a)* Relația lui B, H și M într-un punct în interiorul cilindrului magnetizat din figura 10.21 *(b)*. Relația vectorilor în punctul *P*.



div **B** = 0 peste tot, chiar în interiorul atomilor și moleculelor. Din div **B** = 0 urmează, după cum am arătat în § 10.8, că cîmpul macroscopic în interiorul materiei este **B**, nu **H**. Implicațiile acestui fapt nu au fost totdeauna înțelese sau luate în seamă în trecut. Mai departe, **H** are avantajul practic pe care l-am explicat deja. În unele cărți mai vechi veți găsi **H** introdus drept cîmpul magnetic primar. **B** este atunci definit ca $(1/\varepsilon_0 c^2)(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, și i se dă numele *inducția magnetică*. Chiar unii autori moderni care tratează **B** drept cîmpul primar se simt obligați să îl numească inducție magnetică deoarece numele *cîmp magnetic* a fost reținut istoric de **H**.*

Aceasta pare stîngaci și pedant. Dacă mergeți în laborator și întrebați un fizician, ce produce curbarea traiectoriilor pionilor în camera sa cu ceață, el va răspunde probabil „cîmpul magnetic" și nu „inducția magnetică". Veți auzi arareori un geofizician referindu-se la inducția magnetică terestră, ori un astronom vorbind despre inducția magnetică în Galaxie. Noi propunem să continuăm să numim **B** cîmp magnetic. Cît privește **H**, deși au fost inventate alte nume pentru el, noi îl vom numi „cîmpul **H**" sau „cîmpul magnetic **H**".

Am nota de asemenea că definiția acceptată a susceptibilității magnetice de volum χ_m nu este cea logic preferabilă din ecuația 39, dar

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \tag{55}$$

Magnetul permanent din figura 10.21, *b* este un exemplu instructiv al relației dintre **H**, **B** și **M**. Pentru a obține **H** într-un punct oarecare în interiorul materialului magnetizat, avem de adunat vectorial la cîmpul $\varepsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ din acel punct vectorul — **M**. Figura 10.24 reprezintă aceasta pentru un punct particular *P*. Apare că liniile lui **H** în interiorul magnetului arată întocmai ca liniile lui **E** în interiorul cilindrului polarizat din figura 10.21, *a*. Aceasta este așa cum trebuie, deoarece dacă polii magnetici ar fi fost în realitate sursa magnetizării, și nu curenții electrici, cîmpul magnetic macroscopic în interiorul materialului ar fi **H**, și nu **B**, și similitudinea polarizării magnetice față de polarizarea electrică ar fi completă.

În magnetul permanent nu există nici un fel de curenți liberi. În consecință, integrala curbilinie a lui **H**, după ecuația 54, trebuie să fie zero

---

* Acesta este un comentariu referitor la terminologia folosită în literatura științifică americană. În prezenta lucrare s-au folosit denumirile acceptate de stasurile românești legale. (N. red.)

pe orice curbă închisă. Puteți vedea ce va fi dacă liniile lui **H** arată în realitate ca liniile lui **E** din figura 10.21, *a*, deoarece știm că integrala curbilinie a acelui cîmp electrostatic este zero pe orice curbă închisă. În acest exemplu al magnetului permanent, ecuația 55 nu se aplică. Vectorul de magnetizare nu este proporțional cu **H** dar este determinat, în schimb, de tratamentul anterior al materialului. Cum se poate întîmpla aceasta se va explica în secțiunea următoare.

Pentru orice material în care **M** este proporțional cu **H**, astfel încît ecuația 55 are loc ca și relația de bază, ecuația 52, avem:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = (1 + \chi_m)\mu_0\mathbf{H} \tag{56}$$

unde am notat $1/\varepsilon_0 c^2 = \mu_0$. **B** este atunci proporțional cu **H**. Factorul de proporționalitate, $(1 + \chi_m)\mu_0$, este numit *permeabilitate magnetică*, și notat în mod obișnuit prin μ:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{57}$$

Constanta μ_0 este numită permeabilitatea magnetică a spațiului vid. Permeabilitatea μ, și nu susceptibilitatea χ_m, este folosită în mod obișnuit la descrierea feromagnetismului.

10.11. FEROMAGNETISMUL

Feromagnetismul a servit și nedumerit omul multă vreme. Magnetitul era cunoscut în antichitate, iar influența asupra istoriei a fierului în forma acelor de busolă a fost probabil doar în urma fierului în forma de săbii. Pentru aproape un secol tehnologia noastră electrică a depins mult de faptul că un metal abundent se întîmplă să aibă această proprietate particulară. Totuși, doar în anii recenți s-a obținut o înțelegere fundamentală a feromagnetismului.

Am descris deja unele proprietăți ale feromagnetismului. Într-un cîmp magnetic foarte puternic forța asupra unei substanțe feromagnetice este într-o astfel de direcție încît să o împingă în cîmpul mai puternic, ca pentru substanțele paramagnetice, dar în loc de a fi proporțională cu cîmpul **B** și gradientului său, forța este proporțională doar cu gradientul. După cum am remarcat la sfîrșitul § 10.4, aceasta sugerează că dacă cîmpul este destul de puternic, momentul magnetic primit de magnet atinge o anumită valoare limită. Direcția vectorului moment magnetic trebuie încă să fie controlată de cîmp, deoarece altfel forța nu ar acționa totdeauna în direcția intensității de cîmp crescătoare.

În magneți „permanenți" observăm un moment magnetic chiar în absența oricărui cîmp extern aplicat, care își menține mărimea și direcția chiar cînd sînt aplicate cîmpuri exterioare, dacă acestea nu sînt prea puternice. Cîmpul magnetului permanent este desigur totdeauna prezent, și v-ați putea mira dacă nu și-ar putea păstra propriile surse aliniate. Totuși, dacă priviți din nou la figura 10.21, *b* sau figura 10.24, acceptînd asigurarea că acestea reprezintă un magnet real, veți observa că **M** nu este în general paralel nici cu **B** nici cu **H**. Aceasta sugerează că dipolii magnetici trebuie să fie ținuți pe direcție prin altceva decît forțe pur magnetice.

Magnetizarea observată în materiale feromagnetice este mult mai mare decît aceea cu care sîntem obişnuiţi în substanţe paramagnetice. Magneţi permanenţi cu totul obişnuiţi au cîmpuri în domeniul miimilor de tesla. O mărime mai caracteristică este valoarea limită a magnetizării, momentul magnetic pe unitate de volum, pe care îl primeşte materialul într-un cîmp foarte puternic. Aceasta este numită magnetizarea de *saturaţie*. Putem afla magnetizarea de saturare a fierului din datele din tabelă (§ 10.1). Într-un cîmp cu un gradient de 17 tesla/metru, forţa gradient a 1 gram de fier era 4 newton. Din ecuaţia 18, care leagă forţa asupra unui dipol de gradientul de cîmp, găsim

$$m = \frac{F}{(\mathrm{d}B/\mathrm{d}z)} = \frac{4 \text{ newton}}{17 \text{ tesla/metru}} = 0{,}235 \text{ joule/tesla} \quad \text{(pentru 1 gram)}. \tag{58}$$

Pentru a găsi momentul pe centimetru cub înmulţim prin densitatea fierului, 7,8 g/cm³. Magnetizarea M este astfel

$$M = 0{,}235 \times 7{,}8 = 1{,}83 \text{ joule/tesla-cm}^3. \tag{59}$$

Este $(1/\varepsilon_0 c^2)M$, şi nu M, pe care trebuie să îl comparăm cu intensitatea cîmpului în tesla. De exemplu, dacă aveam o bară foarte lungă de fier care ar fi avut această cantitate de magnetizare ca magnet permanent, cîmpul H în interior ar fi foarte mic (imaginaţi-vă situaţia din figura 10.21, *b* întinsă axial) astfel încît cîmpul B în fier ar fi aproximativ egal cu $(1/\varepsilon_0 c^2)M$, sau circa 2,3 tesla.

Este mai interesant de văzut la cît de multe momente de spin electronic corespunde această magnetizare. Împărţind M prin momentul electronului dat în figura 10.14, $0{,}93 \cdot 10^{-23}$ joule/tesla, obţinem aproximativ $2 \cdot 10^{23}$ momente de spin pe centimetru cub. Acum 1 cm³ de fier conţine aproximativ 10^{23} atomi. Magnetizarea limită pare să corespundă la aproximativ doi spini alineaţi per atom. Cum cei mai mulţi dintre electronii din atom sînt grupaţi în perechi şi nu au nici un efect magnetic, aceasta indică că avem de-a face cu o aliniere practic totală a acelor cîtorva spini electronici din structura atomului care sînt liberi să se orienteze în aceeaşi direcţie.

Un fapt foarte sugestiv despre feromagneţi este acesta: o substanţă feromagnetică dată, de exemplu fier pur, pierde proprietăţile sale feromagnetice în mod brusc dacă este încălzită la o anumită temperatură. Peste 770°C, fierul pur se comportă ca o substanţă paramagnetică. Răcit sub 770°C, el îşi reia imediat proprietăţile sale feromagnetice. Această temperatură de tranziţie, numită punct Curie după Pierre Curie care a fost unul dintre primii care a investigat-o, este diferită pentru substanţe diferite. Pentru nichel pur ea este 358°C.

Ce este această „comportare feromagnetică“ care distinge atît de net fierul sub 770°C de fierul peste 770°C, şi de cupru la orice temperatură? Este alinierea *spontană* într-o direcţie a momentelor magnetice atomice, care implică alinierea axelor de spin a anumitor electroni din fiecare atom de fier. Prin *spontană* înţelegem că nici un cîmp magnetic exterior nu este nevoie să fie implicat. Pe o regiune din fier destul de mare încît să conţină milioane de atomi, spinii şi momentele magnetice ai aproape tuturor atomilor sînt orientaţi în aceeaşi direcţie. Sub punctul Curie — la temperatura camerei de exemplu, în cazul fierului — alinierea este aproape perfectă. Dacă aţi putea privi în interiorul unui cristal de fier metalic şi

vedea momentele magnetice elementare ca vectori cu săgeţi pe ele, aţi putea vedea ceva ca în figura 10.25.

Nu ne surprinde că o temperatură mai înaltă distruge această aranjare ordonată. Energia termică este inamicul ordinii, ca să spunem aşa. Un cristal, un aranjament ordonat de atomi, trece într-un lichid, un aranjament mult mai puţin ordonat, la o temperatură bine definită, punctul de topire. Punctul de topire, ca şi punctul Curie, este diferit pentru substanţe diferite. Analogia merge mai adînc, dar implică idei pe care le lăsăm mai bine pentru studiul căldurii şi fizicii statistice în ultima parte a cursului. Să ne oprim aici asupra stării ordonate. Două sau trei întrebări sînt evidente.

Intrebarea I: Ce face ca spinii să se alinieze şi îi ţine alineaţi?

Întrebarea II: Cum, dacă nu există nici un cîmp exterior, pot alege spinii o direcţie şi nu alta? De ce nu sînt toate momentele din figura 10.25 orientate în jos, sau spre dreapta, sau spre stînga?

Întrebarea III: Dacă momentele atomice sînt *alineate*, de ce nu este fiecare bucată de fier la temperatura camerei un magnet puternic?

Răspunsurile la aceste trei întrebări care ne vor ajuta să înţelegem cel puţin în general, comportarea materialelor feromagnetice cînd se aplică un cîmp exterior nici foarte puternic nici foarte slab. Aceasta include o foarte bogată varietate de fenomene pe care încă nici nu le-am descris.

Răspunsul I: Dintr-un anumit motiv corelat cu mecanica cuantică a structurii atomului de fier, este energetic favorabil pentru spinii atomilor de fier adiacenţi să fie paraleli. Aceasta *nu* se datorează interacţiei lor magnetice. Este un efect mai puternic decît acesta, şi mai mult, favorizează spini paraleli astfel ↑↑ sau astfel → → (interacţiile de dipol nu se comportă astfel — vezi Prob. 9.26). Acum dacă atomul A (fig. 10.26) vrea să-şi aibă spinul în aceeaşi direcţie ca şi aceea a vecinilor săi, atomii B, C, D şi E, şi fiecare dintre *aceia* preferă să-şi aibă spinii în aceeaşi direcţie ca şi spinii vecinilor *săi*, incluzînd atomul A, vă puteţi imediat imagina că dacă se dezvoltă cumva o majoritate locală va exista o



Fig. 10.25. Caracterul ordonat al direcţiei şi sensului spinului într-o mică regiune dintr-un cristal de fier. Fiecare săgeată reprezintă momentul magnetic al unui atom de fier.

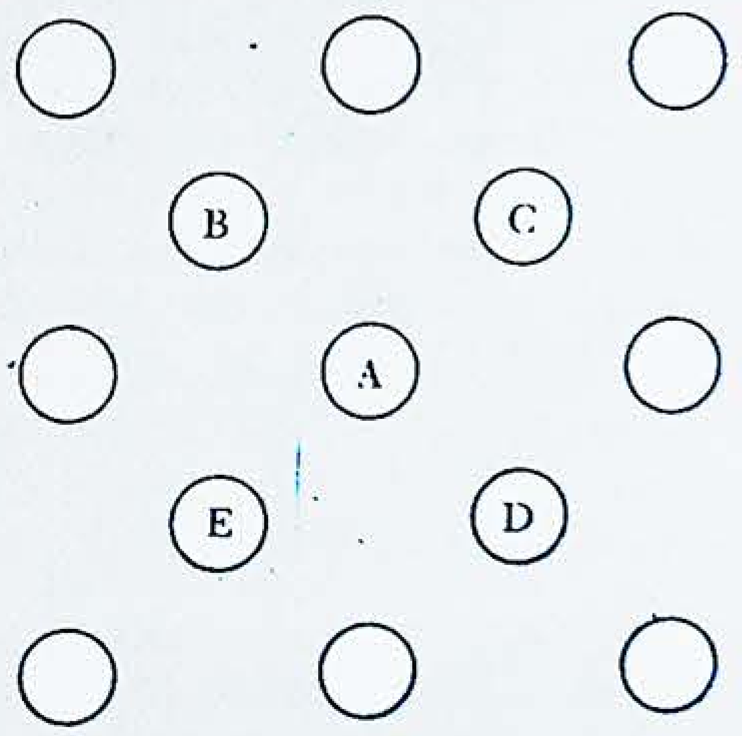


Fig. 10.26. Un atom A şi vecinii săi cei mai apropiaţi într-o reţea cristalină (desigur, reţeaua este în realitate tridimensională).

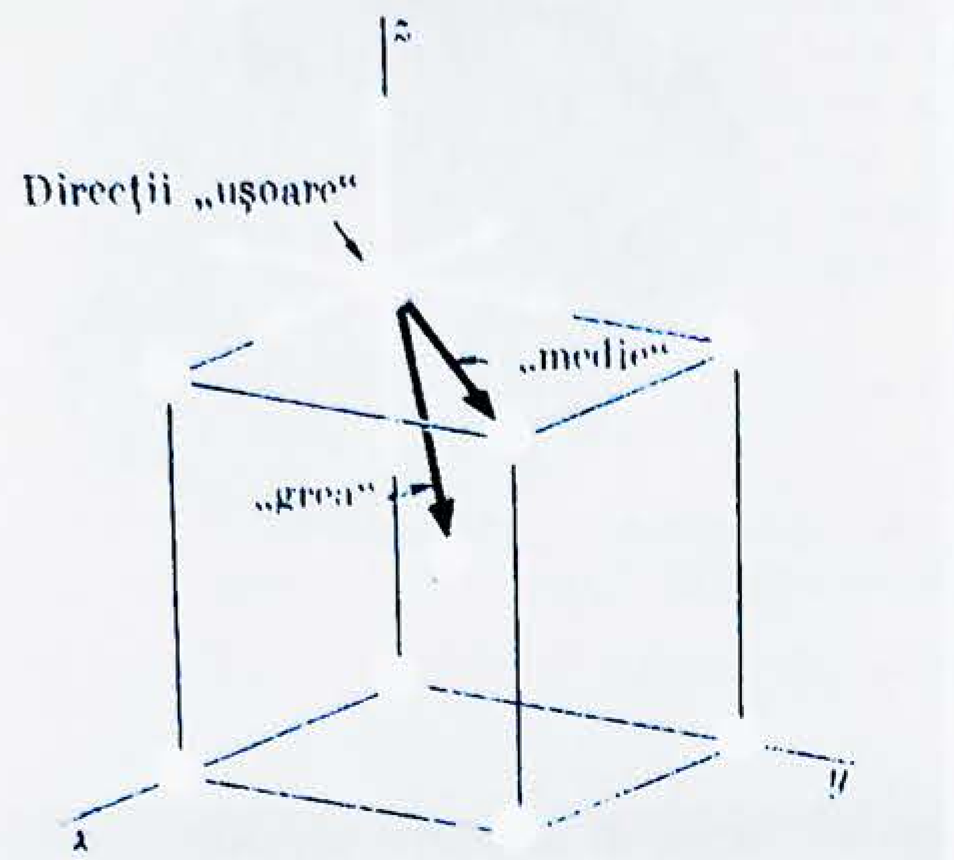


Fig. 10.27. În fier direcția preferențială de magnetizare este de-a lungul unei axe cubice a cristalului.

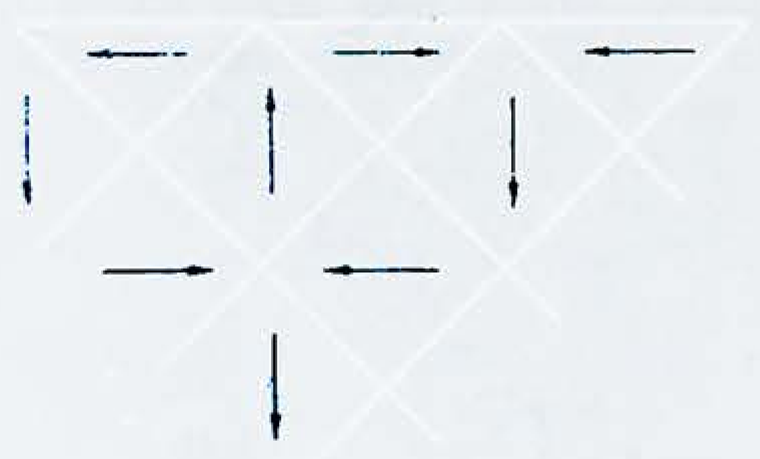


Fig. 10.28. Aranjare posibilă a domeniilor magnetice într-un cristal uniform de fier.

tendință puternică de „a o face unanimă" și atunci întîmplarea se va răspîndi.

Răspunsul II: Accidentul determină întrucîtva care dintre diversele direcții echivalente în cristal este aleasă, dacă începem dintr-o stare dezordonată — ca, de exemplu, atunci cînd fierul este răcit prin punctul său Curie fără nici un cîmp exterior aplicat. Fierul pur constă din cristale cubice cu volum centrat. Fiecare atom are opt vecini cei mai apropiați. Simetria mediului din jur se impune asupra fiecărui aspect al atomului, incluzînd cuplajul dintre spini. La fier axa cubică se întîmplă să fie axa de cea mai ușoară magnetizare. Adică, spinii preferă să fie orientați în aceeași direcție, dar preferă aceasta încă mai bine dacă acea direcție este una dintre cele șase direcții $\pm\hat{\mathbf{x}}$, $\pm\hat{\mathbf{y}}$, $\pm\hat{\mathbf{z}}$ (fig. 10.27). Aceasta este important deoarece înseamnă că spinii nu se vor roti ușor *en masse* dintr-una din direcțiile ușoare într-alta echivalentă la unghi drept. Pentru a face astfel, ei ar avea de trecut prin orientările *mai puțin* favorabile. Este tocmai acest obstacol care face magneții permanenți posibili.

Răspunsul III: O bucată aparent nemagnetizată de fier este în realitate compusă din multe *domenii*, în fiecare dintre ele spinii fiind aliniați într-un fel, dar într-o direcție diferită de aceea a spinilor din domeniile vecine. În medie pe întreaga piesă de fier „nemagnetizat", toate direcțiile sînt egal reprezentate, astfel încît nu rezultă nici un cîmp magnetic la scară largă. Domeniile magnetice apar chiar într-un monocristal. Domeniile sînt în mod obișnuit microscopice în sensul de fiecare zi al cuvîntului. De fapt ele pot fi văzute sub un microscop de putere mică. Aceasta este încă enorm, desigur, la scară atomică, astfel că un domeniu magnetic include în mod tipic miliarde de momente magnetice elementare. Figura 10.28 reprezintă o împărțire în domenii. Împărțirea provine din aceea că este de energie mai joasă decît un aranjament cu toți spinii orientați într-o direcție. Ultimul aranjament ar fi un magnet permanent cu un cîmp puternic întinzîndu-se în spațiul din jurul său.

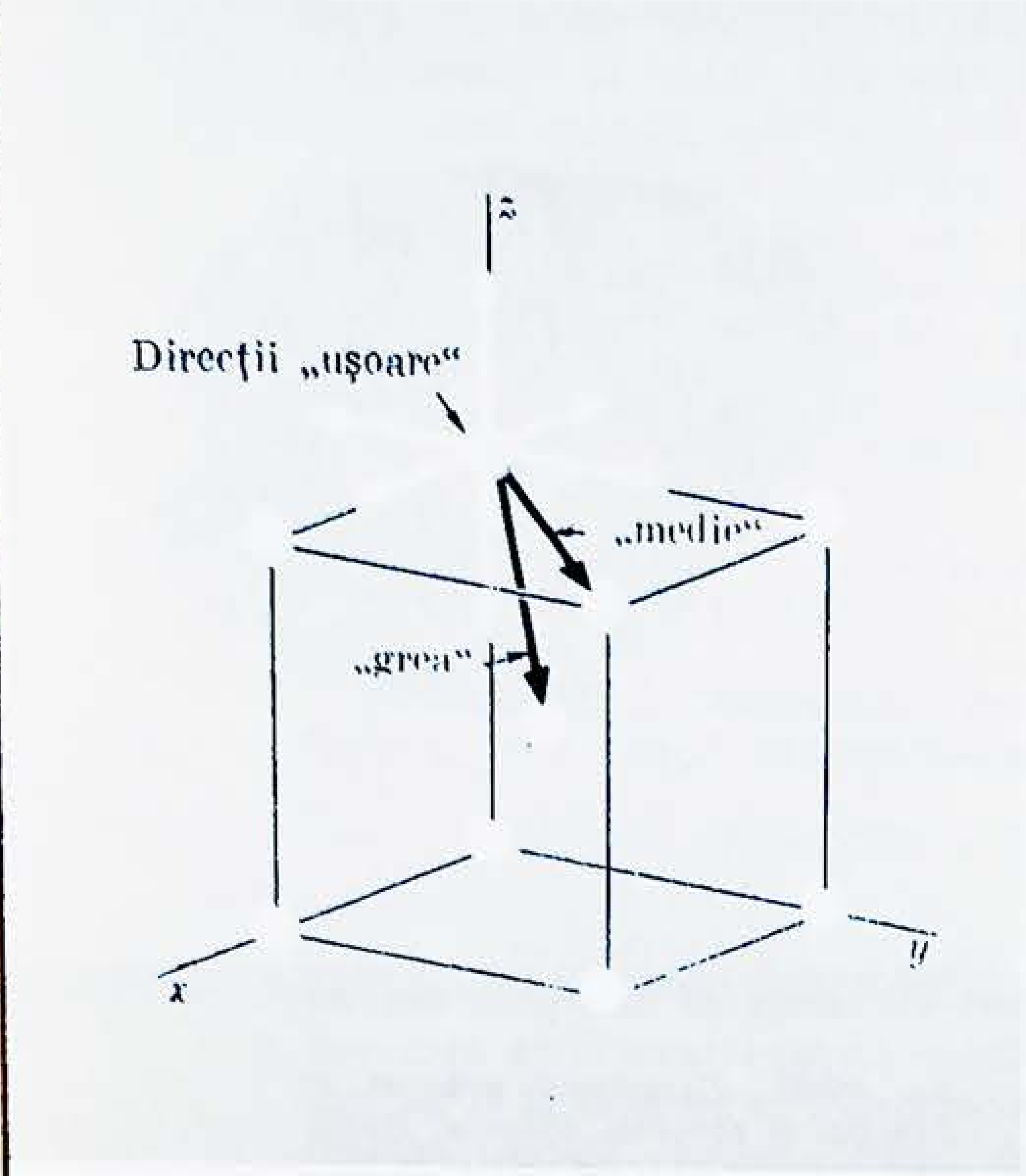


Fig. 10.27. În fier direcţia preferenţială de magnetizare este de-a lungul unei axe cubice a cristalului.

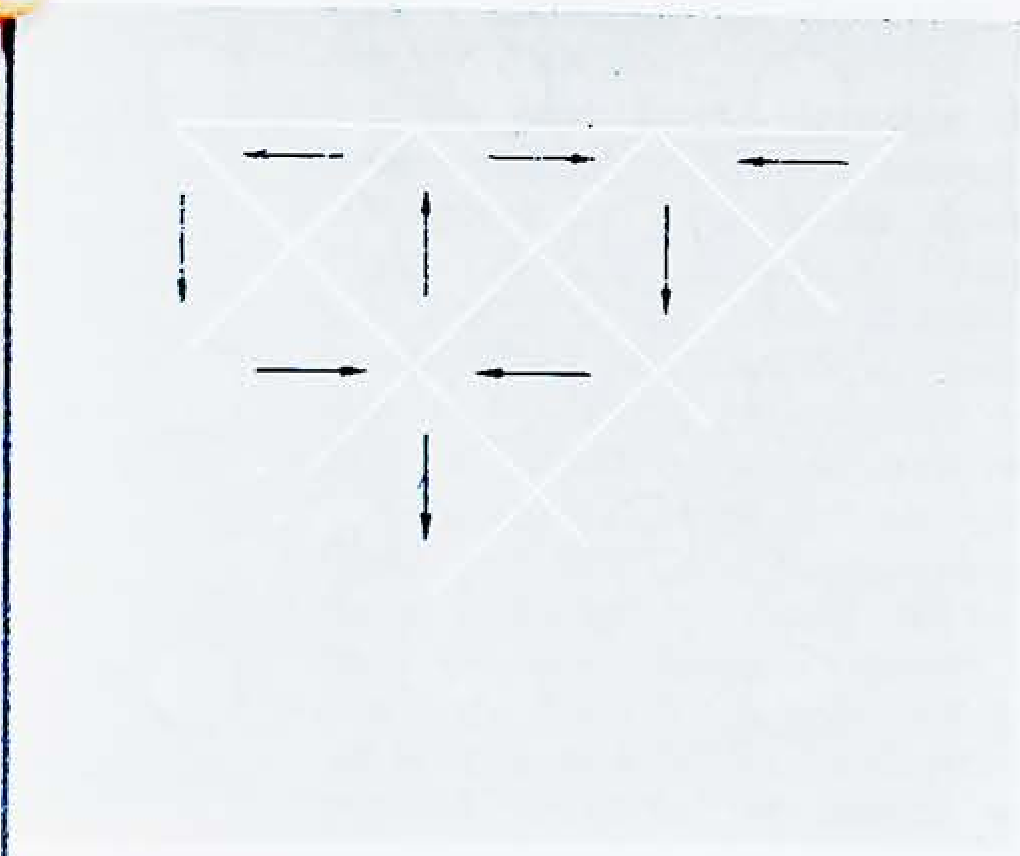


Fig. 10.28. Aranjare posibilă a domeniilor magnetice într-un cristal uniform de fier.

tendinţă puternică de „a o face unanimă" şi atunci întîmplarea se va răspîndi.

Răspunsul II: Accidentul determină întrucîtva care dintre diversele direcţii echivalente în cristal este aleasă, dacă începem dintr-o stare dezordonată — ca, de exemplu, atunci cînd fierul este răcit prin punctul său Curie fără nici un cîmp exterior aplicat. Fierul pur constă din cristale cubice cu volum centrat. Fiecare atom are opt vecini cei mai apropiaţi. Simetria mediului din jur se impune asupra fiecărui aspect al atomului, incluzînd cuplajul dintre spini. La fier axa cubică se întîmplă să fie axa de cea mai uşoară magnetizare. Adică, spinii preferă să fie orientaţi în aceeaşi direcţie, dar preferă aceasta încă mai bine dacă acea direcţie este una dintre cele şase direcţii $\pm\hat{x}$, $\pm\hat{y}$, $\pm\hat{z}$ (fig. 10.27). Aceasta este important deoarece înseamnă că spinii nu se vor roti uşor *en masse* dintr-una din direcţiile uşoare într-alta echivalentă la unghi drept. Pentru a face astfel, ei ar avea de trecut prin orientările *mai puţin* favorabile. Este tocmai acest obstacol care face magneţii permanenţi posibili.

Răspunsul III: O bucată aparent nemagnetizată de fier este în realitate compusă din multe *domenii*, în fiecare dintre ele spinii fiind aliniaţi într-un fel, dar într-o direcţie diferită de aceea a spinilor din domeniile vecine. În medie pe întreaga piesă de fier „nemagnetizat", toate direcţiile sînt egal reprezentate, astfel încît nu rezultă nici un cîmp magnetic la scară largă. Domeniile magnetice apar chiar într-un monocristal. Domeniile sînt în mod obişnuit microscopice în sensul de fiecare zi al cuvîntului. De fapt ele pot fi văzute sub un microscop de putere mică. Aceasta este încă enorm, desigur, la scară atomică, astfel că un domeniu magnetic include în mod tipic miliarde de momente magnetice elementare. Figura 10.28 reprezintă o împărţire în domenii. Împărţirea provine din aceea că este de energie mai joasă decît un aranjament cu toţi spinii orientaţi într-o direcţie. Ultimul aranjament ar fi un magnet permanent cu un cîmp puternic întinzîndu-se în spaţiul din jurul său.

Energia înmagazinată în acest cîmp exterior este mai mare decît energia necesară pentru a face o mică fracțiune din spinii cristalului, anume aceia de la frontiera domeniului, nealiniați cu vecinii lor imediați. Structura domeniului este astfel rezultatul unui proces de minimizare a energiei.

Dacă înfășurăm o bobină de sîrmă în jurul unei bare de fier, putem aplica materialului un cîmp magnetic prin trecerea unui curent prin fir. În acest cîmp, momentele orientate paralel cu cîmpul vor avea o energie mai joasă decît acelea orientate antiparalel, sau într-o altă direcție. Aceasta favorizează unele dintre domenii; acelea care se întîmplă să aibă o direcție de moment orientată favorabil* vor avea tendința să crească pe seama celorlalte, dacă aceasta este posibil. Un domeniu crește ca un club, adică, mărindu-și numărul membrilor. Aceasta se întîmplă la frontiere. Spinii aparținînd unui domeniu nefavorizat dar situați lîngă frontiera unui domeniu favorizat, schimbă simplu apartenența adoptînd direcția favorizată. Aceasta deplasează frontiera domeniului, care nu este decît suprafața limitatoare între două clase de spini. Aceasta se întîmplă destul de ușor în monocristale. Adică, un cîmp aplicat foarte slab poate produce, prin deplasarea frontierelor, o creștere de domeniu foarte mare, și deci o variație globală mare în magnetizare. Depinzînd de structura granulară a materialului totuși, deplasarea frontierelor domeniilor poate fi dificilă.

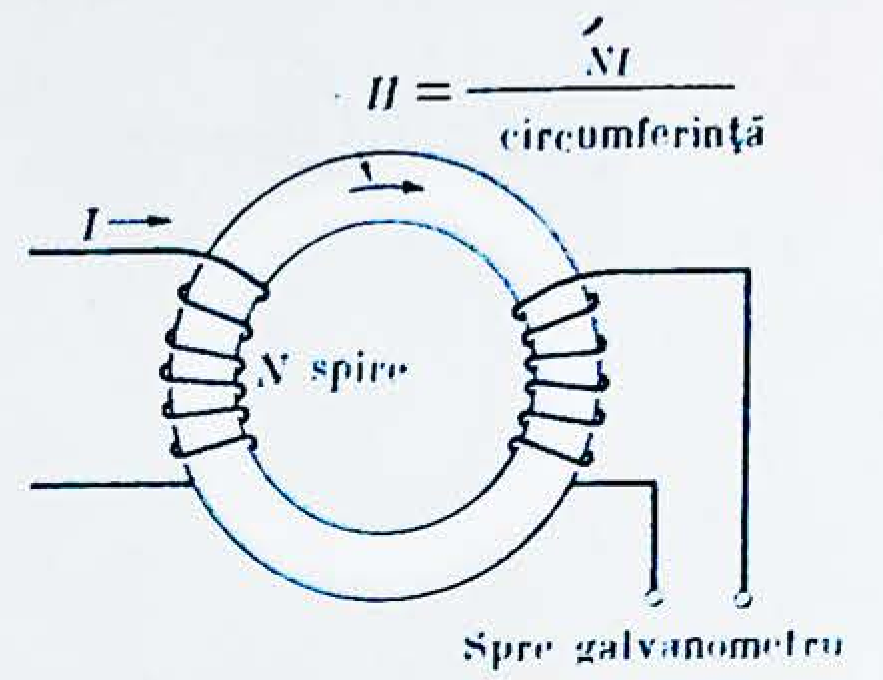


Fig. 10.29. Montaj pentru investigarea relației între B și M, sau B și H, într-un material feromagnetic.

Dacă cîmpul magnetic se întîmplă să nu fie de-a lungul uneia dintre direcțiile „ușoare" (în cazul unui cristal cubic, de exemplu) golirea domeniilor nefavorizate încă lasă momentele neorientate exact paralel cu cîmpul. Poate fi nevoie acum de un cîmp considerabil mai larg pentru a le aduce în linie cu direcția cîmpului pentru a crea în final, magnetizarea maximă posibilă.

Să privim la consecințele la scară mare ale acestui fapt, așa cum apar în comportarea magnetică a unei bucăți de fier în diverse cîmpuri aplicate. Un aranjament experimental convenabil este un tor de fier, în jurul căruia înfășurăm două bobine (fig. 10.29). Aceasta dă un cîmp practic uniform în interiorul fierului, fără nici un fel de efecte de margine pentru a complica problemele. Măsurînd tensiunea indusă într-una dintre bobine putem determina variațiile în fluxul Φ, și de aici **B** în interiorul fierului. Dacă ținem seama de *variațiile* lui **B**, începînd de la $\mathbf{B} = 0$, știm totdeauna care este **B**. Un curent prin cealaltă bobină stabilește cîmpul **H**, pe care îl luăm drept variabilă independentă. Dacă știm **B** și **H**, putem totdeauna calcula **M**.

---

* Avem tendința să folosim *spini* și *momente* aproape echivalent în această discuție. Momentul este un aspect intrinsec al spinului și dacă unul este aliniat tot așa este și celălalt. Pentru a fi întru totul corecți, vom reaminti cititorului că în cazul electronului vectorii moment magnetic și moment unghiular sînt orientați în direcții opuse.

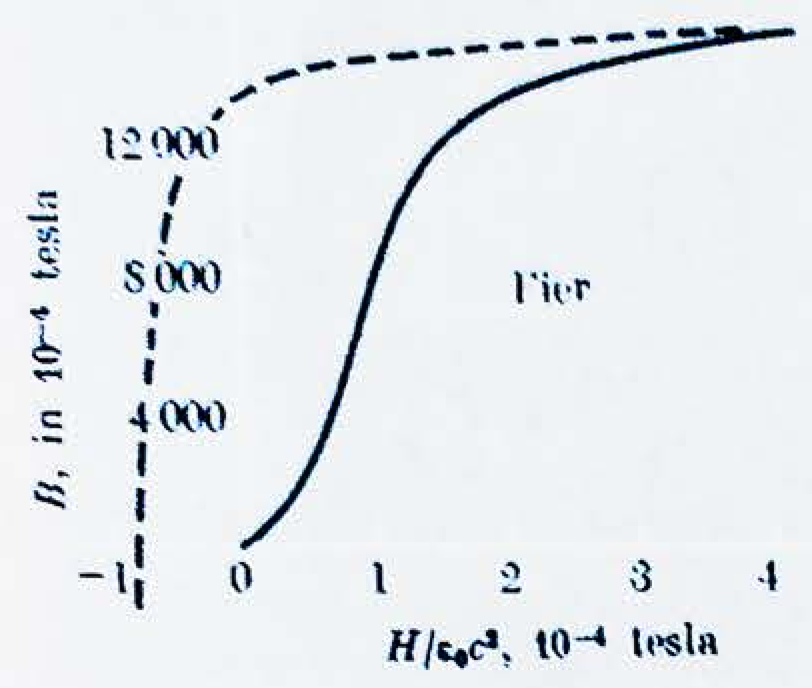


Fig. 10.30. Curba de magnetizare pentru fier de înaltă puritate. Curba întreruptă se obține cînd H este micșorat de la o valoare pozitivă mare.

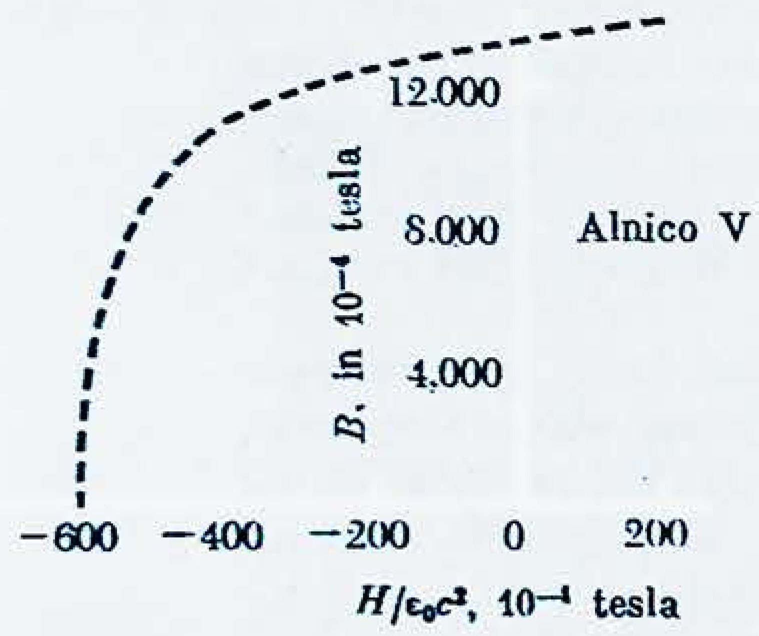


Fig. 10.31. Alnico V este un aliaj de aluminiu, nichel și cobalt care este folosit pentru magneți permanenți. De comparat această porțiune a curbei sale de magnetizare cu porțiunea corespunzătoare a caracteristicii pentru un material magnetic „moale", arătată în figura 10.30.

Este mai uzual de a reprezenta **B**, și nu **M**, în funcție de **H**. O curbă tipică $B-H$ pentru fier este arătată în figura 10.30. Observați că scările pe abscisă și ordonată diferă enorm. Desigur B și H aici se referă la o medie peste tot inelul de fier; structura fină de domeniu nu apare explicit.

Pornind cu fier „nemagnetizat", $B=0$ și $H=0$, creșterea lui H face pe B să crească manifest neliniar, încet la început, apoi mai repede, apoi foarte încet, în final aplatizîndu-se. Ceea ce devine în realitate constant la limite este nu B ci M. În acest grafic totuși, deoarece $M=\epsilon_0c^2\ B-H$, și $H \ll \epsilon_0c^2B$, diferența dintre M și ϵ_0c^2B nu este semnificativă.

Partea de jos a curbei $B-H$ este guvernată de mișcarea frontierelor domeniilor, adică prin creșterea domeniilor „corect orientate" în dauna domeniilor „rău orientate". În partea aplatizată a curbei, momentele atomice sînt așezate de „forța brută" în linie cu cîmpul. Fierul este aici un metal obișnuit policristalin, astfel încît doar o mică fracțiune a microcristalelor vor fi destul de norocoase pentru a avea o direcție „ușoară" aliniată cu direcția cîmpului.

Dacă descreștem acum încet curentul prin bobină, coborînd astfel H, curba *nu se repetă*. În schimb, găsim comportarea dată în curba punctată din figura 10.31. Această ireversibilitate este numită histerezis. Este în mare parte datorată faptului că deplasările frontierelor de domeniu sînt în parte ireversibile. Motivele nu sînt evidente din ceea ce am spus, dar sînt bine înțelese de fizicienii care lucrează în feromagnetism. Ireversibilitatea este o dificultate, și o cauză de pierdere de energie în multe aplicații tehnice ale materialelor feromagnetice — de exemplu, în transformatori de curent alternativ. Dar este indispensabilă pentru magnetizarea permanentă, și pentru astfel de aplicații se caută mărirea ireversibilității. Figura 10.31 arată porțiunea corespunzătoare a curbei $B-H$ pentru un aliaj de magnet permanent bun. Observați că H trebuie să devină în direcția *inversă* înainte ca B să fie redus din nou la zero. Dacă bobina este simplu deconectată și îndepărtată, rămînem cu B la 1,3 tesla, ceea ce se numește *remanență*. Deoa-

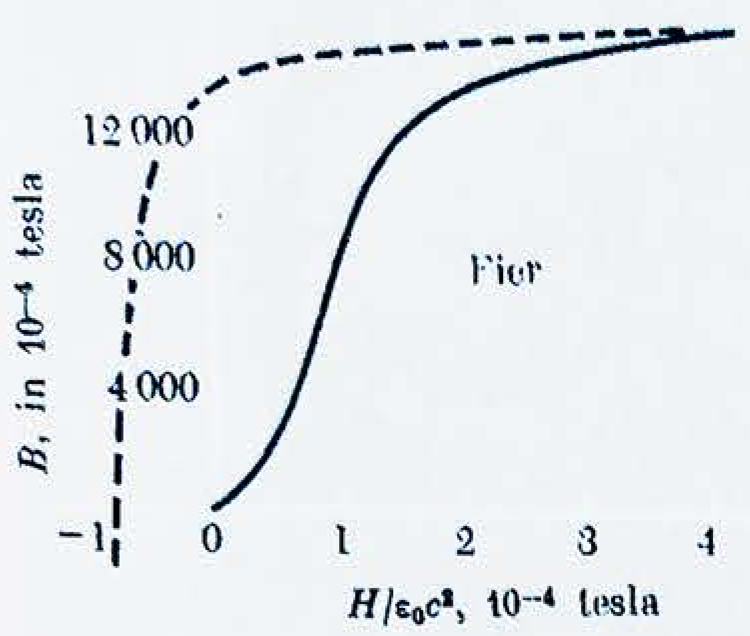


Fig. 10.30. Curba de magnetizare pentru fier de înaltă puritate. Curba întreruptă se obţine cînd H este micşorat de la o valoare pozitivă mare.

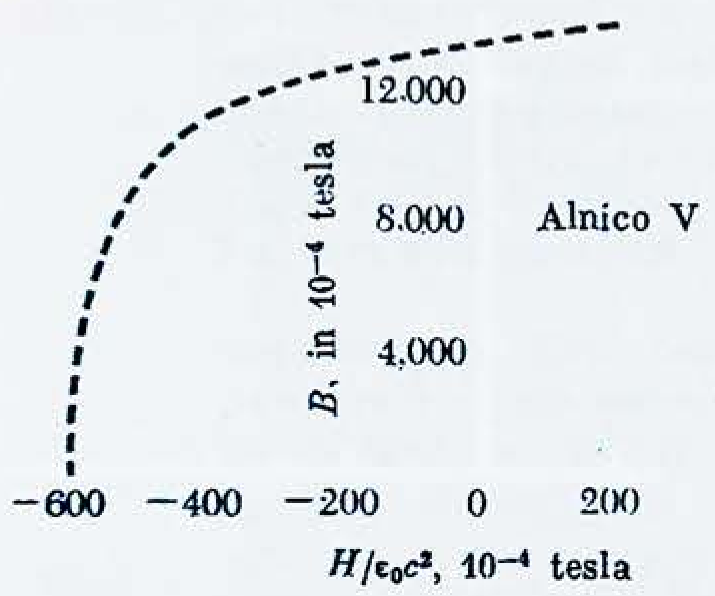


Fig. 10.31. Alnico V este un aliaj de aluminiu, nichel şi cobalt care este folosit pentru magneţi permanenţi. De comparat această porţiune a curbei sale de magnetizare cu porţiunea corespunzătoare a caracteristicii pentru un material magnetic „moale", arătată în figura 10.30.

Este mai uzual de a reprezenta **B**, şi nu **M**, în funcţie de **H**. O curbă tipică $B - H$ pentru fier este arătată în figura 10.30. Observaţi că scările pe abscisă şi ordonată diferă enorm. Desigur B şi H aici se referă la o medie peste tot inelul de fier;structura fină de domeniu nu apare explicit.

Pornind cu fier „nemagnetizat", $B = 0$ şi $H = 0$, creşterea lui H face pe B să crească manifest nelinear, încet la început, apoi mai repede, apoi foarte încet, în final aplatizîndu-se. Ceea ce devine în realitate constant la limite este nu B ci M. În acest grafic totuşi, deoarece $M = \varepsilon_0 c^2\ B - H$, şi $H \ll \varepsilon_0 c^2 B$, diferenţa dintre M şi $\varepsilon_0 c^2 B$ nu este semnificativă.

Partea de jos a curbei $B - H$ este guvernată de mişcarea frontierelor domeniilor, adică prin creşterea domeniilor „corect orientate" în dauna domeniilor „rău orientate". În partea aplatizată a curbei, momentele atomice sînt aşezate de „forţa brută" în linie cu cîmpul. Fierul este aici un metal obişnuit policristalin, astfel încît doar o mică fracţiune a microcristalelor vor fi destul de norocoase pentru a avea o direcţie „uşoară" aliniată cu direcţia cîmpului.

Dacă descreştem acum încet curentul prin bobină, coborînd astfel H, curba *nu se repetă*. În schimb, găsim comportarea dată în curba punctată din figura 10.31. Această ireversibilitate este numită histerezis. Este în mare parte datorată faptului că deplasările frontierelor de domeniu sînt în parte ireversibile. Motivele nu sînt evidente din ceea ce am spus, dar sînt bine înţelese de fizicienii care lucrează în feromagnetism . Ireversibilitatea este o dificultate, şi o cauză de pierdere de energie în multe aplicaţii tehnice ale materialelor feromagnetice — de exemplu, în transformatori de curent alternativ. Dar este indispensabilă pentru magnetizarea permanentă, şi pentru astfel de aplicaţii se caută mărirea ireversibilităţii. Figura 10.31 arată porţiunea corespunzătoare a curbei $B - H$ pentru un aliaj de magnet permanent bun. Observaţi că H trebuie să devină în direcţia *inversă* înainte ca B să fie redus din nou la zero. Dacă bobina este simplu deconectată şi îndepărtată, rămînem cu B la 1,3 tesla, ceea ce se numeşte *remanenţă*. Deoa-

rece H este zero, aceasta este în esenţă chiar magnetizarea, cu excepţia factorului $\varepsilon_0 c^2$. Aliejul a dobîndit o magnetizare permanentă, adică, una care se va menţine indefinit dacă este expus doar la cîmpuri magnetice slabe. Toată informaţia care este înmagazinată pe benzi magnetice, de la muzică la programe de calculator, îşi datorează permanenţa acestui fenomen fizic. Elementele magnetice de calculator, memorii cu miez magnetic şi altele, implică aceeaşi fizică.

PROBLEME

O aplicaţie a unor idei din capitolul 7.

10.1. Estimaţi (în limita unui factor de doi sau trei) cantitatea de energie înmagazinată în cîmpul magnetic al solenoidului descris în § 10.1. Exprimaţi estimarea dumneavoastră în joule. Fiind dat că puterea staţionară furnizată de generator este aproximativ 400 kilowatt, cît de mult timp i-a trebuit cîmpului să se instaleze, dacă tensiunea generatorului a fost conectată brusc?

Susceptibilitatea magnetică a aerului.

10.2. Presupunînd că susceptibilitatea paramagnetică de volum a unei substanţe date este proporţională cu numărul de molecule pe centimetru cub şi invers proporţională cu temperatura absolută, din datele date în tabela din § 10.1 calculaţi susceptibilitatea de volum a aerului la temperatură şi presiune normală. Aerul este aproximativ o cincime oxigen, de greutate moleculară 32, şi puteţi presupune că o moleculă de oxigen dintr-un gaz se comportă magnetic tot aşa ca în oxigen lichid.

Comparaţie între cîmpul unui inel de curent şi al unui dipol infinitesimal.

10.3. În capitolul 6 am calculat cîmpul într-un punct pe axa unui inel de curent de rază b (vezi ec. 6.41). Arătaţi că pentru $z \gg b$ acesta se apropie de cîmpul unui dipol magnetic, şi aflaţi cît de departe pe axă trebuie mers pentru ca cîmpul să devină în limita a un procent cîmpul pe care un dipol infinitesimal de acelaşi moment dipolar l-ar produce în acel punct.

Aplicaţie a formulei pentru cîmpul de dipol.

10.4. Un solenoid ca acela descris în § 10.1 este situat la subsolul unui laborator de fizică. Un fizician la etajul de sus al clădirii, 20 de metri mai sus şi deplasat orizontal 25 de metri, se plînge că acel cîmp îi perturbă măsurătorile. Presupunînd că solenoidul operează în condiţiile descrise, şi tratîndu-l drept un simplu dipol magnetic, calculaţi intensitatea cîmpului în regiunea fizicianului. Comentaţi, dacă vedeţi vreo bază pentru a o face, justeţea acelei plîngeri.

Pămîntul ca un dipol magnetic.

10.5. La Polul Nord cîmpul magnetic terestru este vertical şi are intensitatea $6{,}2 \times 10^{-5}$ tesla. Cîmpul terestru este aproximativ acela al unui dipol la suprafaţă

şi în afară. Care este momentul dipolar şi cît de mare ar trebui să fie un curent care, curgînd în jurul Ecuatorului, ar crea un moment dipolar de intensitate egală acestuia? (Sursa reală a cîmpului terestru este probabil nu un curent lîngă suprafaţă dar o distribuţie de curent în miez.)

Momentul magnetic al unei sfere încărcate aflată în rotaţie.

10.6. O sferă de rază R poartă sarcina Q care este distribuită uniform pe suprafaţa sferei cu densitatea $\sigma = Q/4\pi R^2$. Această pătură de sarcină se roteşte în jurul unei axe cu viteza unghiulară ω, în radiani/sec. Aflaţi momentul ei magnetic. (Împărţiţi sfera în bande înguste de sarcină rotitoare; găsiţi curentul cu care este echivalentă fiecare bandă, şi momentul ei dipolar şi integraţi peste toate benzile.)

R. $QR^2\omega/3$

Investigarea susceptibilităţii magnetice.

10.7. Cifrele în tabela din § 10.1 au fost obţinute nu prin efectuarea în realitate ale acelor experienţe cu un solenoid ca cel descris, dar căutînd susceptibilităţile determinate experimental ale substanţelor şi calculînd forţa care ar acţiona în condiţiile descrise. Acum cînd ştiţi cum este definită susceptibilitatea, şi de ce factori depinde forţa, parcurgeţi procesul invers — adică, calculaţi susceptibilitatea, apoi căutaţi într-o tabelă, ca de exemplu cea din *Handbook of Chemistry and Physics* (publicată de Chemical Rubber Co.). Cînd priviţi tabela de susceptibilităţi magnetice din acest Handbook, observaţi uniformitatea în lunga tabelă de substanţe organice, şi exploraţi tabela de substanţe anorganice pentru cazurile paramagnetice remarcabile, sau cazurile diamagnetice neobişnuite.

10.8. Arătaţi că lucrul efectuat pentru a scoate o unitate de masă de material paramagnetic dintr-o regiune în care inducţia cîmpului magnetic este B într-o regiune unde intensitatea cîmpului este neglijabil de mică, este $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \chi B^2$, χ fiind susceptibilitatea specifică. Apoi calculaţi exact cît de mult lucru, pe gram, ar fi necesar pentru a îndepărta oxigenul lichid din poziţia menţionată în tabela din § 10.1. (Desigur, aceasta se aplică doar dacă χ este o constantă pe tot domeniul intensităţilor magnetice implicate).

Momentul magnetic al fierului într-un cîmp foarte puternic.

10.9. Deduceţi din datele tabelei din § 10.1 (în condiţiile specificate) mărimea momentului magnetic a 1 gram de fier. Aproximativ la cît de mulţi spini electronici alineaţi per atom corespunde aceasta? (Greutatea atomică a fierului: 56.)

Forţa dintre două discuri magnetizate.

10.10. Calculaţi momentul magnetic total $\mathbf{m}$ al discului magnetizat descris în figura 10.22. Cîmpul la distanţa r pe axa discului este aproximativ $2\ m/4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3$ dacă r este destul de mare încît discul să poată fi considerat

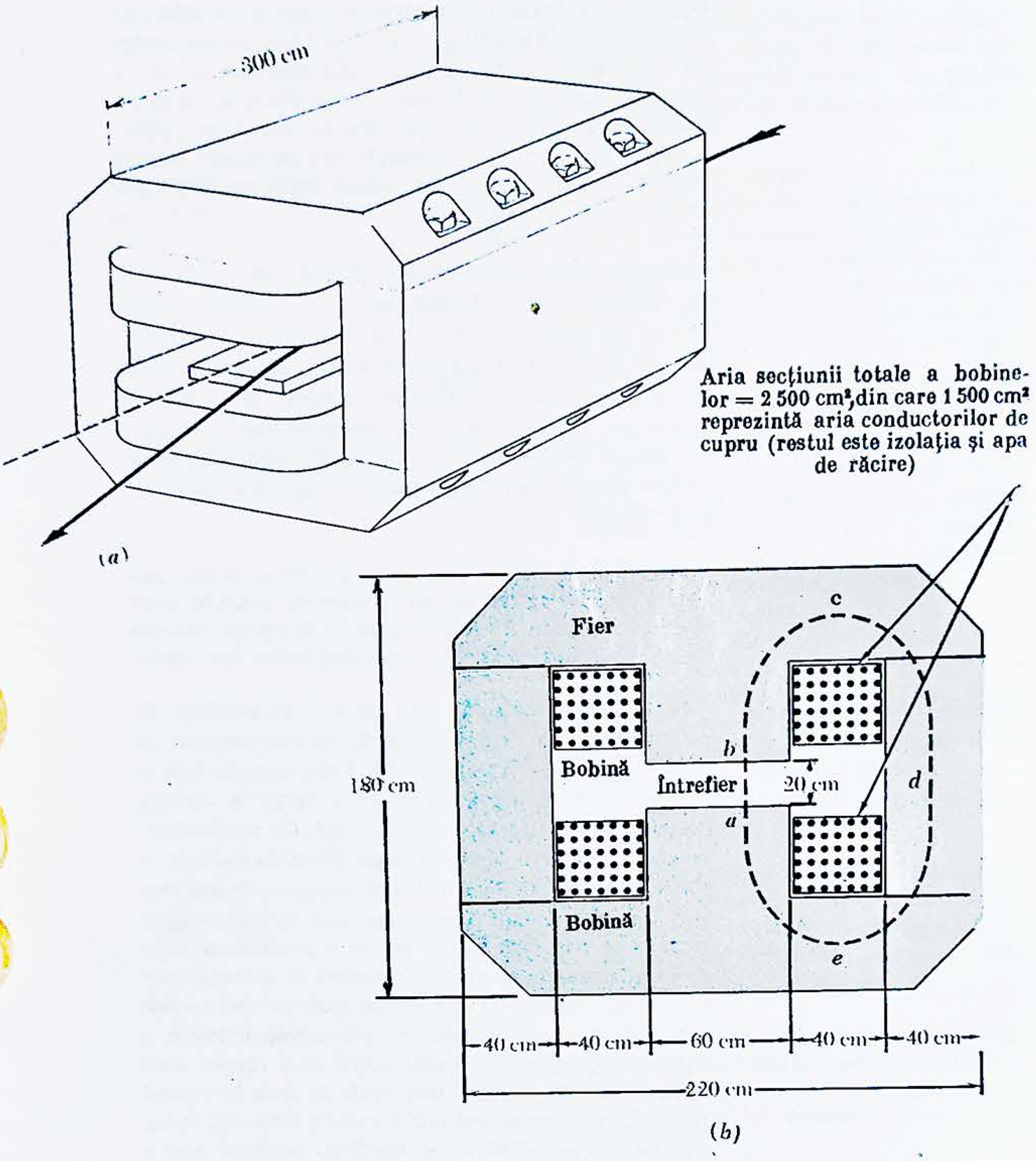
drept simplu dipol. Să considerăm acum două astfel de discuri A și B. A se află pe o masă de lemn, cu momentul său **m** orientat în sus. B este situat deasupra lui A cu momentul său orientat în jos, și împiedicat să se miște lateral. Estimați în mare înălțimea la care B ar „pluti" deasupra lui A. Folosiți „aproximația de dipol" tocmai descrisă. Aceasta va fi justificat dacă înălțimea de plutire estimată nu este prea mică.

10.11. O bară cilindrică lungă de rază a are o magnetizare uniformă M în direcția axei. O crestătură transversală de grosime $b \ll a$ este tăiată din porțiunea centrală a vergelei fără a perturba magnetizarea în rest. Discutați intensitatea cîmpului magnetic B la centrul acestui gol, și într-un punct în interiorul barei la depărtare de gol. Folosiți un argument de superpoziție pentru a calcula *diferența* între intensitățile cîmpurilor în aceste două poziții.

10.12. Un tor de fier cu diametrul interior 10 cm, diametrul exterior 12 cm, are 20 de spire de sîrmă în jurul său. Folosiți curba $B-H$ din figura 10.30 pentru a estima curentul necesar la producerea unui cîmp în fier de 1,2 tesla.

Proiectarea unui electromagnet: un „magnet de deflecție" pentru o experiență cu particule de energie înaltă.

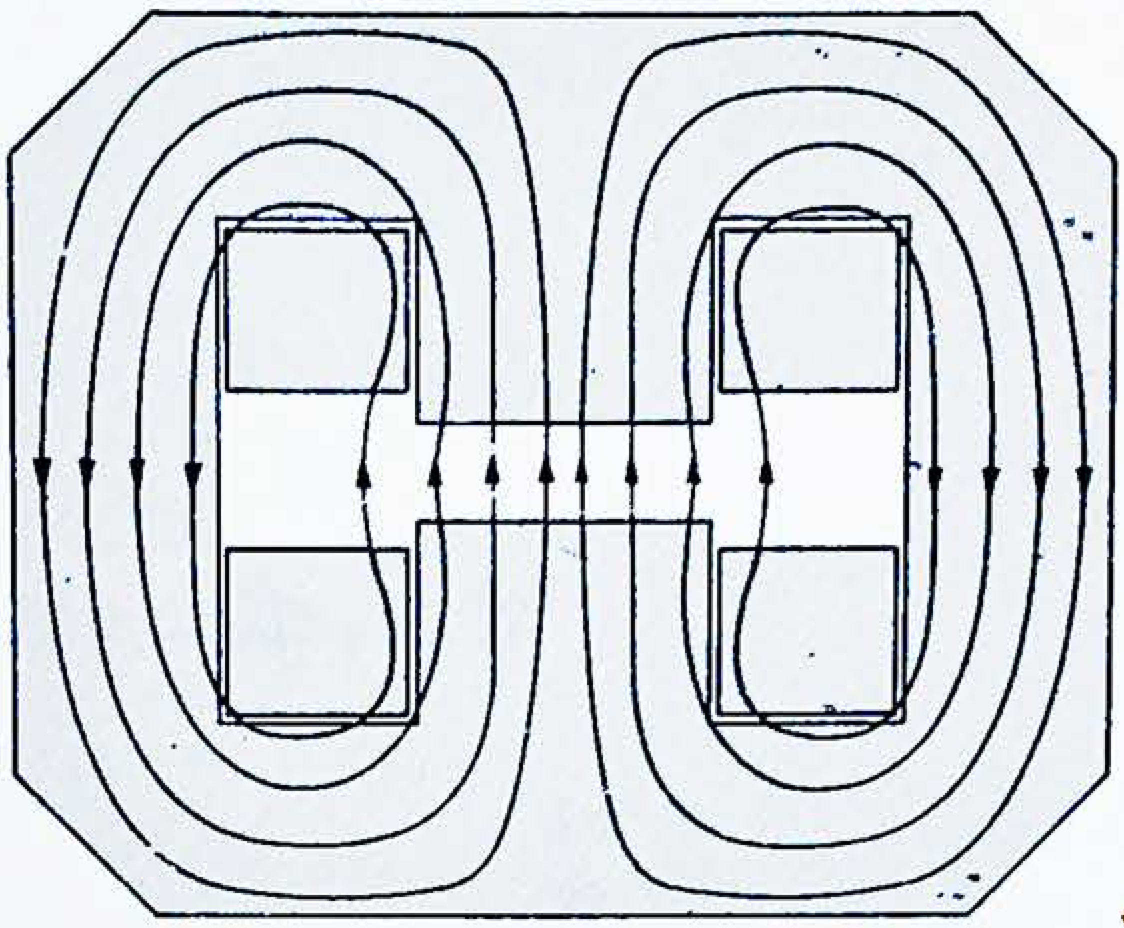
10.13. Pentru deflecția unui fascicul de particule de energie înaltă în anumite experiențe este necesar un cîmp magnetic de intensitate 1,6 tesla, menținut pe o regiune dreptunghiulară lungă de 3 metri în direcția fasciculului, 60 cm lată și 20 cm înaltă. Un magnet convenabil ar putea fi proiectat după direcțiile indicate în părțile (*a*) și (*b*) ale figurii. Luînd dimensiunile așa cum sînt date, determinați (I) numărul total de amperi-spiră necesari în cele două bobine pentru a produce un cîmp de 16 kilogauss între poli; (II) puterea în kilowați care trebuie furnizată; (III) numărul de spire pe care trebuie să-l conțină fiecare bobină, și aria corespunzătoare a secțiunii transversale a firului, astfel încît cîmpul dorit să fie atins cînd bobinele sînt legate în serie la o sursă de putere continuă de 400 volț. Pentru a fi folosită în (I), o porțiune a curbei $B-H$ pentru fierul magnetic Armco este arătată în partea (*d*) a figurii. Tot ce aveți nevoie să determinați este integrala curbilinie a lui H în jurul unei curbe ca *abcdea*. Între poli, $H = B$. În fier, puteți presupune că B are aceeași intensitate ca și între poli. Liniile de cîmp vor arăta oarecum ca acelea desenate în partea (*c*) a figurii. Puteți estima în mare lungimea curbei prin fier. Aceasta nu este foarte critic, deoarece veți vedea că curba lungă *bcdea* contribuie relativ puțin la integrala curbilinie, în comparație cu contribuția curbei prin aer



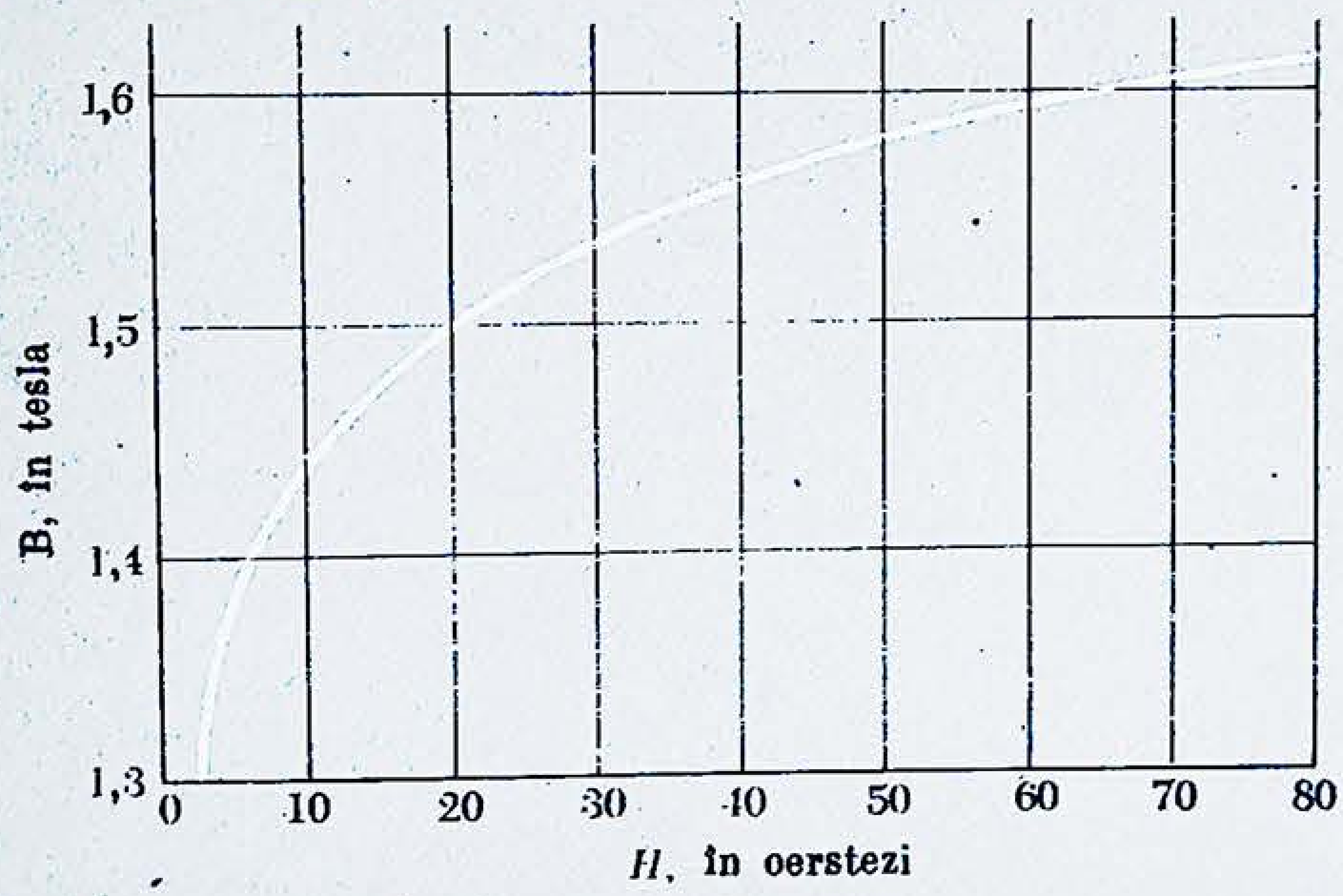
Figuri pentru problema 10.13

ab. (De fapt, nu este o aproximaţie rea, la intensităţi de cîmp mai slabe, a neglija cîmpul H în fier.) Pentru (II) presupuneţi rezistivitatea cuprului $\rho = 2{,}0 \times 10^{-8}$ ohm-m, şi fiecare bobină să conţină N spire. Veţi găsi că puterea necesară pentru un număr dat de amperi-spiră este independentă de N, adică, este aceeaşi pentru multe spire de sîrmă subţire sau cîteva spire de sîrmă groasă, presupunînd că secţiunea transversală totală

Figuri pentru problema 10.13



(c)



(d)

este fixată cum a fost precizat. De aceea proiectantul alege N şi secţiunea transversală a conductorului pentru a potrivi magnetul la puterea intenţionată pentru sursă.

R. (I) 270 000 amperi-spire;

(II) 82,5 kW;

(III) 2 N = 1310 spire (655 pe bobină), 1,15 cm² secţiune transversală pentru conductor.

Alte probleme şi întrebări

Capitolul 1	422
Capitolul 2	426
Capitolul 3	430
Capitolul 4	440
Capitolul 5	447
Capitolul 6	449
Capitolul 7	455
Capitolul 8	460
Capitolul 9	461
Capitolul 10	468

ALTE PROBLEME

Capitolul 1

Energia unui sistem de sarcini.

1.23. Să considerăm configuraţiile de sarcină construite după cum urmează: Puneţi o unitate de sarcină pozitivă în centrul unui cerc şi puneţi N unităţi de sarcini negative, egal distanţate, pe cerc. Dacă sarcinile sînt instantaneu eliberate, se vor îndepărta sau vor converge? Răspundeţi la întrebare pentru $N = 3, 4$ şi 5, prin calcularea energiei sistemului, şi arătaţi, cel puţin într-un caz, că obţineţi acelaşi răspuns prin calcularea forţei rezultante asupra uneia din sarcinile negative.

Picături încărcate de lichid.

1.24. O picătură de apă de rază R poartă o sarcină electrică Q distribuită pe suprafaţa sa. Să presupunem că împărţim picătura în alte două picături mai mici de mărime egală şi bine separate, împărţind sarcina în mod egal între ele. A mărit sau micşorat această energie potenţială electrică? Cît de mult? Să ţinem acum seama de energia asociată cu suprafaţa lichidului care este răspunzătoare pentru „tensiunea superficială“ care dă picăturii forma sferică. Din cauza legăturilor intermoleculare, este nevoie de energie pentru a crea suprafaţă nouă, şi la temperatură dată energia necesară per unitate de arie de suprafaţă creată este o constantă. Pentru apă este aproximativ 5×10^{-2} joule/m^2. Să presupunem că avem de considerat împărţirea în două picături a uneia de rază 10^{-3} cm. Cît de mare trebuie să fie sarcina purtată de picătură pentru ca variaţia în energie electrică să compenseze energia de legătură moleculară? Pentru a aprecia dacă aceasta este o sarcină mare sau nu, găsiţi intensitatea cîmpului electric pe care l-ar produce, la suprafaţa picăturii. (Un cîmp de 30 000 volt/cm este un cîmp mare moderat care poate fi suportat în aer.)

Întrebare pentru discuţie.

1.25. Gîndiţi şi discutaţi despre „dilema sarcinii punctuale“, care ar putea fi pusă astfel: o sarcină punctuală ideală are o energie potenţială, sau o „energie proprie“ infinită. Totuşi o neglijăm totdeauna cînd însumăm energia unui sistem de sarcini punctuale. Orice energie care rămîne pentru totdeauna constantă poate fi neglijată, dar ce înseamnă, a spune că o cantitate infinită este constantă?

O particulă elementară, lucrul cel mai apropiat de o sarcină punctuală pe care îl avem în natură, nu pare să arate nici un infinit incomod. Dar deoarece ea are mărime finită, ne-am putea aștepta ca cîmpurile electrice de la alte surse să aibă un oarecare efect asupra structurii sale. Aceasta ar însemna, totuși, că energia proprie electrică a concentrării de sarcină nu ar fi întru totul aceeași în împrejurări diferite. În ce circumstanțe credeți că aceasta ar trebui să fie în realitate luată în considerare?

Folosirea superpoziției.

1.26. Figura arată o pătură sferică de sarcină, de rază a și densitate superficială σ, din care a fost îndepărtată o mică bucată circulară de rază $b \ll a$. Care este direcția și mărimea cîmpului în punctul de mijloc al aperturii? Există două moduri de a obține răspunsul. Puteți integra peste distribuția de sarcină care rămîne pentru a însuma contribuțiile tuturor elementelor la cîmpul în punctul în discuție. Sau, amintindu-vă principiul superpoziției, puteți gîndi despre efectul punerii la loc a bucății îndepărtate, care este practic un mic disc. Observați legătura acestui rezultat cu discuția noastră a forței asupra unei sarcini superficiale — poate acesta este un al treilea mod în care ați putea ajunge la rezultat.

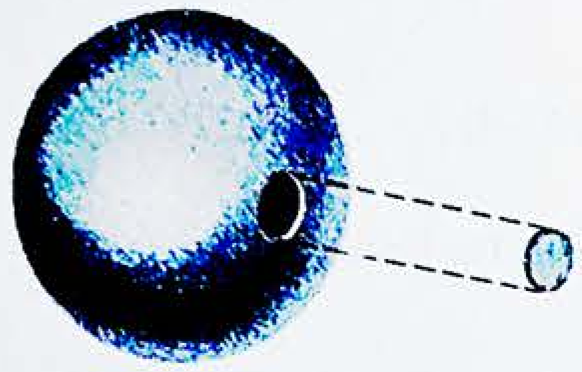


Fig. la problema 1.26

1.27. Folosirea întrucîtva asemănătoare a simetriei și superpoziției vă va permite să stabiliți următorul fapt curios. Un vas emisferic poartă pe suprafața sa o densitate de sarcină uniformă. Afirmăm că, în fiecare punct de pe suprafața imaginară care acoperă vasul ca o piele de tobă, cîmpul electric este perpendicular pe suprafață.

Provocare.

1.28. Se învață mai mult inventînd probleme care pot fi rezolvate folosind simetria și superpoziția decît rezolvîndu-le. Încercați să imaginați una.

Forța asupra unui strat compus de sarcină.

1.29. Două straturi paralele plane de sarcină, de densitate σ_A și σ_B coulomb/m² respectiv, sînt separate printr-o distanță s, stratul A aflîndu-se la stînga stratului B, cînd privim situația dintr-o parte. Fie $\mathbf{E}_1$ intensitatea cîmpului electric la stînga stratului A, $\mathbf{E}_2$ cîmpul electric dintre straturi, și $\mathbf{E}_3$ cîmpul la dreapta stratului B. Acest cîmp nu este doar acela datorat numai straturilor, dar include efectul altor surse care pot fi prezente. Presupunem că celelalte surse sînt destul de departe pentru a da un cîmp uniform peste toată regiunea pe care o examinăm. Să presupunem acum că cele două straturi sînt legate mecanic într-un mod oarecare, astfel încît am putea măsura forța totală asupra combinației. Arătați că această forță, per unitate de arie a combinației — adică, pentru 1 m² din fiecare strat — este dată de

$$\mathbf{F} = (\sigma_A + \sigma_B)\left(\frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3}{2}\right)$$

Acesta este un exemplu special de distribuție neuniformă de sarcină printr-o „placă".

Deducere generală a forței asupra unui strat de sarcină.

1.30. Rezultatul demonstrat în problema 1.29 și formulat în § 2.7 poate fi dovedit în mod cu totul general. Fie distribuția de sarcină dintr-o placă plană dată de densitatea de sarcină de volum $\rho(x)$ între $x = 0$ și $x = b$, grosimea plăcii. Atunci densitatea de sarcină superficială totală, privind această drept un strat de sarcină, este dată de

$$\sigma = \int_0^b \rho(x)\, dx.$$

Dacă E_x este componenta cîmpului electric perpendiculară pe placă, forța totală asupra plăcii (componenta x, de fapt; nu sîntem interesați în celelalte componente) este dată de

$$F_x = \int_0^b \rho E_x\, d_x.$$

Legînd ρ și E_x, și aplicînd legea lui Gauss la un strat de grosime dx, arătați că

$$F_x = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_2^2 - E_1^2)$$

și de aici că

$$F_x = \frac{1}{2}(E_{1x} + E_{2x})\sigma.$$

$\mathbf{E}_1$ este intensitatea cîmpului în $x = 0$, $\mathbf{E}_2$ cîmpul în $x = b$.

1.31. O distribuție de sarcină statică în formă de țigară este situată în originea coordonatelor. Dimensiunea lungă a „țigarei" se întinde de-a lungul axei z. Sarcina totală este q. Cîmpul în punctul P de pe axa z în afara distribuției de sarcină va fi numit E. Dacă q ar fi fost concentrată în origine, cîmpul în P ar fi E'. Este E mai mare, egal, sau mai mic decît E'?

1.32. Știți că cîmpul electric la distanța r de la originea unei distribuții de sarcină sferică simetrică este aceeași ca și cînd toată sarcina care se află în interiorul sferei de rază r ar fi fost concentrată în origine.

(a) Depinde acest fapt de natura invers-pătratică a legii lui Coulomb sau numai de simetria sferică? Ar fi ea adevărată pentru o lege invers-cubică?

(b) O distribuție dată de sarcină simetric sferică de sarcină totală Q are tot Q-ul limitat la distanța r_0 de la origine. Să presupunem că legea de forță dintre două sarcini ar fi fost *invers cubică* în loc de a fi legea normală invers pătratică. Cîmpul E în r (cu $r > r_0$) este de comparat cu cîmpul E' care ar fi în r presupunînd că toată sarcina Q ar fi concentrată în origine. Este E mai mare decît, egal cu, sau mai mic decît E'? Încercați să folosiți argumente calitative mai degrabă decît o demonstrație matematică.

O altă lume diferită.

1.33. Să ne imaginăm o lume în care există trei feluri de sarcină, în loc de două, cu sarcini de acelaşi fel care se atrag, sarcini contrare care se resping, într-o relaţie complet simetrică. Să numim tipurile de sarcină A, B şi C. Legea invers pătratică este urmată şi superpoziţia are loc întocmai ca în lumea noastră. Să presupunem că cele asemănătoare se resping exact de două ori mai puternic decît se atrag cele contrare. Adică, sarcini unitate egale de tipul A se resping una pe alta cu o forţă de 1 newton la 1 cm, în timp ce o sarcină unitate A şi o sarcină unitate B se atrag una pe alta cu o forţă $\frac{1}{2}$ newton. Arătaţi că aceasta permite, în mod cu totul general, existenţa corpurilor neutre — adică a corpurilor care, deşi conţinînd elemente încărcate, nu suferă în ansamblu nici o forţă, şi nu produc nici o forţă, cînd sînt în apropierea unei sarcini de orice tip. Cum aţi putea detecta diferenţa dintre acea lume şi a noastră? Ar putea noţiunea de cîmp electric să fie generalizată pentru a fi utilă în acea lume?

Experienţă implicînd cîmpul unei linii de sarcină.

1.34. Într-un microscop electronic un fascicul de electroni energetici, acceleraţi mai întîi printr-o diferenţă de potenţial de V_0 volţi trece de un fir subţire încărcat întins la unghi drept faţă de direcţia originală a fasciculului de electroni. Acest fir poartă o sarcină negativă, în mărime de λ coulomb pe metru de lungime. Cîmpul firului este relativ slab, astfel încît traiectoriile electronilor sînt puţin afectate. Cunoscînd aceasta puteţi găsi forţa asupra unui electron dat ca funcţie de timp, într-o primă aproximaţie, presupunînd că acesta urmează traiectoria sa dreaptă la viteză constantă. Apoi folosiţi rezultatul pentru a calcula componenta impulsului transversal primit de electron, la trecere, şi de aici devierea unghiulară α pe care o suferă traiectoria. Veţi găsi rezultatul destul de remarcabil că deflecţia unghiulară este independentă de cît de departe de fir a trecut traiectoria electronului. Adică, cîmpul electric al firului are un efect asupra traiectoriilor electronilor ca acela al unei prisme slabe asupra razelor de lumină. De fapt, chiar un astfel de aranjament a fost folosit pentru a demonstra echivalentul electro-optic al unui fenomen de interferenţă faimos în optica clasică, experienţa de interferenţă cu biprisma Fresnel [Möllenstedt şi Düker, *Zeitschrift für Physik* **145**, 377 (1956)].

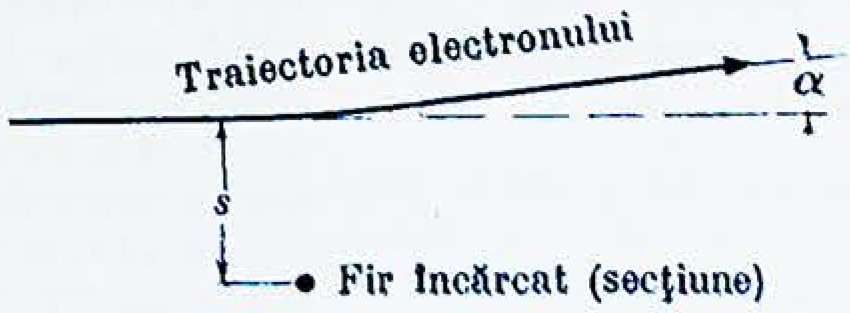


Fig. la problema 1.34.

2.18. Un cilindru circular gol, de rază și lungime b, cu capete deschise, are o sarcină totală Q distribuită uniform pe suprafața sa. Care este diferența de potențial între un punct de pe axă la un capăt și punctul median de pe axă? Arătați prin schițarea cîtorva linii de cîmp cum credeți că va arăta cîmpul acestui obiect.

Întrebare: Sistemul este mai general decît acela în problema 2.10.
Rezultat: Ilustrează un principiu general important asupra distribuției de sarcină.

2.19. Avem două sfere metalice, de raze R_1 și R_2, foarte departe una de alta, în comparație cu aceste raze. Fiind dată o cantitate totală de sarcină Q, pe care avem să o împărțim între sfere, cum ar trebui ea împărțită încît să facă energia potențială a distribuției de sarcină rezultante cît mai mică posibil? Pentru a răspunde la aceasta, calculați mai întîi energia potențială a sistemului pentru o împărțire arbitrară a sarcinii, q pe una și $Q-q$ pe alta. Apoi minimizați energia ca funcție de q. Puteți presupune că orice sarcină pusă pe una dintre aceste sfere se distribuie uniform pe sferă, cealaltă sferă fiind destul de departe încît influența sa să poată fi neglijată. Cînd ați găsit împărțirea optimă a sarcinii, arătați că în acea împărțire diferența de potențial dintre sfere este zero. (Deci ele ar putea fi legate printr-un fir, și nu ar apărea nici o redistribuire. Acesta este un exemplu particular al unui principiu foarte general pe care îl vom întîlni în cap. 3: pe un conductor, sarcina se distribuie încît să minimizeze energia potențială totală a sistemului.)

Altă privire la cîmpul din Prob. 2.1.

2.20. Cîmpul precizat în Prob. 2.1, anume $E_x = 6xy$, $E_y = 3x^2 - 3y^2$, $E_z = 0$, are o relație cu cîmpul din figura 2.2. Pentru a o găsi, scrieți potențialul φ, dezvoltat în Prob. 2.1, în coordonate polare cilindrice r, θ, unde $r^2 = x^2 + y^2$ și $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$. Schițați cîteva echipotențiale și cîteva linii de cîmp.

2.21. Să considerăm o regiune sferică care conține o sarcină punctuală q în interiorul, dar nu în centrul ei. Este adevărat că potențialul în centru este egal cu media potențialului pe suprafața sferei? Contrazice aceasta afirmația despre funcții armonice făcută în § 2.13?

Exercițiu: Folosirea soluției unei probleme drept bază pentru aproximarea soluției alteia.

2.22. Am găsit că potențialul la centrul unui disc de rază a purtînd densitatea de sarcină superficială uniformă σ este $\sigma a/2\varepsilon_0$. Știind aceasta, să presupunem că vrem să estimăm potențialul la centrul unui pătrat uniform încărcat de latură b, cu o precizie de un procent. Cum l-ați putea estima fără a încerca să rezolvați problema potențialului pentru pătrat? Puteți fixa limite asupra erorii posibile din estimarea dumneavoastră?

Răspunsul exact pentru pătratul încărcat.

2.23. Nu este greu de calculat exact potenţialul la centrul stratului pătratic de sarcină uniformă, discutat în problema 2.22. Un bun mod de a efectua integrarea este sugerat în figură. Mai întîi găsiţi contribuţia la potenţialul în C de la fîşia îngustă de lărgime dx care se întinde de la $y = -x$ la $y = x$. După aceasta, este uşor de integrat după x de la 0 la $b/2$, şi a obţine contribuţia acelui sfert de pătrat. Potenţialul zero este, desigur, la infinit.

$$R: \varphi_C = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

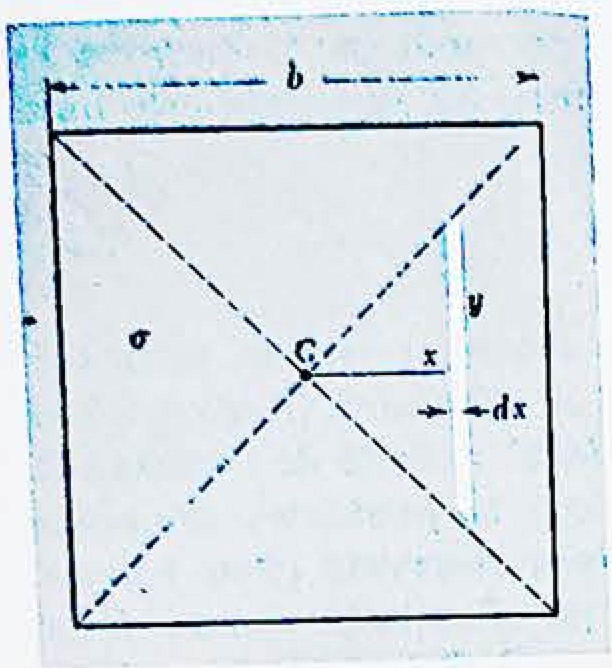


Fig. la problema 2.23

Se arată că rot **F** *este în realitate un vector.*

2.24. Cum putem fi siguri că numărul definit drept $\lim\limits_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$ din ecuaţia 2.76 reprezintă într-adevăr o componentă a unui vector? Întrebarea poate fi pusă în termeni concreţi astfel: luînd succesiv $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ şi $\hat{\mathbf{z}}$ drept direcţii pentru $\hat{\mathbf{n}}$, determinăm, pentru un anumit **F** şi un anumit punct din spaţiu, trei numere. Acestea au fost date drept componentele unui vector. Fiind acum sceptici, le vom scrie acum în ghilimele, notîndu-le „A_x“, „A_y“ şi „A_z“. Dacă alegem acum o altă direcţie $\hat{\mathbf{n}}$, şi determinăm raportul limită al circulaţiei la arie pentru o suprafaţă astfel orientată, *primim totdeauna un număr egal cu* $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{x}}\,„A_x“ + \hat{\mathbf{y}}\,„A_y“ + \hat{\mathbf{z}}\,„A_z“)$? Dacă este aşa, putem îndepărta semnele citării şi să spunem că procedeul nostru a produs într-adevăr un vector. Vedeţi dacă o puteţi dovedi considerînd circulaţia în jurul fiecăreia din cele patru feţe ale unui mic tetraedru, ca acela arătat în figura 2.18. Ce se întîmplă cu suma celor patru circulaţii? Ce se întîmplă cu suma vectorilor de arie?

„Nu tot ce străluceşte este aur“.

2.25. Divergenţa unei funcţii vectoriale **F** este un scalar, după cum ştim. Să presupunem că încercăm să definim un vector, diferit de rotor, în acest mod:

$$G = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Putem să spunem că această alcătuire este un vector, sau trebuie să-l numim mai degrabă un *impostor*? (Vedeţi cum se comportă cînd rotiţi coordonata faţă de care sînt

luate componentele. Este suficient pentru a dezvălui esențialul de a considera o rotație de 90° în jurul axei z. Noile coordonate sînt atunci legate de cele vechi astfel:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}},\ \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}},\ F'_x = F_y \text{ etc.}$$

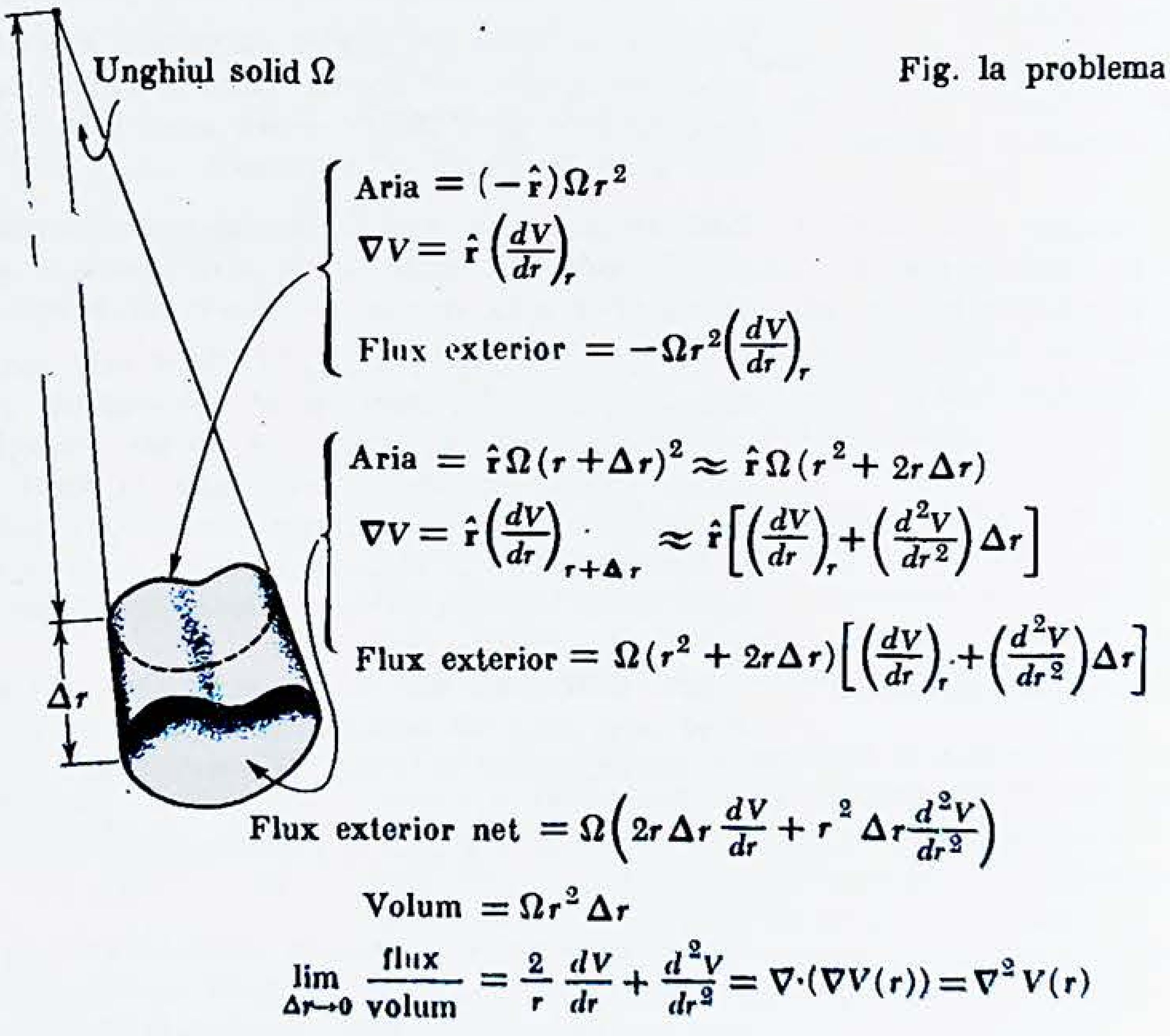
O întrebare implicînd rotorul unui cîmp de viteze.

2.26. Un canal de irigare are laturi paralele drepte la depărtarea de $2b$. La suprafața apei din canal viteza apei este cea mai mare în mijlocul curentului, descrescînd la zero pe fiecare margine. Să presupunem că curgerea se întîmplă să fie astfel încît viteza de suprafață este dată aproximativ de

$$v = v_0\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

unde y este distanța de la centru, și v este peste tot orientat în sensul de curgere al canalului. (Într-un canal real curgerea ar putea fi cu totul diferită de aceasta.) O așchie de lemn plutind pe apă la jumătatea drumului dintre centru și o margine este observată că se rotește în timp ce se deplasează în jos. Explicați aceasta. Cum este aceasta corelat cu problema 2.16 (a)? Cît de mult în jos se va deplasa așchia în timp ce se rotește cu 360°?

Fig. la problema 2.27



Caz special: ∇^2 în coordonate sferice.

2.27. Această problemă vă va introduce în operatorul Laplace așa cum apare în coordonate sferice în cazul special al funcțiilor cu simetrie sferică. Fie V o funcție doar de r : $V = V(r)$. Atunci care este div (grad V), sau $\nabla \cdot (\nabla V)$, pe care am numit-o $\nabla^2 V$? S-a explicat în § 2.3 că în acest caz ∇V este simplu $\vec{r}\, \mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, astfel încît avem de considerat tocmai divergența acestei funcții vectoriale. Punctele principale ale deducerii lui $\nabla \cdot (\nabla V)$ sînt schițate în figură.

(a) Studiați această deducere pînă cînd înțelegeți pașii și puteți efectua argumentarea de care ar putea fi nevoie dacă ați explica-o altcuiva. Observați unde au fost neglijați termeni de ordinul doi în ∇r.

(b) Arătați că rezultatul se poate scrie

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} (rV(r)) .$$

(c) Dacă tot ce știm despre un anumit $V(r)$ este că $\nabla^2 V(r) = 0$, ce putem spune despre V?

(d) Arătați că potențialul „Yukawa", $V(r) = (1/r)e^{-\lambda r}$, unde λ este o constantă, satisface ecuația $\nabla^2 V - \lambda^2 V = 0$.

Potențialul și cîmpul de forțe Yukawa.

2.28. O particulă este atrasă spre un punct fix printr-o forță care este totdeauna radială, cu o mărime care este funcție doar de r, distanța radială: $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r)$. Convingeți-vă că într-un astfel de cîmp integrala curbilinie în jurul oricărei curbe închise se anulează, implicînd $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Atunci trebuie să fie posibil a reprezenta $\mathbf{F}$ ca gradientul unei funcții de potențial $V(r)$. (Aceasta ne reamintește faptul că cîmpul electrostatic poate fi dedus dintr-un potențial nu se datorează proprietății invers pătratice a cîmpului unei sarcini elementare, dar numai faptului că cîmpul unui element de sarcină este un cîmp central și superpoziția are loc.) Potențialul Yukawa menționat în Problema 2.27 este asociat cu un tip particular de cîmp neinvers pătratic, unul care este important în fizica nucleară și în fizica particulelor elementare. Care este forța asociată cu potențialul Yukawa scris în forma $V = Ce^{-\lambda r}/r$, unde C și λ sînt constante? Făcînd $\lambda \to 0$ obținem din nou potențialul familiar $1/r$ al cîmpului electrostatic. Arătați că dacă $\lambda > 0$, forța la orice distanță pentru un C dat este mai mică decît dacă $\lambda = 0$. Cantitatea $1/\lambda$ are dimensiunile de lungime, și este adesea numită „raza de acțiune" a forței. Ce ar trebui să ia locul ecuației lui Poisson pentru surse care produc astfel de cîmpuri?

2.29. Raționamentul prin care am arătat că un cîmp electrostatic nu poate menține o particulă încărcată în echilibru stabil depinde în esență de natura invers-pătratică a forței Coulomb. Presupuneți că forța dintre sarcini variază ca $r^{-1,5}$ și încercați să imaginați un aranjament de sarcini care va menține o sarcină pozitivă în echilibru stabil. Idem pentru forța $\sim r^{-2,5}$.

Energia înmagazinată în cîmpul a două sarcini concentrate egale.

2.30. Să considerăm cîmpul electric a doi protoni la distanța b unul de altul. După ecuația 2.36 (pe care am enunțat-o dar nu am demonstrat-o) energia potențială a sistemului ar trebui să fie dată de

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathbf{E}^2\,dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathbf{E}_1^2\,dv + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathbf{E}_2^2\,dv + \varepsilon_0\int \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\,dv$$

unde $\mathbf{E}_1$ este intensitatea cîmpului uneia dintre particule și $\mathbf{E}_2$ pentru cealaltă. Prima dintre cele trei integrale din dreapta ar putea fi numită „energie proprie electrică" a unui proton; o proprietate intrinsecă a particulei, care depinde de mărimea și structura protonului. Am neglijat totdeauna o astfel de energie în calculul energiei potențiale a unui sistem de sarcini, prin presupunerea că ea este constantă; același lucru se petrece pentru cea de-a doua integrală. A treia integrală implică distanța dintre sarcini. Dezvoltați cea de-a treia integrală în niște coordonate convenabile, și arătați, fără a o evalua de fapt, că trebuie să se poată exprima ca $Ce^2/4\pi\varepsilon_0 b$, unde C este o constantă pur numerică, valoarea unei integrale definite care implică doar mărimi adimensionale. Dacă ecuația 2.36 este corectă ce valoare trebuie să aibă C? Știm că ecuația 2.36 este corectă într-un caz special, acela al sarcinii superficiale sferice pe care l-am lucrat în detaliu. Vedeți dacă puteți transforma aceasta într-o dovadă a corectitudinii ecuația 2.36 printr-un raționament care folosește superpoziția. Dacă este așa, veți fi stabilit incidental valoarea integralei dumneavoastră definite. (Dacă vă stimulează rezolvarea unei integrale definite, ați putea încerca să o evaluați pe aceasta, sau să o reduceți la una pe care o puteți găsi într-o tabelă de integrale definite. Nu este una ușoară.)

Capitolul 3

O observație generală despre forțele electrostatice.

3.18. (a) Arătați că pătratul unei diferențe de potențial $4\pi\varepsilon_0(\varphi_2 - \varphi_1)^2$ are aceleași dimensiuni ca o *forță*. Aceasta ne spune că forțele electrostatice dintre corpuri vor fi în mare parte determinate, ca ordin de mărime, de diferențele de potențial implicate. Care este ordinul de mărime al forței la care vă așteptați cu o diferență de potențial de 1 volt între două obiecte diferite? (b) Diferențele de potențial practic realizabile sînt destul de sever limitate, din motive care nu au nimic de-a face cu structura materiei. Cea mai înaltă diferență de potențial obținută de om este aproximativ 10^7 volți, obținută printr-un generator electrostatic Van de Graaff operînd la presiune înaltă. (Acceleratorii de giga-electronvolt nu implică

diferenţe de potenţial de acea mărime.) Cîte kilograme-forţă sînt de aşteptat să fie asociate cu un megavolt pătratic? Aceste consideraţii vă pot sugera de ce motoarele electrostatice nu şi-au găsit multe aplicaţii.

3.19. Imaginaţi-vă planul xy, planul xz şi planul yz făcute din metal şi sudate împreună la intersecţii. O sarcină punctuală Q este situată la distanţa d de la fiecare dintre plane. Descrieţi printr-o schiţă configuraţia „sarcinilor imagine" de care aveţi nevoie pentru a satisface condiţiile la limită. Care este direcţia şi mărimea forţei care acţionează asupra sarcinii Q?

Un condensator cilindric.

3.20. (a) Găsiţi capacitatea unui condensator care constă din doi cilindri coaxiali, de raze a şi b, şi lungime L. Presupuneţi $L \gg b - a$, astfel încît corecţiile de capăt pot fi neglijate. Verificaţi rezultatul arătînd că dacă spaţiul dintre cilindri, $b - a$, este foarte mic în comparaţie cu raza, formula dumneavoastră se reduce la aceea care ar putea fi obţinută prin folosirea formulei pentru condensatorul plan-paralel.

(b) Un cilindru de 5,0 cm diametru exterior atîrnă, cu axa sa verticală, de unul din braţele unei balanţe. Porţiunea de jos a cilindrului suspendat este înconjurată de un cilindru staţionar, coaxial, cu diametrul interior 7,5 cm. Calculaţi mărimea forţei care tinde să atragă cilindrul suspendat în jos cînd diferenţa de potenţial dintre cei doi cilindri este 5 kV.

Posibilitatea unui salt de potenţial la suprafaţa unui conductor. (De fapt, ceva asemănător există la suprafaţa unui conductor; este ceea ce reţine electronii de conducţie să se împrăştie!).

3.21. În § 3.3 am trecut destul de uşor peste problema valorii absolute a potenţialului în *interiorul* materiei conductoare. A fost suficient pentru raţionamentul nostru să nu existe nici un cîmp în interiorul materialului, adică, potenţialul să fie constant. În realitate poate exista un salt de potenţial la interfaţa dintre doi conductori în vid, cum se indică în figură. Arătaţi că un astfel de salt $\Delta\varphi$, dacă este acelaşi peste toată suprafaţa-frontieră, nu modifică concluzia noastră că dacă nu există nici un cîmp electric în interiorul mediului conductor, nu poate apare nici o componentă tangenţială a lui E imediat în afară în vid. Puteţi folosi faptul că integrala curbilinie a lui $\mathbf{E}$ în jurul oricărei curbe închise.

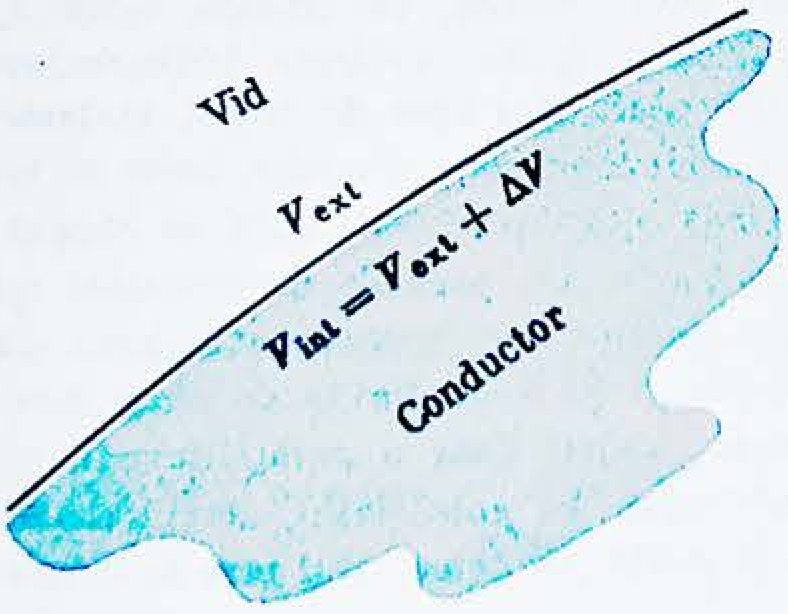


Fig. la problema 3.21.

diferenţe de potenţial de acea mărime.) Cîte kilograme-forţă sînt de aşteptat să fie asociate cu un megavolt pătratic? Aceste consideraţii vă pot sugera de ce motoarele electrostatice nu şi-au găsit multe aplicaţii.

3.19. Imaginaţi-vă planul xy, planul xz şi planul yz făcute din metal şi sudate împreună la intersecţii. O sarcină punctuală Q este situată la distanţa d de la fiecare dintre plane. Descrieţi printr-o schiţă configuraţia „sarcinilor imagine" de care aveţi nevoie pentru a satisface condiţiile la limită. Care este direcţia şi mărimea forţei care acţionează asupra sarcinii Q?

Un condensator cilindric.

3.20. (a) Găsiţi capacitatea unui condensator care constă din doi cilindri coaxiali, de raze a şi b, şi lungime L. Presupuneţi $L \gg b - a$, astfel încît corecţiile de capăt pot fi neglijate. Verificaţi rezultatul arătînd că dacă spaţiul dintre cilindri, $b - a$, este foarte mic în comparaţie cu raza, formula dumneavoastră se reduce la aceea care ar putea fi obţinută prin folosirea formulei pentru condensatorul plan-paralel.

(b) Un cilindru de 5,0 cm diametru exterior atîrnă, cu axa sa verticală, de unul din braţele unei balanţe. Porţiunea de jos a cilindrului suspendat este înconjurată de un cilindru staţionar, coaxial, cu diametrul interior 7,5 cm. Calculaţi mărimea forţei care tinde să atragă cilindrul suspendat în jos cînd diferenţa de potenţial dintre cei doi cilindri este 5 kV.

Posibilitatea unui salt de potenţial la suprafaţa unui conductor. (De fapt, ceva asemănător există la suprafaţa unui conductor; este ceea ce reţine electronii de conducţie să se împrăştie!).

3.21. În § 3.3 am trecut destul de uşor peste problema valorii absolute a potenţialului în *interiorul* materiei conductoare. A fost suficient pentru raţionamentul nostru să nu existe nici un cîmp în interiorul materialului, adică, potenţialul să fie constant. În realitate poate exista un salt de potenţial la interfaţa dintre doi conductori în vid, cum se indică în figură. Arătaţi că un astfel de salt $\Delta\varphi$, dacă este acelaşi peste toată suprafaţa-frontieră, nu modifică concluzia noastră că dacă nu există nici un cîmp electric în interiorul mediului conductor, nu poate apare nici o componentă tangenţială a lui E imediat în afară în vid. Puteţi folosi faptul că integrala curbilinie a lui **E** în jurul oricărei curbe închise.

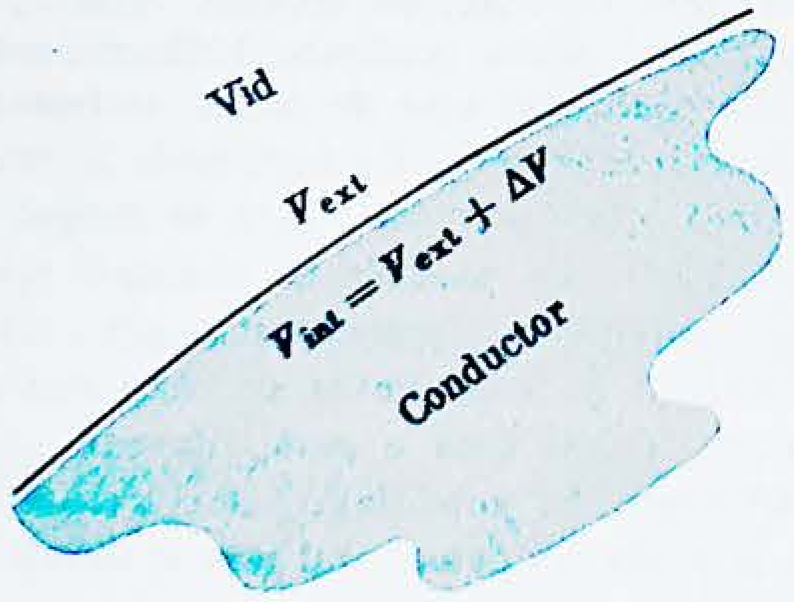


Fig. la problema 3.21.

Un mod de a analiza sistemul unei sfere conductoare și unei sarcini punctuale.

3.22. Această problemă este o ilustrare a metodei de „potrivire a frontierelor la soluție" pe care am explicat-o în discuția noastră a sarcinii punctuale în fața planului. De fapt rezultatul pe care urmează să-l dezvoltăm este poate cea mai cunoscută realizare a acestei tehnici destul de limitate.

(a) Să considerăm două sarcini punctuale de semn opus și mărimi *negale*. Să presupunem că cea de mărime mai mare este pozitivă și să o situăm în originea coordonatelor. Situați cealaltă sarcină pe axa x la $x = b$. Mai întîi, determinați două puncte pe axa x unde potențialul φ este zero, nesocotind punctele $x = +\infty$ și $x = -\infty$. Acum să considerăm o sferă cu centrul pe axa x care trece prin aceste două puncte. Dovediți că potențialul este de asemenea zero pe toate punctele acestei suprafețe sferice. Există și alte suprafețe echipotențiale sferice? Cărei probleme, implicînd o sarcină punctuală și o sferă conductoare, i-am găsit soluția?

(b) Nu sîntem încă gata să tratăm orice problemă cu o sarcină punctuală și o sferă conductoare, deoarece mărimea sarcinii punctuale, mărimea sarcinii pe sferă și raportul razei sferei la distanța pînă la sarcina punctuală ar putea să nu fie compatibil cu cîmpul așa cum îl avem pînă acum. De exemplu, cum ați obține cîmpul unei sarcini punctuale q la o oarecare distanță de la o sferă care poartă sarcina totală *zero*? Acesta se *poate* obține printr-un pas adițional simplu, dacă vă veți gîndi folosind superpoziția. Încercați toate acestea pe un exemplu particular: O sarcină punctuală de $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ Coulombi este situată la 20 cm de la centrul unei sfere metalice de rază 10 cm și sfera este neîncărcată, adică, sarcina sa totală este zero. Care este intensitatea cîmpului electric la suprafața sferei în punctul cel mai apropiat de sarcina punctuală și în punctul diametral opus? Dacă obțineți răspunsurile corecte, și înțelegeți cum le-ați obținut, puteți considera că stăpîniți metoda numită „inversiunea în sferă".

R. 75 volți/cm; 11,6 volți/cm

Cilindri circulari paraleli; o clasă de probleme electrostatice bidimensionale care pot fi imediat rezolvate.

3.23. O problemă cu valori la limită *bidimensională* este aceea a doi cilindri conductori circulari paraleli, ca de exemplu două țevi metalice, de lungime infinită, și la potențiale diferite. Aceste probleme bidimensionale se întîmplă să fie mult mai ușor de tratat matematic decît problemele tridimensionale. De fapt, cheia la toate problemele de tipul „două țevi" este dată de cîmpul în jurul a două sarcini lineare paralele de densitate egală și opusă. *Toate* suprafețele echipotențiale în acest cîmp sînt cilindrii circulari! Și toate liniile de cîmp sînt de asemenea circulare. Vedeți dacă o puteți dovedi. Este cel mai ușor de lucrat cu potențialul, dar trebuie să observați că nu se poate lua potențialul zero la infinit în

sisteme bidimensionale. Fie potenţialul zero pe linia la mijlocul dintre cele două sarcini liniare, adică în origine în diagrama de secţiune transversală. Potenţialul în orice punct este suma potenţialelor calculate pentru fiecare sarcină lineară separat. Aceasta vă va conduce repede la descoperirea că potenţialul este simplu proporţional cu ln (r_2/r_1) şi este în consecinţă constant pe o curbă descrisă de un punct ale cărui distanţe de la două puncte sînt în raport constant. Faceţi o schiţă arătînd cîteva din echipotenţiale.

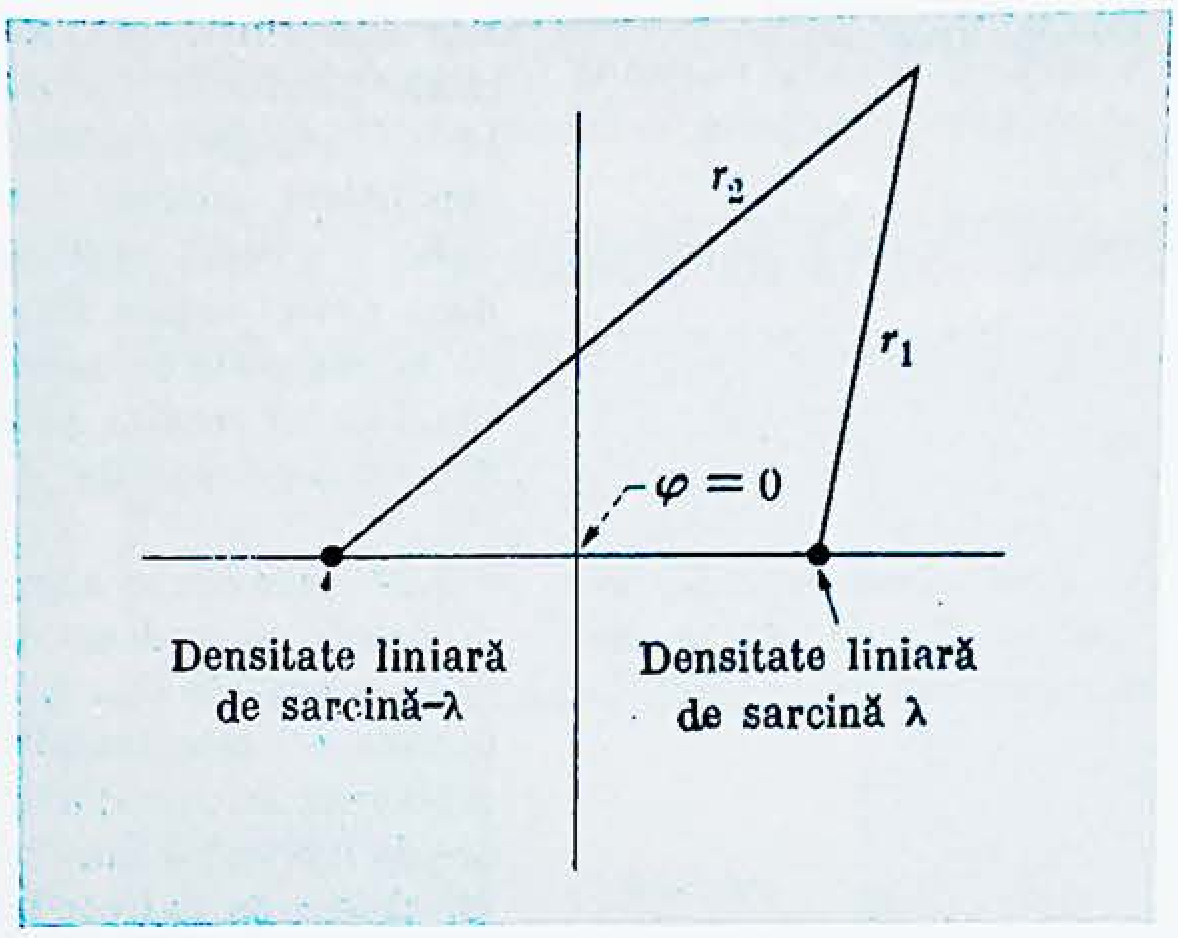


Fig. la problema 3.23.

Studiu al cîmpului de quadrupol.

3.24. Cîmpul electric arătat în figura 2.2 are aplicaţii practice importante la focalizarea fasciculelor de particule încărcate. El este numit un cîmp de quadrupol. Care este ecuaţia pentru o suprafaţă echipotenţială şi cum arată ea? Descrieţi cum aţi putea produce o bună aproximaţie la acest cîmp într-o regiune limitată, desigur — folosind conductori la diferite potenţiale.

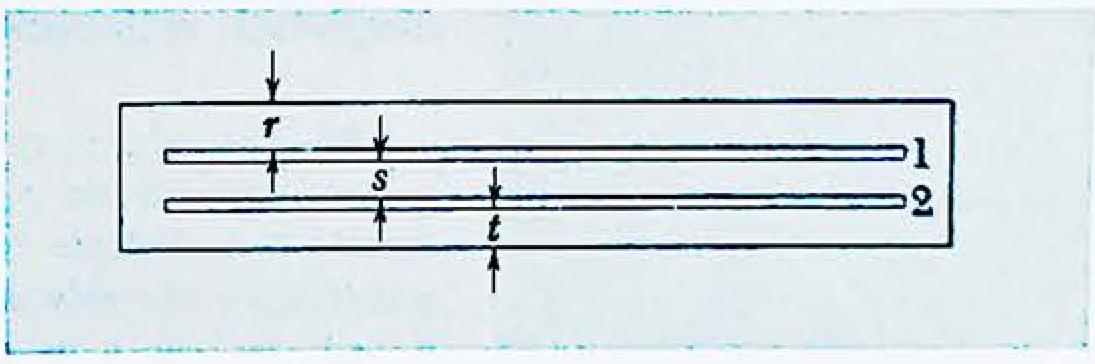


Fig. la problema 3.25

Exemplu: coeficienţi de capacitate.

3.25. Figura arată în secţiune transversală o cutie plană metalică în care se află două plăci plane, 1 şi 2, fiecare de arie A. Diferitele distanţe care separă plăcile

una de alta şi de feţele de sus şi de jos ale cutiei, notate r, s şi t în figură, sînt presupuse mici în comparaţie cu lăţimea şi lungimea plăcilor, astfel încît neglijarea cîmpurilor de margine la estimarea sarcinilor pe plăci va fi o aproximaţie bună. În această aproximaţie, calculaţi coeficienţii de capacitate C_{11}, C_{22} şi C_{12}. Aţi putea să calculaţi direct şi C_{21}, pentru a vedea că iese egal cu C_{12} cum se afirmă prin teorema generală discutată în problema 3.27.

Coeficienţi de capacitate: proprietăţi generale.

3.26. Este posibil a avea conductori aranjaţi sau modelaţi astfel încît unul sau mai mulţi coeficienţi de capacitate „mutuală" C_{jk}, să fie pozitivi? Aceasta ar însemna că un potenţial pozitiv pe conductorul j, cu toţi ceilalţi conductori, inclusiv conductorul k puşi la pămînt, dezvoltă o sarcină pozitivă netă pe conductorul k. Vedeţi dacă puteţi obţine fie (a) un aranjament care ar urma să se comporte în acest mod, sau (b) un argument convingător că aceasta nu este posibil. Este posibil ca unul dintre coeficienţii de „auto"-capacitate C_{jj} să fie negativ?

O demonstraţie că C_{12} este egal cu C_{21}, bazată pe conservarea energiei.

3.27. Iată cîteva sugestii care ar trebui să vă îngăduie să construiţi o demonstraţie că C_{12} trebuie să fie totdeauna egal cu C_{21}. Ştim că atunci cînd un element de sarcină dQ este transferat de la potenţialul zero la un conductor la potenţialul φ, o oarecare sursă] exterioară are de furnizat o cantitate de energie φdQ. Să considerăm un sistem de doi conductori în care cei doi conductori au fost încărcaţi astfel încît potenţialele lor sînt φ_{1f} şi φ_{2f} (f pentru „final"). Această condiţie ar putea fi atinsă, pornind dintr-o stare cu toate sarcinile şi potenţialele zero, în multe moduri diferite. Două căi posibile sînt de interes particular:

(a) Ţineţi φ_2 la zero în timp ce φ_1 se creşte treptat de la zero la φ_{1f}; apoi creşteţi φ_2 de la zero la φ_{2f} ţinînd φ_1 la φ_{1f}.

(b) Efectuaţi un progam asemănător în care rolurile lui 1 şi 2 sînt schimbate, adică, creşteţi φ_2 de la zero la φ_{2f} mai întîi, şi aşa mai departe.

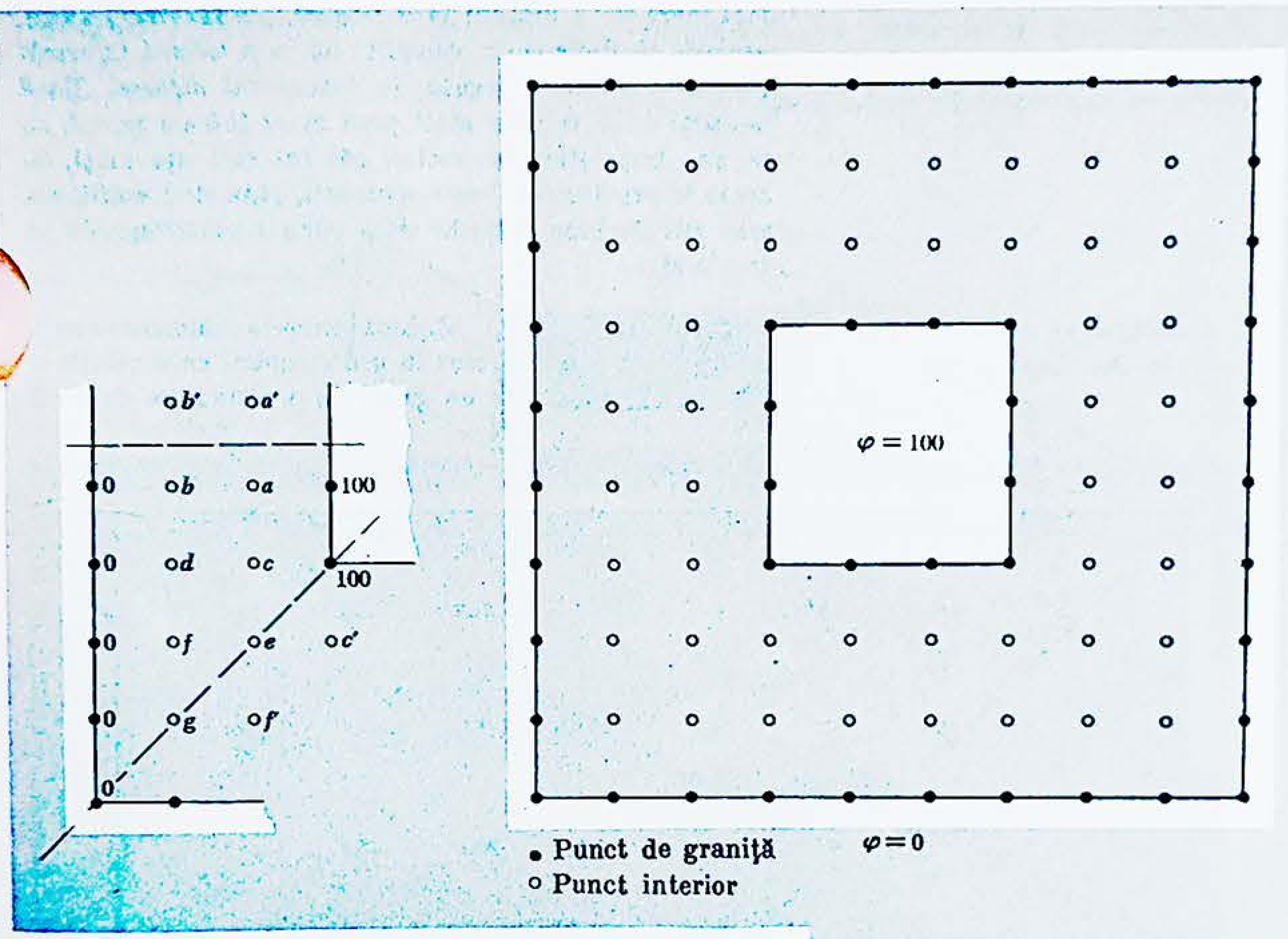
Calculaţi lucrul total efectuat de sursele exterioare, pentru fiecare dintre programele de încărcare. Apoi completaţi raţionamentul.

Media unei funcţii armonice pe şase puncte situate simetric.

3.28. Fie $\varphi(x, y, z)$ orice funcţie care poate fi dezvoltată în serie de puteri în jurul punctului (x_0, y_0, z_0). Scrieţi o dezvoltare în serie Taylor pentru valoarea lui φ în fiecare din cele şase puncte $(x_0 + \delta, y_0, z_0)$, $(x_0 - \delta, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0 + \delta, z_0)$, $(x_0, y_0 - \delta, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0 + \delta)$, $(x_0, y_0, z_0 - \delta)$ care înconjoară în mod simetric punctul (x_0, y_0, z_0) la distanţa δ. Arătaţi că dacă φ satisface ecuaţia lui Laplace, media acestor şase valori este egală cu $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ pînă la termenii de ordinul trei în δ.

Exemplu: Metoda de relaxare pentru aproximarea unei soluţii a ecuaţiei lui Laplace.

3.29. Iată cum se poate rezolva ecuaţia lui Laplace aproximativ, pentru condiţii la limită date, folosind nimic altceva decît aritmetică. Metoda este *metoda de relaxare* menţionată în § 3.8, şi se bazează pe rezultatul problemei 3.28. Pentru simplitate luăm un exemplu bidimensional. În figură se află două frontiere echipotenţiale pătrate, una în interiorul celeilalte. Aceasta ar putea fi o secţiune transversală printr-un condensator alcătuit din două conducte metalice pătrate de mărimi diferite. Problema este de a găsi potenţialul pe o reţea de puncte ceea ce va fi o bună aproximaţie pentru funcţia de potenţial adevărată, $\varphi(x, y)$, în aceste puncte. Alegem o reţea cu puţine puncte pentru a menţine operaţiile în



Se înlocuieşte valoarea într-un punct interior cu $\frac{1}{4}$ × suma pentru cele patru puncte vecine $c \to \frac{1}{4}(100 + a + d + e)$; se menţine $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ şi $f' = f$ valorile de pornire sugerate: a = 60, b = 30, c = 50, d = 25, e = 40, f = 20, g = 10

Fig. la problema 3.29

limite acceptabile. Să atribuim, în mod arbitrar, potenţialul 100 frontierei interioare şi 0 celei exterioare. Toate punctele de pe aceste frontiere rămîn la aceste valori. În principiu, putem începe cu orice valori pe punctele interioare; facem economie de timp totuşi printr-o alegere inteligentă. O mulţime de valori iniţiale este sugerată în figură. Poate puteţi alege altele mai bune. Desigur vă veţi folosi de simetrie; avem de calculat doar 7 valori interioare. Acum parcurgeţi pur şi simplu reţeaua într-o manieră sistematică înlocuind fiecare valoare în punctele interioare prin media celor patru vecini. Opriţi-vă cînd oboseşti, sau cînd toate schimbările rezultate într-o parcurgere a reţelei sînt satisfăcător de mici. Un moment potrivit de oprire ar putea fi cînd nu mai apare nici o schimbare mai mare de 1 unitate la o trecere. „Relaxarea", adică, variaţia în distribuţia valorilor de la o trecere la următoarea, este strîns legată de fenomenul *difuziei*. Dacă începeţi cu o valoare mult prea mare într-un punct, ea se va „împrăştia" la vecinii săi cei mai apropiaţi, de acolo la următorii cei mai apropiaţi, pînă cînd umflătura este atît de bine netezită cît o permit constrîngerile pe frontieră.

Soluţia pe calculator a ecuaţiei lui Laplace.

3.30. După ce aţi obţinut propria dumneavoastră soluţie, puteţi fi interesat în a o compara cu o soluţie a aceleiaşi probleme pe un grilaj cu o distanţare de două

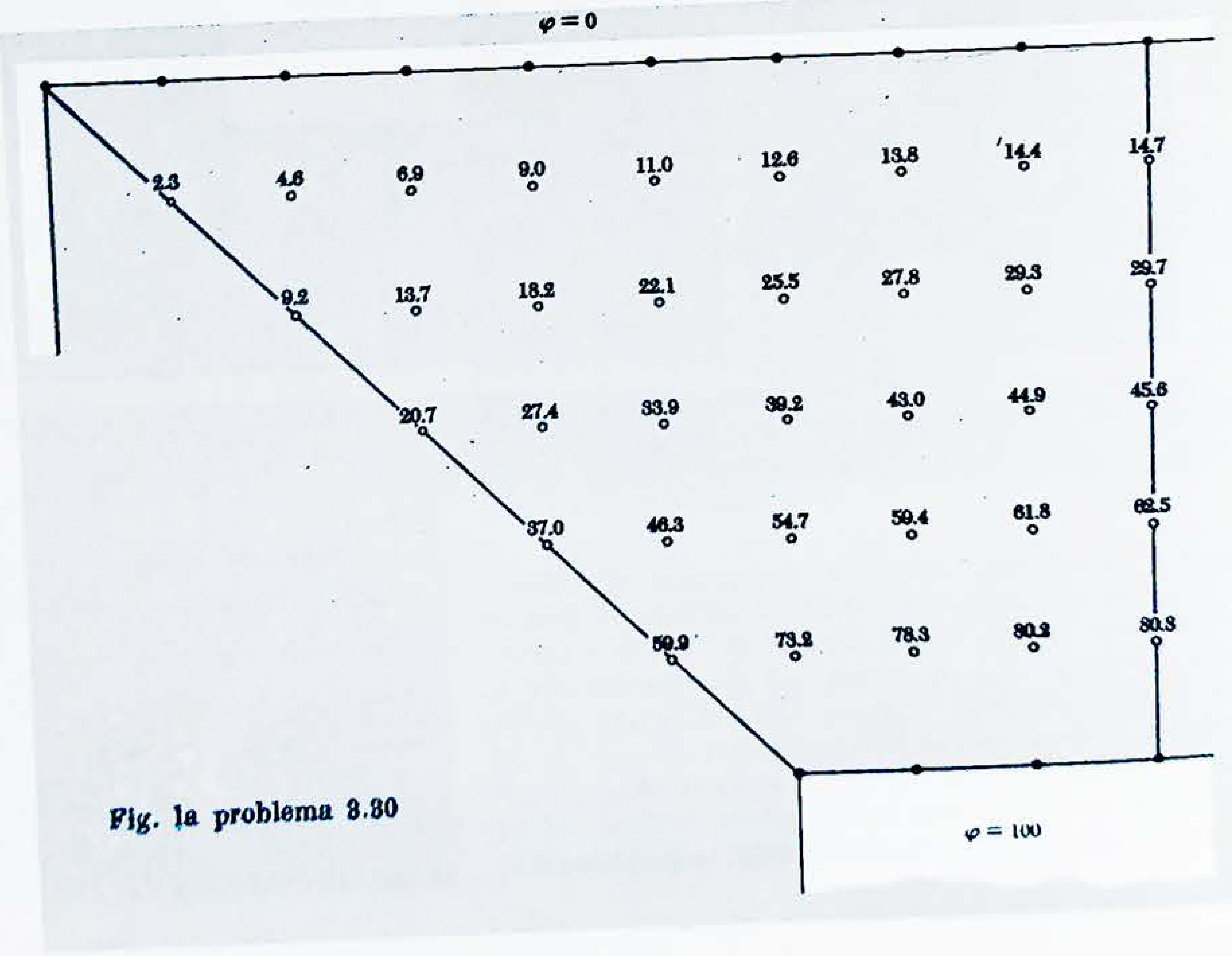


Fig. la problema 3.30

ori mai mică, obținut pe calculator (vezi figura). Calculatorul a fost programat să se oprească atunci cînd o nouă trecere nu schimba nici o valoare prin mai mult de 0,1. Calculatorul a făcut 41 de treceri peste rețea și a avut nevoie de 3 secunde pentru tot calculul. Puneți o bucată de hîrtie de copiat peste figură și localizați una sau două curbe echipotențiale, folosind interpolarea liniară între puncte. Cum ați putea afla, din datele figurii, capacitatea pe unitate de lungime a unui condensator cu această secțiune transversală?

Întrebări pentru discuție: Semnificația fizică a metodei de relaxare.

3.31. Modul în care variază potențialul în spațiul dintre doi cilindri încărcați are un analog exact într-un fenomen fizic diferit, forma luată de o membrană elastică. Imaginați-vă rețeaua de puncte ilustrată în Problema 3.29, incluzînd punctele de pe frontieră, ca fiind conectate prin benzi de cauciuc toate întinse la aceeași tensiune. Acum imaginați frontiera interioară ridicată, ca în ilustra-

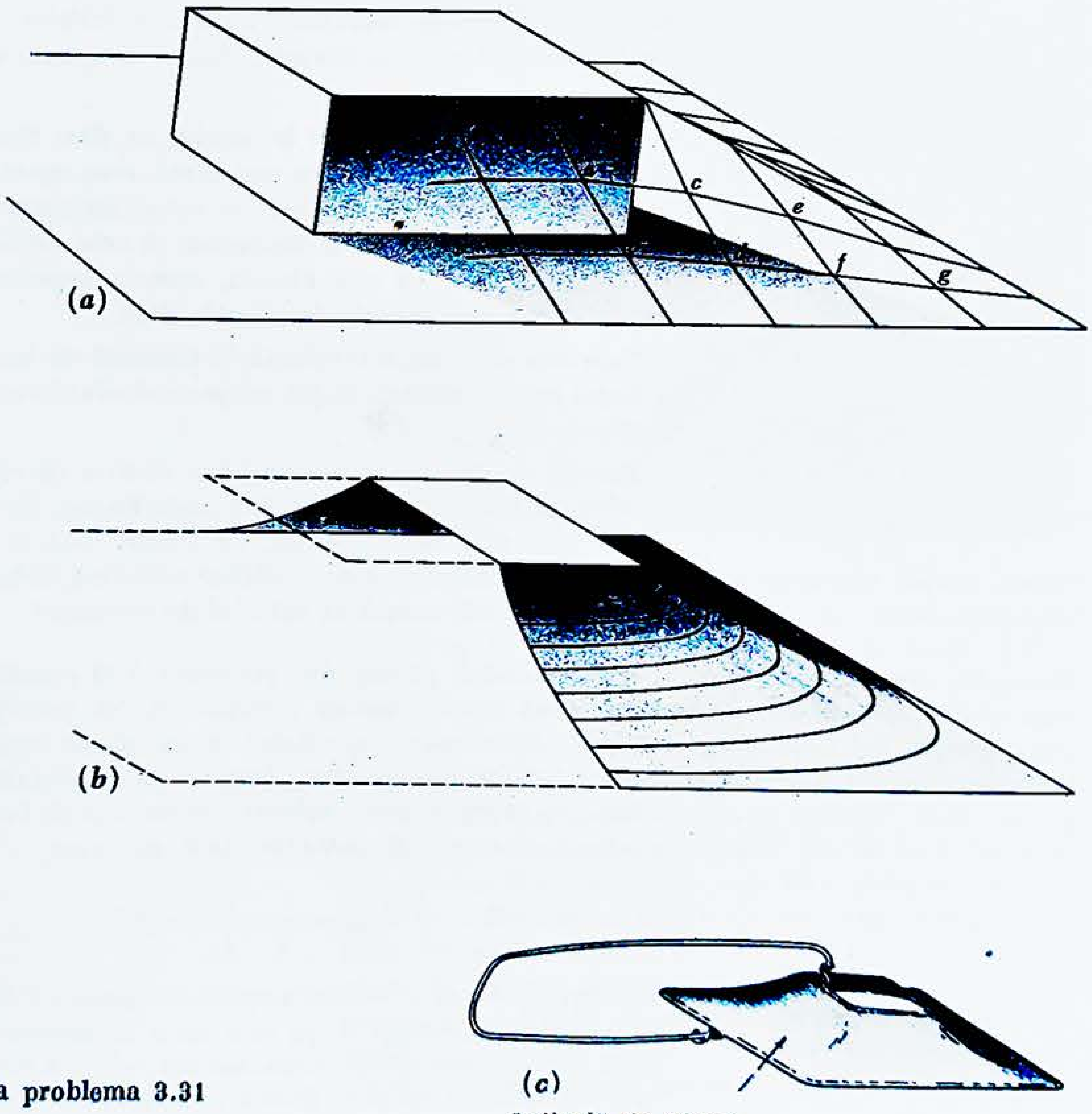


Fig. la problema 3.31

ție pentru această problemă, la o înălțime reprezentînd diferența de potențial φ_0. Presupunînd că toate pantele sînt destul de mici pentru ca unghiurile ≈ tangentele etc., înălțimea de echilibru a fiecărui punct de legătură, sau nod, va fi tocmai media înălțimilor celor patru vecini. De ce?

Dacă aveți o membrană elastică continuă în locul unei plase, înălțimea suprafeței urmează ecuația lui Laplace iar ridicarea cadrului interior face suprafața să ia forma ilustrată în partea (b). Aceasta este exact soluția pentru potențialul electrostatic între doi cilindrii pătrați, și este de asemenea forma unei pelicule de săpun între două cadre pătratice, schițată în partea (c). Imaginea peliculei de săpun sau rețeaua benzilor de cauciuc este cîteodată de ajutor pentru a anticipa natura soluției unei probleme cu condiții la limită dintr-un alt domeniu al fizicii. În felul acesta am obținut valorile de pornire sugerate pentru calculul de relaxare. Compararea părților (*b*) și (*a*) ale figurii arată de ce nu ne putem aștepta ca o soluție pe o rețea să ne dea toate detaliile. Căderea abruptă a potențialului în imediata vecinătate a colțului interior — unde de fapt cîmpul electric devine infinit — nu poate fi pusă în evidență.

Cu principiul variațional în minte, ne dăm seama că sistemele elastice, membrane sau benzi, s-au așezat încît să minimizeze energia elastică. În cazul membranei sau peliculei de săpun, aceasta înseamnă că aria membranei este minimă. Forma este simplu, aceea a suprafeței de arie minimă care unește frontierele date.

Care este mărimea echivalentă, în sistemul electrostatic, a forței totale orientate în jos asupra cadrului interior, în sistemul elastic?

Gîndiți despre înțelesul calculelor noastre de relaxare în termeni mecanici. Imaginați-vă că în fiecare din punctele rețelei sînt ridicați stîlpi, iar fiecare nod al plasei este legat de stîlpul său la o înălțime arbitrară, la început. Ce proces se efectuează în calculul de relaxare?

Exemplu: Metoda variațională pentru aproximarea soluției ecuației lui Laplace cu valori pe frontieră date.

3.32. Cilindrii pătrați din problema 3.29 constituie o temă bună pentru *metoda variațională*. Să presupunem că vrem să estimăm capacitatea pe unitate de lungime a unui astfel de condensator. Aceasta este echivalent cu estimarea energiei înmagazinate, pe unitate de lungime, pentru o diferență de potențial dată, deoarece

$$U = \frac{1}{2} C\varphi_{12}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int |\nabla\varphi|^2 dv .$$

Problema este de a evalua această integrală cu funcția de potențial adevărată φ, pe care nu o cunoaștem, înlocuită printr-o funcție de încercare $\psi(x, y)$. ψ trebuie să îndeplinească condițiile de frontieră impuse; adică, trebuie

să se reducă la φ_0 pe pătratul mic şi la 0 pe pătratul mare. În rest sîntem liberi să o alegem cum dorim. Strategia este de a alege o funcţie pentru care integrarea se poate efectua şi una care se comportă calitativ ca soluţie reală. Drept prin pas sugerăm o simplă funcţie liniară în fiecare

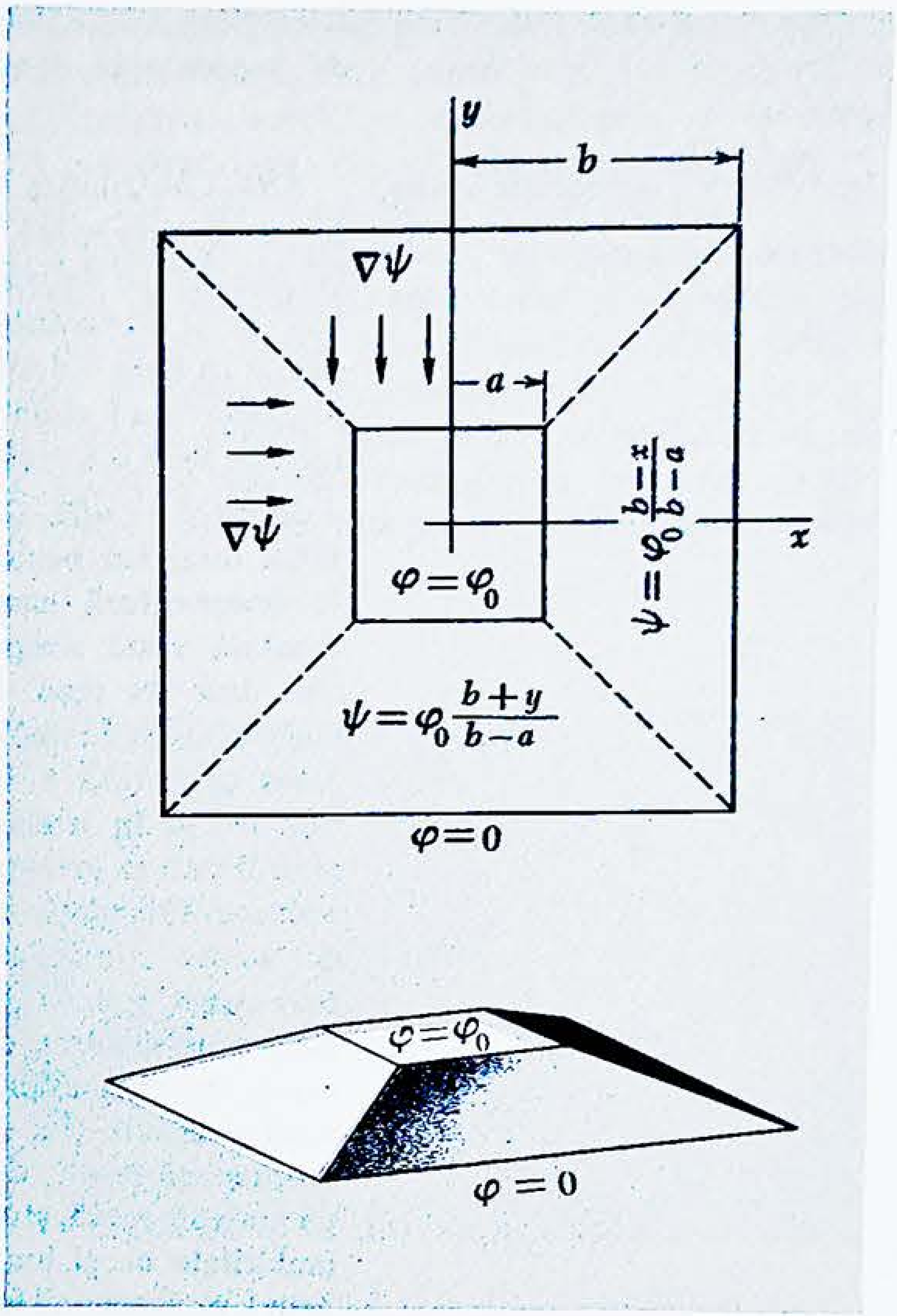


Fig. la problema 3.32

din cele patru părţi în care diagonalele împart spaţiul interior. Referindu-ne la figură, cu 2a latura pătratului interior şi 2b latura pătratului exterior, luaţi

$$\psi = \varphi_0 \frac{b - x}{b - a}$$

în spaţiul din dreapta etc. Graficul lui ψ este un trunchi de piramidă. Acum deşi $\nabla^2\psi = 0$ aproape peste tot, ψ nu satisface ecuaţia lui Laplace. De ce nu? Calculaţi integrala lui U şi obţineţi în acest fel o estimare a capacităţii. Va fi capacitatea adevărată mai mică sau mai mare decît estimarea dumneavoastră? Vă aşteptaţi ca estimarea să fie mai aproape de adevăr pentru $a \ll b$ sau pentru $(b - a) \ll b$? Dacă ar fi nevoie de o aproximaţie mai bună, aţi putea sugera o funcţie de încercare îmbunătăţită care să fie încă manipulabilă?

Întrebare pentru discuţie.

4.20. Dacă situaţia este astfel încît legea lui Ohm nu se mai aplică din motivul discutat în § 4.5, v-aţi aştepta ca o creştere de 10 procente în cîmpul electric să producă o creştere mai mică, sau mai mare decît o creştere de 10 procente în densitatea de curent?

Introducere a mobilităţii ionice.

4.21. Contribuţia unui ion la conductibilitatea electrică poate fi exprimată printr-o mărime numită *mobilitatea* ionului. După definiţie, are dimensiunile de viteză împărţită prin intensitatea de cîmp electric. Ea este viteza medie pe care o dobîndeşte un astfel de ion cînd este sub acţiunea unui cîmp de intensitate unitate. Cu notaţiile folosite în § 4.4 mobilitatea, pe care o vom nota μ, ar fi dată de $E = \bar{u}/E$. Cum v-aţi aştepta să depindă mobilitatea unui ion pozitiv într-un gaz de densitatea gazului la temperatură constantă? Există o literatură experimentală vastă asupra mobilităţilor ionice. Mobilităţile sînt date în mod obişnuit în cm/s pe volt/cm, sau cm^2/volt-sec. În heliu foarte pur la 1 atmosferă mobilitatea observată a ionilor de heliu He^+ este 5,1 cm^2/volt-sec şi în acelaşi gaz mobilitatea ionilor negativi, care îi putem presupune ca fiind electroni, este 500 cm^2/volt-sec. Calculaţi valorile lui τ_+ şi τ_- care sînt implicate de aceste cifre. Dacă putem asocia τ cu un timp de traversare a unui „drum liber", este drumul mai lung pentru un electron sau pentru un ion pozitiv? Ce fracţiune din conductibilitatea heliului ionizat este dată de ionii pozitivi? (În cele mai multe gaze electronii liberi se ataşează repede de atomi. Astfel îngreunaţi, electronul nu mai este rapid, şi aceşti ioni negativi au în mare aceeaşi mobilitate ca şi ionii pozitivi. Cîteva gaze, printre care heliul, nu formează ioni negativi, prin ataşarea de electroni şi de aceea sînt ideali pentru experienţe asupra mobilităţii electronice reale.)

Întrebare pentru discuţie.

4.22. Un ion care înaintează printr-un gaz de atomi neutrii sub influenţa unui cîmp electric se comportă oarecum ca o bilă într-un automat cu bile şi cuie, pentru jocuri de noroc. Dezvoltaţi analogia. Care sînt asemănările şi deosebirile? Formulaţi legea lui Ohm echivalentă pentru modelul automatului cu bile şi cuie. Imaginaţi-vă că vi se dă sarcina de a proiecta un model de demonstraţie pentru un muzeu ştiinţific. Cum ar trebui proiectată reţeaua de cuie pentru a da reprezentarea bidimensională cea mai realistă a conducţiei ionice? Discutaţi probleme cum sînt situarea cuielor, elasticitatea cuielor, posibilitatea de a simula energia termică, posibilitatea de a reprezenta deopotrivă atît sarcinile pozitive cît şi cele negative.

Studiu al pulsului de curent datorat trecerii unei particule încărcate individual. Puncte esențiale pentru înțelegerea dispozitivelor de detecție a particulelor din fizica modernă. Mai întîi revedeți Problema 3.17.

4.23. Rezultatul Problemei 3.17 ne poate ajuta să înțelegem curgerea curentului într-un circuit, care în parte constă din particule încărcate care se mișcă prin spațiul dintre electrozi. Întrebarea este, care este natura curentului cînd doar *o* particulă traversează spațiul? (Dacă putem afla aceasta, putem descrie ușor orice curgere implicînd un număr mare de particule.) Considerăm circuitul simplu din figură, care constă din doi electrozi în vid legați printr-un scurt fir. Să presupunem că electrozii sînt la 2 mm depărtare. O particulă alpha relativ lentă, de sarcină $+2e$, este emisă de un nucleu radioactiv de pe placa din stînga. El se deplasează spre placa din dreapta cu o viteză constantă de 10^8 cm/sec și se oprește pe această placă. Faceți un grafic cantitativ al curentului prin final de legătură, reprezentînd curentul în funcție de timp. Faceți același lucru pentru o particulă alpha care se mișcă cu aceeași viteză dar la un unghi de 45° față de normală. (În realitate pentru pulsuri atît de scurte

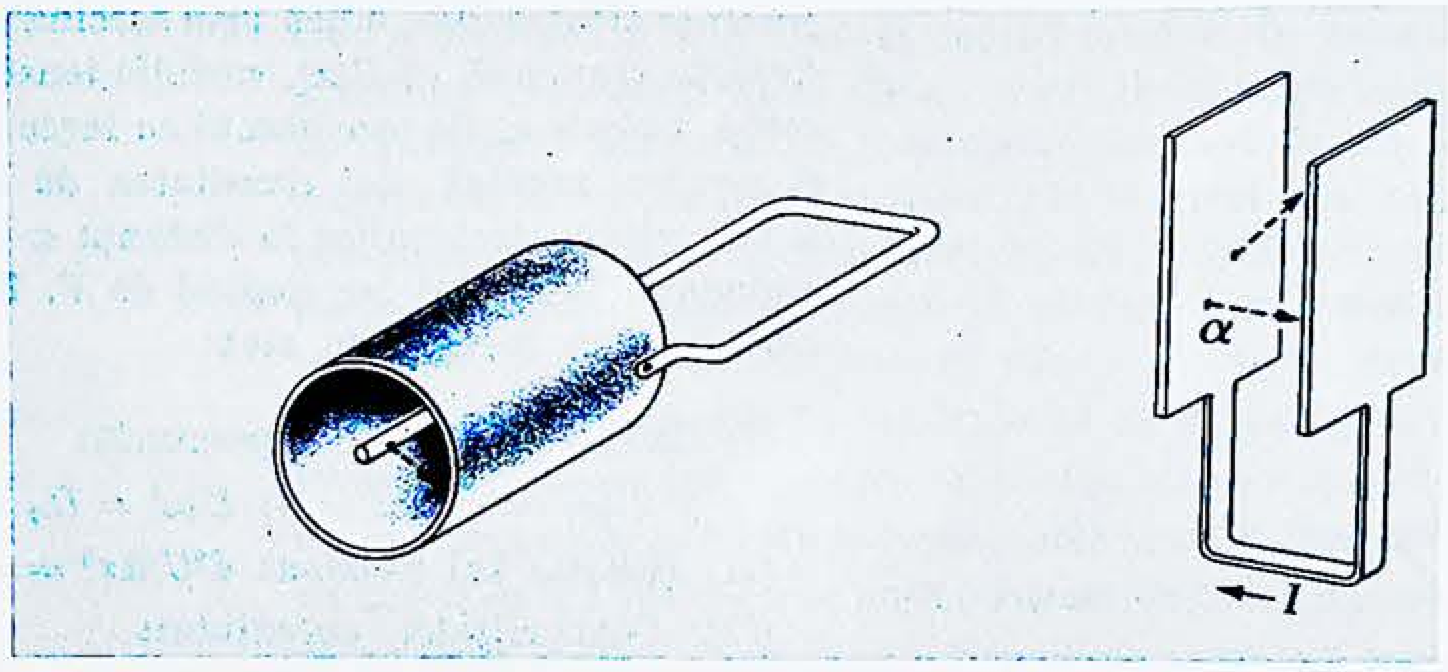


Fig. la problema 4.23

ca acesta inductanța firului de legătură, aici neglijată, ar modifica forma pulsului.) Să presupunem că aveam un aranjament cilindric de electrozi, particulele alfa fiind emise de pe un fir subțire de pe axa unui mic electrod cilindric. Ar avea pulsul de curent aceeași formă?

Aplicare a unor idei din problemele 4.21 și 4.23.

4.24. O cameră de ionizare constă dintr-o cutie metalică arătată în figură, conținînd argon la presiune atmosferică în care condiții mobilitățile ionilor pozitivi de argon și electronilor sînt 1,6 și 800 cm²/volt·sec, respectiv. Placa centrală care formează electrodul central este sprijinită pe un izolator și este conectată printr-o rezistență mare la un potențial de 500 de volți. Ea este de asemenea legată la un amplificator al cărui semnal de ieșire poate fi presupus proporțional curentului prin fir de la electrodul central, și poate fi văzut pe un osciloscop. Descrieți natura pulsurilor pe care v-ați aștepta să le vedeți pe

ecranul osciloscopului cînd o particulă de energie înaltă trece prin cameră, lăsînd o dîră de ioni de-a lungul traiectoriei. (Puteţi presupune că există mijloace de a ajusta baleiajul osciloscopului cu trecerea particulei.) Ce viteză de baleiaj ar fi de dorit pentru studiul pulsului?

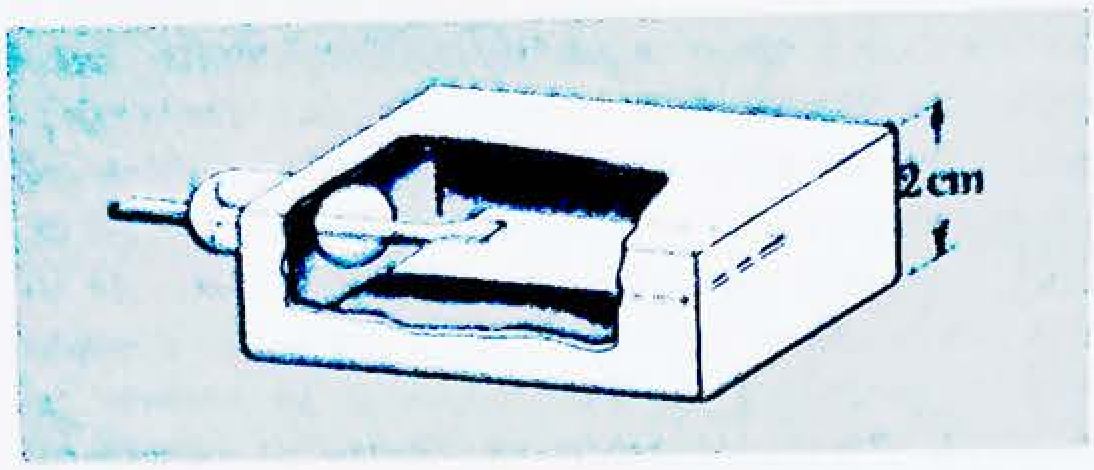


Fig. la problema 4.31

Dioda cu limitare de sarcină spaţială: o aplicaţie importantă a ecuaţiei lui Poisson; deducerea legii „trei pe doi".

4.25. Ne referim la figura 4.2 şi aţi face bine să vă încălziţi făcînd problema 4.4 dacă încă nu aţi făcut-o. Vom studia deplasarea electronilor în dioda de vid. Vom presupune, ca în problema 4.4 că electronii părăsesc catodul cu viteza iniţială zero, că potenţialul catodului este zero şi potenţialul anodului este U_0. Dar acum cîmpul electric dintre anod şi catod este vizibil afectat prin prezenţa electronilor, adică prin sarcina spaţială negativă. Aceasta înseamnă că $U(x)$, variaţia tensiunii între anod şi catod, trebuie să fie consistentă cu toate celelalte condiţii, şi acestea implică $\rho(x)$ densitatea de sarcină spaţială şi $v(x)$ viteza electronilor la distanţa x de la catod, care amîndouă la rîndul lor depind de V. Diferitele condiţii care trebuie îndeplinite sînt:

(I) Cădere de potenţial precizată:

$$U(x) = 0 \text{ la } x = 0; \quad U(x) = U_0 \text{ la } x = s.$$

(II) Ecuaţia lui Poisson: $d^2U/dx^2 = -\rho/\varepsilon_0$.

(III) Continuitatea curentului:

$$\rho v = J = -I/A \text{ (o constantă)}.$$

(IV) Dinamica electronului: $\frac{1}{2} mv^2 = eU(x)$.

Arătaţi cum ultimele trei ecuaţii conduc la o ecuaţie diferenţială care leagă U şi x, de forma $d^2U/dx^2 = K/U^{1/2}$, unde K este o constantă formată din diferitele constante din probleme. Căutăm situaţii ale acestei ecuaţii care vor îndeplini condiţia (I), condiţia la limită asupra lui $U(x)$. De fapt o întreagă familie de soluţii o vor îndeplini. Trebuie să folosim un argument fizic pentru a impune încă o restricţie. Sîntem interesaţi în cazul limită cînd, pentru U_0 dat, efectul repulsiv al sarcinii spaţiale este atît de mare încît să nu poată trece mai mulţi electroni *chiar dacă ar putea fi eliberaţi mai mulţi de la catod.* Trăsătura care caracterizează această condiţie este că cîmpul electric este zero, la catod. Gîndiţi-vă, de ce. Ce s-ar întîmpla dacă cîmpul nu era zero, şi pozitiv? Astfel că cerem $dU/dx = 0$ la $x = 0$. Pentru a găsi o soluţie

ecranul osciloscopului cînd o particulă de energie înaltă trece prin cameră, lăsînd o dîră de ioni de-a lungul traiectoriei. (Puteţi presupune că există mijloace de a ajusta baleiajul osciloscopului cu trecerea particulei.) Ce viteză de baleiaj ar fi de dorit pentru studiul pulsului?

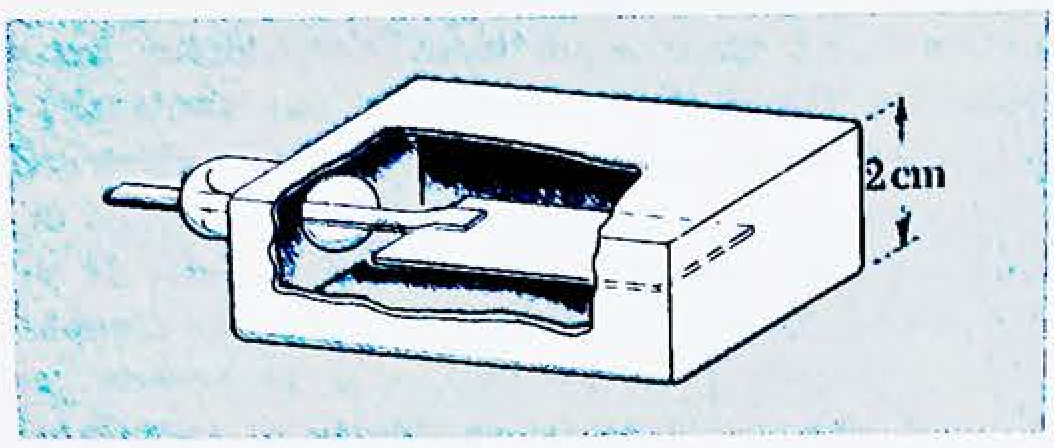


Fig. la problema 4.31

Dioda cu limitare de sarcină spaţială: o aplicaţie importantă a ecuaţiei lui Poisson; deducerea legii „trei pe doi".

4.25. Ne referim la figura 4.2 şi aţi face bine să vă încălziţi făcînd problema 4.4 dacă încă nu aţi făcut-o. Vom studia deplasarea electronilor în dioda de vid. Vom presupune, ca în problema 4.4 că electronii părăsesc catodul cu viteza iniţială zero, că potenţialul catodului este zero şi potenţialul anodului este U_0. Dar acum cîmpul electric dintre anod şi catod este vizibil afectat prin prezenţa electronilor, adică prin sarcina spaţială negativă. Aceasta înseamnă că $U(x)$, variaţia tensiunii între anod şi catod, trebuie să fie consistentă cu toate celelalte condiţii, şi acestea implică $\rho(x)$ densitatea de sarcină spaţială şi $v(x)$ viteza electronilor la distanţa x de la catod, care amîndouă la rîndul lor depind de V. Diferitele condiţii care trebuie îndeplinite sînt:

(I) Cădere de potenţial precizată:

$$U(x) = 0 \text{ la } x = 0; \; U(x) = U_0 \text{ la } x = s.$$

(II) Ecuaţia lui Poisson: $d^2U/dx^2 = -\rho/\varepsilon_0$.

(III) Continuitatea curentului:

$$\rho v = J = -I/A \text{ (o constantă).}$$

(IV) Dinamica electronului: $\frac{1}{2} mv^2 = eU(x)$.

Arătaţi cum ultimele trei ecuaţii conduc la o ecuaţie diferenţială care leagă U şi x, de forma $d^2U/dx^2 = K/U^{1/2}$, unde K este o constantă formată din diferitele constante din probleme. Căutăm situaţii ale acestei ecuaţii care vor îndeplini condiţia (I), condiţia la limită asupra lui $U(x)$. De fapt o întreagă familie de soluţii o vor îndeplini. Trebuie să folosim un argument fizic pentru a impune încă o restricţie. Sîntem interesaţi în cazul limită cînd, pentru U_0 dat, efectul repulsiv al sarcinii spaţiale este atît de mare încît să nu poată trece mai mulţi electroni *chiar dacă ar putea fi eliberaţi mai mulţi de la catod.* Trăsătura care caracterizează această condiţie este că cîmpul electric este zero, la catod. Gîndiţi-vă, de ce. Ce s-ar întîmpla dacă cîmpul nu era zero, şi pozitiv? Astfel că cerem $dU/dx = 0$ la $x = 0$. Pentru a găsi o soluţie

pentru ecuaţia diferenţială, înmulţiţi ambii membrii prin $2(dU/dx)$. Atunci membrul stîng este acelaşi ca $(d/dx)\,(dU/dx)^2$. Luaţi-o de aici. Ar trebui să puteţi arăta că curentul I în regim „limitare prin sarcină spaţială" este proporţional cu $U_0^{3/2}$. Acesta este un exemplu important de sistem care nu urmează legea lui Ohm! Incidental, electronii emişi de la catodul unei diode reale nu pleacă cu viteza exact zero, dar cu viteza corespunzătoare temperaturii catodului. Aceasta corespunde unei energii cinetice în jur de o zecime de electron volt. Cîtă vreme ne ocupăm cu potenţiale mult mai mari decît acesta, este o bună aproximaţie să presupunem viteza iniţială zero.

Experienţa Tolman-Stewart.

4.26. Faptul că electronii sînt răspunzători pentru conducţia în metale a fost arătat pe o cale directă prin experienţa lui Tolman şi Stewart*. Aceasta s-a bazat pe următoarea idee simplă. Dacă electronii sînt relativ liberi în metale, inerţia lor îi va împiedica să urmeze exact mişcarea reţelei cristaline, dacă aceasta din urmă este făcută să se mişte accelerat. Dacă agitaţi o bucată de metal, electronii vor avea tendinţa să rămînă în urmă. Aceasta va rezulta într-o mişcare *relativă* a sarcinii pozitive şi negative şi deci, într-un curent electric. În această problemă dezvoltăm ideea de-a lungul liniei experienţei lui Tolman — Stewart. Să considerăm un inel de cupru rotindu-se cu viteză mare şi constantă în jurul axei sale principale. Ea este electric neutră; nu există nici un curent deoarece ionii de cupru şi electronii în reţeaua cristalină se deplasează cu aceeaşi viteză. Acum să oprim brusc inelul. Electronii au tendinţa să se mişte în continuare, şi singura forţă pe care reţeaua poate să o exercite asupra lor pentru ai aduce în repaus este aceeaşi „frecare" pe care o aplică pentru a le limita viteza cînd sînt purtaţi de un cîmp electric. Trebuie să existe o relaţie simplă între acceleraţia electronului din această experienţă şi intensitatea cîmpului electric **E** care, într-un conductor staţionar, ar produce aceeaşi mişcare relativă a electronului şi reţelei. Dacă urmăriţi acestea veţi găsi că oprirea inelului produce *curgerea unei cantităţi definite de sarcină*. Adică, integrala $\int I dt$ este determinată simplu de viteza iniţială a inelului înainte de oprire, conductivitatea cuprului, şi raportul sarcină-pe-masă al purtătorilor liberi. Deduceţi formula. Experienţa dă de asemenea şi *semnul* purtătorilor. Tolman şi Stewart au folosit o bobină din multe spire de sîrmă subţire, în loc de un singur inel, astfel încît au putut scoate uşor curentul într-un circuit exterior pentru măsurare.

* R.C. Tolman şi T. D. Stewart, *Phys. Rev.* **9**, 164 (1917). Experienţele au fost efectuate în laboratoarele de chimie ale Universităţii din California.

pentru ecuaţia diferenţială, înmulţiţi ambii membrii prin $2(dU/dx)$. Atunci membrul stîng este acelaşi ca $(d/dx)(dU/dx)^2$. Luaţi-o de aici. Ar trebui să puteţi arăta că curentul I în regim „limitare prin sarcină spaţială" este proporţional cu $U_0^{3/2}$. Acesta este un exemplu important de sistem care nu urmează legea lui Ohm! Incidental, electronii emişi de la catodul unei diode reale nu pleacă cu viteza exact zero, dar cu viteza corespunzătoare temperaturii catodului. Aceasta corespunde unei energii cinetice în jur de o zecime de electron volt. Cîtă vreme ne ocupăm cu potenţiale mult mai mari decît acesta, este o bună aproximaţie să presupunem viteza iniţială zero.

Experienţa Tolman-Stewart.

4.26. Faptul că electronii sînt răspunzători pentru conducţia în metale a fost arătat pe o cale directă prin experienţa lui Tolman şi Stewart*. Aceasta s-a bazat pe următoarea idee simplă. Dacă electronii sînt relativ liberi în metale, inerţia lor îi va împiedica să urmeze exact mişcarea reţelei cristaline, dacă aceasta din urmă este făcută să se mişte accelerat. Dacă agitaţi o bucată de metal, electronii vor avea tendinţa să rămînă în urmă. Aceasta va rezulta într-o mişcare *relativă* a sarcinii pozitive şi negative şi deci, într-un curent electric. În această problemă dezvoltăm ideea de-a lungul liniei experienţei lui Tolman — Stewart. Să considerăm un inel de cupru rotindu-se cu viteză mare şi constantă în jurul axei sale principale. Ea este electric neutră; nu există nici un curent deoarece ionii de cupru şi electronii în reţeaua cristalină se deplasează cu aceeaşi viteză. Acum să oprim brusc inelul. Electronii au tendinţa să se mişte în continuare, şi singura forţă pe care reţeaua poate să o exercite asupra lor pentru ai aduce în repaus este aceeaşi „frecare" pe care o aplică pentru a le limita viteza cînd sînt purtaţi de un cîmp electric. Trebuie să existe o relaţie simplă între acceleraţia electronului din această experienţă şi intensitatea cîmpului electric **E** care, într-un conductor staţionar, ar produce aceeaşi mişcare relativă a electronului şi reţelei. Dacă urmăriţi acestea veţi găsi că oprirea inelului produce *curgerea unei cantităţi definite de sarcină*. Adică, integrala $\int I dt$ este determinată simplu de viteza iniţială a inelului înainte de oprire, conductivitatea cuprului, şi raportul sarcină-pe-masă al purtătorilor liberi. Deduceţi formula. Experienţa dă de asemenea şi *semnul* purtătorilor. Tolman şi Stewart au folosit o bobină din multe spire de sîrmă subţire, în loc de un singur inel, astfel încît au putut scoate uşor curentul într-un circuit exterior pentru măsurare.

* R.C. Tolman şi T. D. Stewart, *Phys. Rev.* **9**, 164 (1917). Experienţele au fost efectuate în laboratoarele de chimie ale Universităţii din California.

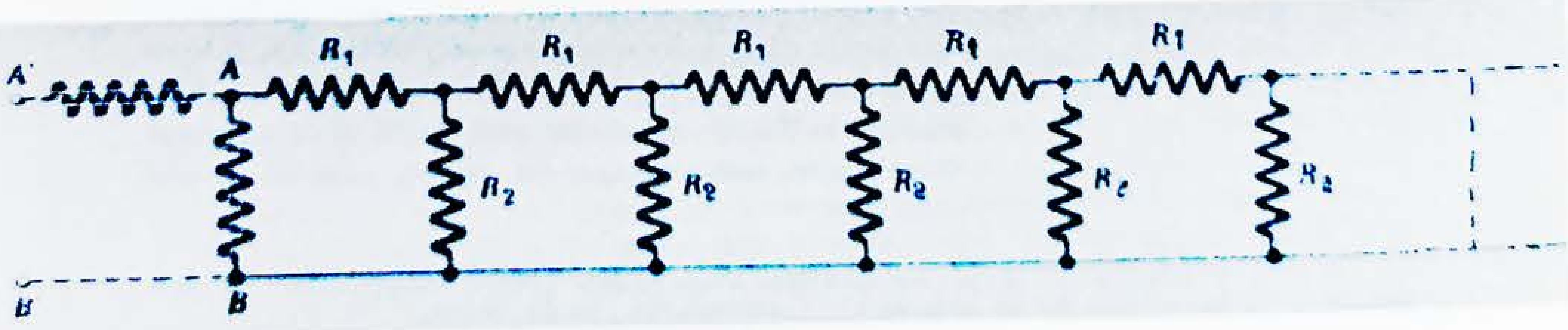
O problemă de rețele implicînd simetrie.

4.27. Toate rețelele se pot desena plane dacă alegem un mod convențional de a reprezenta o „încrucișare fără atingere", ca de exemplu . Să presupunem că un cub are o rezistență de-a lungul fiecărei muchii. La fiecare vîrf conductorii de la trei rezistențe sînt legați împreună. Desenați acest circuit într-o diagramă plană. Găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care reprezintă două colțuri diagonal opuse ale cubului, în cazul în care toate rezistențele au aceeași valoare R_0. Pentru aceasta nu este nevoie să rezolvați un număr de ecuații simultane; în schimb folosiți argumente de simetrie. Acum găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care corespund la colțuri diagonal opuse ale unei fețe a cubului. Aici din nou, considerații de simetrie vor reduce problema la una foarte simplă. Pentru amîndouă aceste calcule, o schiță a structurii ca un cub, mai degrabă decît una plană, vă va ajuta să identificați simetriile necesare ale curenților.

Rețeaua în scară.

4.28. Unele tipuri importante de rețele sînt infinite ca extindere. Figura arată un lanț de rezistențe în serie și paralel care se întinde fără sfîrșit spre dreapta. Linia de jos este firul de întoarcere fără rezistență pentru toate. Aceasta se numește uneori un lanț de atenuare, sau rețea în scară. Problema este de a găsi rezistența „de intrare", adică, rezistența echivalentă între terminalii A și B. Interesul nostru în această problemă este în principal pentru metoda de soluție, care ia o întorsătură neașteptată, și care poate fi folosită în alte locuri în fizică în care avem iterații de dispozitive identice (chiar un șir infinit de lentile, în optică). Esența este că rezistența de intrare pe care încă nu o știm — să o numim R — nu va fi schimbată prin adăugarea unui nou set de rezistențe la capătul din față al șirului pentru a-l face mai lung cu o unitate. Dar acum, adăugînd această secțiune, vedem că această nouă rezistență de intrare este chiar R_1 în serie cu combinația paralelă a lui R_2 și R. Obținem imediat o ecuație care poate fi rezolvată pentru R. Arătați că dacă tensiunea V_0 este aplicată la intrarea unui astfel de lanț, tensiunea la noduri succesive descrește în progresie geometrică. Care este raportul necesar pentru rezistențe pentru a face scara un atenuator care înjumătățește tensiunea la fiecare pas? Evident o scară cu adevărat

Fig. la problema 4.28



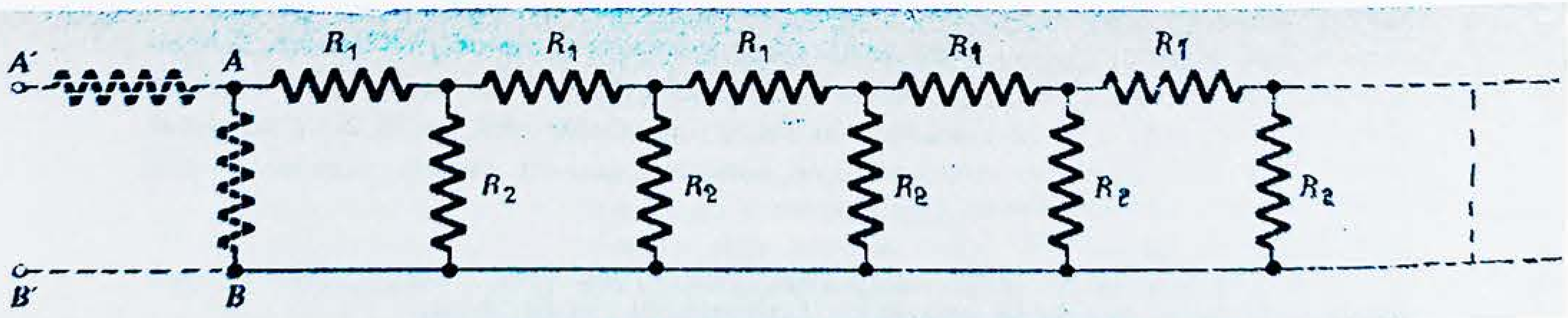
O problemă de rețele implicînd simetrie.

4.27. Toate rețelele se pot desena plane dacă alegem un mod convențional de a reprezenta o „încrucișare fără atingere", ca de exemplu  Să presupunem că un cub are o rezistență de-a lungul fiecărei muchii. La fiecare vîrf conductorii de la trei rezistențe sînt legați împreună. Desenați acest circuit într-o diagramă plană. Găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care reprezintă două colțuri diagonal opuse ale cubului, în cazul în care toate rezistențele au aceeași valoare R_0. Pentru aceasta nu este nevoie să rezolvați un număr de ecuații simultane; în schimb folosiți argumente de simetrie. Acum găsiți rezistența echivalentă dintre două noduri care corespund la colțuri diagonal opuse ale unei fețe a cubului. Aici din nou, considerații de simetrie vor reduce problema la una foarte simplă. Pentru amîndouă aceste calcule, o schiță a structurii ca un cub, mai degrabă decît una plană, vă va ajuta să identificați simetriile necesare ale curenților.

Rețeaua în scară.

4.28. Unele tipuri importante de rețele sînt infinite ca extindere. Figura arată un lanț de rezistențe în serie și paralel care se întinde fără sfîrșit spre dreapta. Linia de jos este firul de întoarcere fără rezistență pentru toate. Aceasta se numește uneori un lanț de atenuare, sau rețea în scară. Problema este de a găsi rezistența „de intrare", adică, rezistența echivalentă între terminalii A și B. Interesul nostru în această problemă este în principal pentru metoda de soluție, care ia o întorsătură neașteptată, și care poate fi folosită în alte locuri în fizică în care avem iterații de dispozitive identice (chiar un șir infinit de lentile, în optică). Esența este că rezistența de intrare pe care încă nu o știm — să o numim R — nu va fi schimbată prin adăugarea unui nou set de rezistențe la capătul din față al șirului pentru a-l face mai lung cu o unitate. Dar acum, adăugînd această secțiune, vedem că această nouă rezistență de intrare este chiar R_1 în serie cu combinația paralelă a lui R_2 și R. Obținem imediat o ecuație care poate fi rezolvată pentru R. Arătați că dacă tensiunea V_0 este aplicată la intrarea unui astfel de lanț, tensiunea la noduri succesive descrește în progresie geometrică. Care este raportul necesar pentru rezistențe pentru a face scara un atenuator care înjumătățește tensiunea la fiecare pas? Evident o scară cu adevărat

Fig. la problema 4.28



infinită nu ar fi practică. Puteţi sugera un mod de a o termina după cîteva secţiuni fără a introduce nici o eroare în atenuarea ei?

Un circuit simplu, analizat dintr-un punct de vedere nou, ilustrează un principiu variaţional.

4.29. Figura arată două rezistenţe în paralel, cu valori R_1 şi R_2. Curentul I_0 se distribuie într-un oarecare mod între ele. Arătaţi că condiţia $I_1 + I_2 = I_0$ împreună cu cerinţa de *putere disipată minimă* conduce la aceleaşi valori de curent pe care le-am calcula prin formule de circuit obişnuite. Aceasta ilustrează un principiu variaţional general care are loc pentru reţele de curent continuu. Distribuţia curenţilor în reţea, pentru un curent de intrare I_0 dat, este totdeauna acea care dă disiparea de putere totală *minimă*.

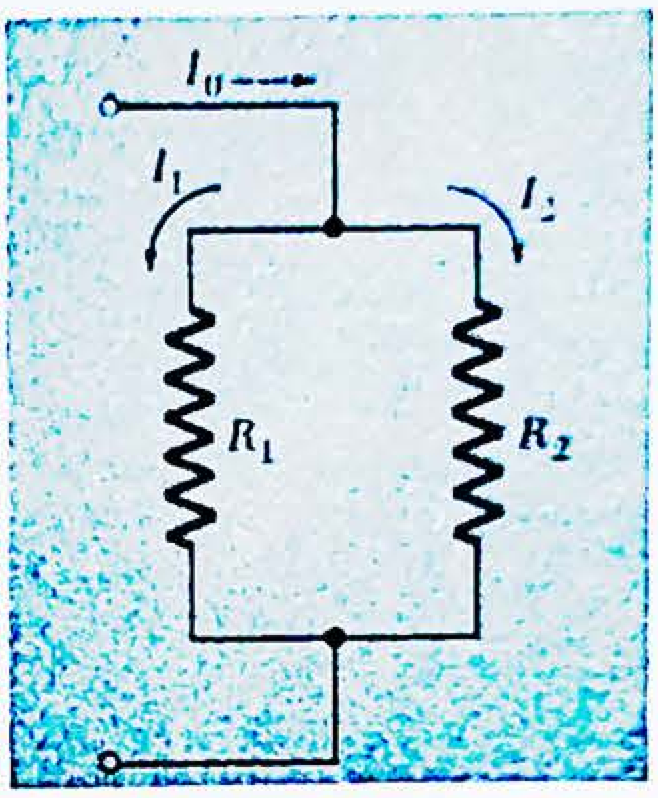


Fig. la problema 4.29

O aplicaţie curioasă a superpoziţiei şi simetriei.

4.30. O „problemă-ghicitoare" care a circulat printre inginerii electricieni cîţiva ani în urmă a fost aceasta: Un număr infinit de rezistenţe de 1 ohm sînt legate împreună pentru a alcătui o reţea bidimensională infinită cu ochiuri pătrate. Adică, în fiecare nod se întîlnesc conductori de la patru rezistenţe. Care este rezistenţa echivalentă între un nod şi unul dintre nodurile vecine cele mai apropiate? Această problemă este un exemplu surprinzător despre puterea simetriei şi superpoziţiei. Folosind cu iscusinţă superpoziţia, o puteţi face aproape în minte. Încercaţi să o faceţi în orice alt mod şi veţi aprecia eleganţa primei soluţii. Răspunsul este 0,5 ohm, dar nu vom dezlega ghicitoarea spunîndu-vă ce stări de curent să superpuneţi.

Introducere la ideea circuitelor echivalente cu curenţi şi tensiuni variind în timp. Analiză prin superpunerea de pulsuri scurte.

4.31. În această problemă veţi investiga comportarea a două circuite cu tensiuni variabile în timp. Fiecare circuit este alcătuit din două rezistenţe şi un condensator, dar legate în mod diferit (vezi figura). Scopul dumneavoastră este de a demonstra un fapt destul de surprinzător. Dacă rezistenţele R_3 şi R_4 şi capacitatea C' au valori potrivite, circuitul din dreapta şi circuitul din stînga sînt complet de nedistins în orice măsurători exterioare. Aceasta înseamnă că *orice* tensiuni variabile în timp $U(t)$ ar fi aplicate la borne, curentul $I(t)$ va fi

infinită nu ar fi practică. Puteţi sugera un mod de a o termina după cîteva secţiuni fără a introduce nici o eroare în atenuarea ei?

Un circuit simplu, analizat dintr-un punct de vedere nou, ilustrează un principiu variaţional.

4.29. Figura arată două rezistenţe în paralel, cu valori R_1 şi R_2. Curentul I_0 se distribuie într-un oarecare mod între ele. Arătaţi că condiţia $I_1 + I_2 = I_0$ împreună cu cerinţa de *putere disipată minimă* conduce la aceleaşi valori de curent pe care le-am calcula prin formule de circuit obişnuite. Aceasta ilustrează un principiu variaţional general care are loc pentru reţele de curent continuu. Distribuţia curenţilor în reţea, pentru un curent de intrare I_0 dat, este totdeauna aceea care dă disiparea de putere totală *minimă*.

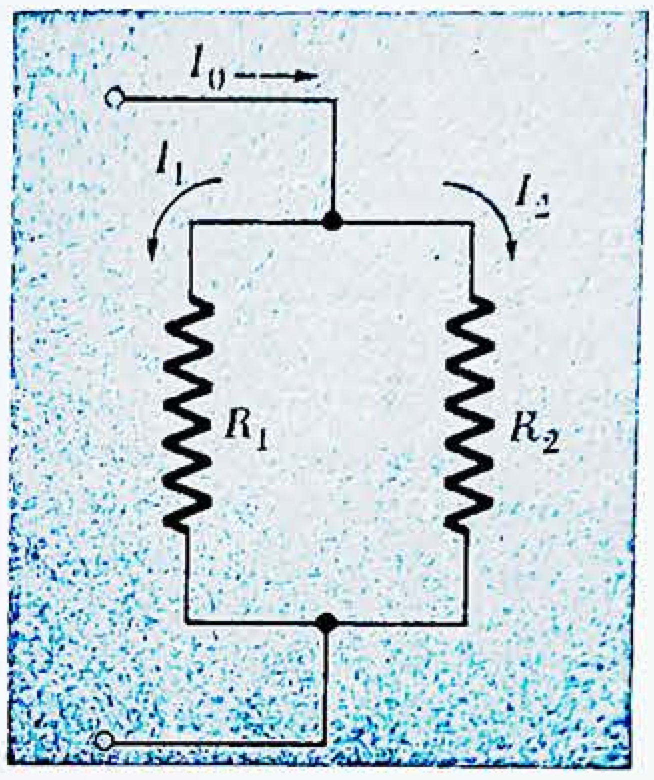


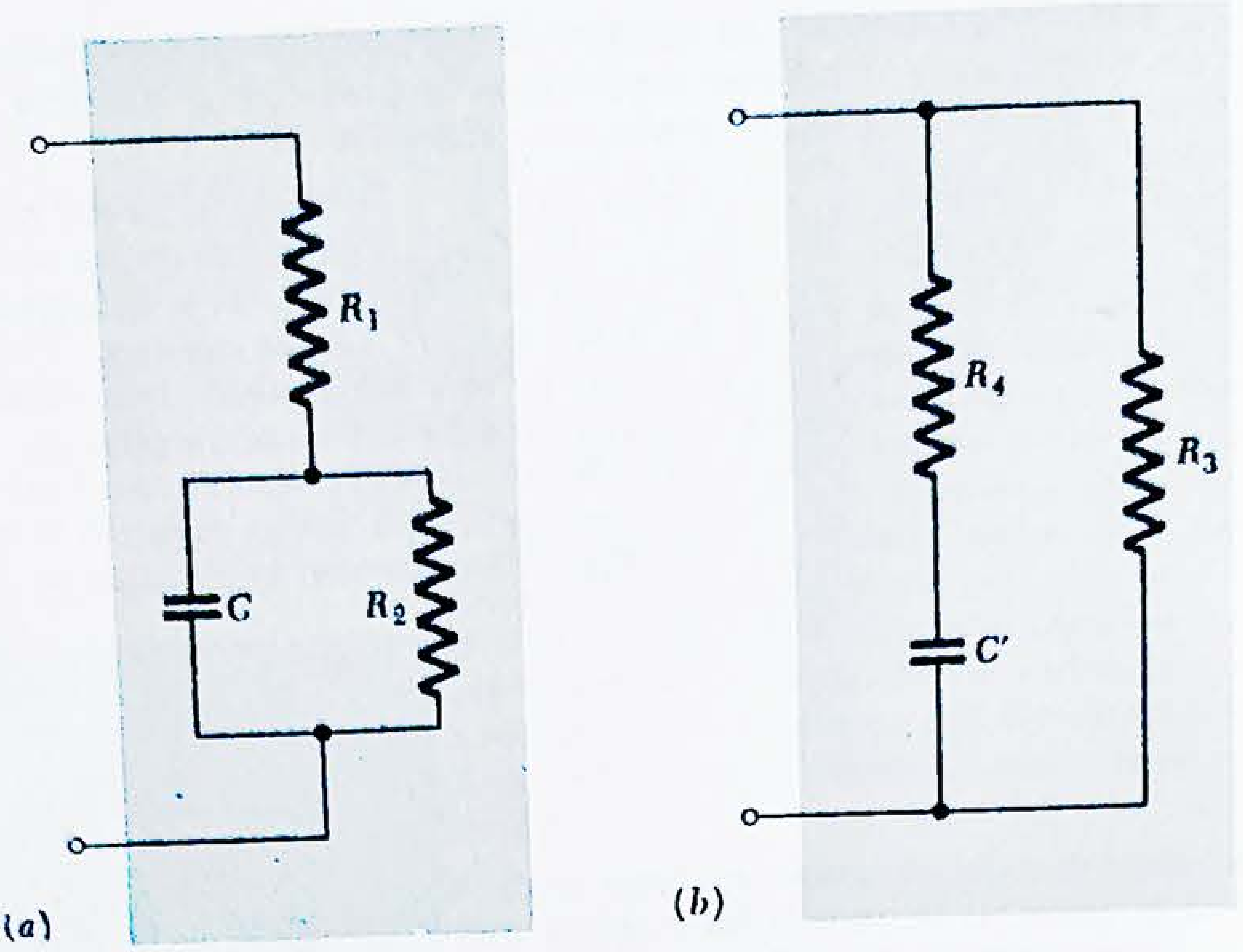
Fig. la problema 4.29

O aplicaţie curioasă a superpoziţiei şi simetriei.

4.30. O „problemă-ghicitoare“ care a circulat printre inginerii electricieni cîţiva ani în urmă a fost aceasta: Un număr infinit de rezistenţe de 1 ohm sînt legate împreună pentru a alcătui o reţea bidimensională infinită cu ochiuri pătrate. Adică, în fiecare nod se întîlnesc conductori de la patru rezistenţe. Care este rezistenţa echivalentă între un nod şi unul dintre nodurile vecine cele mai apropiate? Această problemă este un exemplu surprinzător despre puterea simetriei şi superpoziţiei. Folosind cu iscusinţă superpoziţia, o puteţi face aproape în minte. Încercaţi să o faceţi în orice alt mod şi veţi aprecia eleganţa primei soluţii. Răspunsul este 0,5 ohm, dar nu vom dezlega ghicitoarea spunîndu-vă ce stări de curent să superpuneţi.

Introducere la ideea circuitelor echivalente cu curenţi şi tensiuni variind în timp. Analiză prin superpunerea de pulsuri scurte.

4.31. În această problemă veţi investiga comportarea a două circuite cu tensiuni variabile în timp. Fiecare circuit este alcătuit din două rezistenţe şi un condensator, dar legate în mod diferit (vezi figura). Scopul dumneavoastră este de a demonstra un fapt destul de surprinzător. Dacă rezistenţele R_3 şi R_4 şi capacitatea C' au valori potrivite, circuitul din dreapta şi circuitul din stînga sînt complet de nedistins în orice măsurători exterioare. Aceasta înseamnă că *orice* tensiuni variabile în timp $U(t)$ ar fi aplicate la borne, curentul $I(t)$ va fi



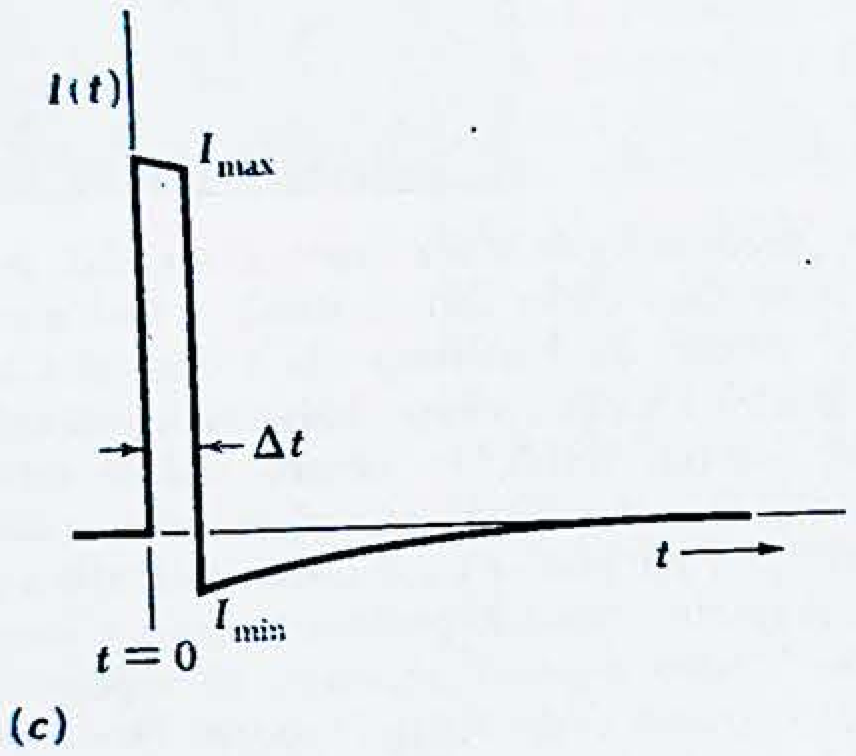


Fig. la problema 4.31

acelaşi în cele două circuite. Demonstraţia vă va introduce o metodă destul de generală şi puternică bazată pe principiul de superpoziţie. Mai întîi, să considerăm ce se va întîmpla în circuitul din stînga dacă tensiunea între borne este un puls scurt:

$$U = 0, \quad t < 0; \quad U = U_0, \quad 0 < t < \Delta t; \quad U = 0, \quad t > \Delta t.$$

Adică, ţinem bornele exterioare scurtcircuitate pînă la $t = 0$, îndepărtăm scurtcircuitul şi legăm instantaneu o baterie pentru un timp scurt Δt, îndepărtăm bateria şi reinstalăm instantaneu scurtcircuitul. Menţinem timpul Δt atît de scurt încît tensiunea pe condensator poate

să ajungă doar la o fracţiune foarte mică din U_0. Calculînd curentul prin condensator pe acest interval putem presupune că tensiunea completă se distribuie de-a lungul lui R_1. La momentul Δt condensatorul rămîne cu o oarecare cantitate de sarcină, pe care începe să o descarce prin R_1 şi R_2 *în paralel*. O parte a acestui curent de descărcare apare drept curent în circuitul exterior. Astfel întreg răspunsul de curent la pulsul $U(t)$ trebuie să arate asemănător cu partea (c) a figurii. Trebuie să aflaţi I_{max}, I_{min} şi constanta de timp a cozii lungi. Analizaţi acum în acelaşi mod circuitul din partea (b) a figurii. Arătaţi că un $I(t)$ asemănător va fi observat drept răspuns la puls. Arătaţi că prin potrivirea lui R_3, R_4 şi C' este posibil a face cele două răspunsuri *identice*. Aceasta este de fapt suficient pentru a dovedi că cele două circuite, cu valorile corect corelate, vor răspunde asemănător la *orice* $U(t)$. Aceasta deoarece orice $U(t)$ poate fi privit drept superpoziţia multor pulsuri; circuitele fiind lineare, răspunsurile lor vor fi în mod corespunzător superpoziţia răspunsurilor la pulsurile individuale. De fapt răspunsul unui circuit la o funcţie de comandă complicată $U(t)$ este adeseori cel mai uşor de găsit prin analiza răspunsului la un puls scurt. Aţi putea încerca aceasta pe unul din aceste circuite. Să presupunem că tensiunea aplicată este un puls dreptunghiular care *nu este scurt* în comparaţie cu constanta de timp RC. Morala pe care o aduce această problemă: Circuitele echivalente nu sînt totdeauna unice.

Capitolul 5

5.11. Ce ar fi dacă sarcina *ar fi* variat cu viteza purtătorului de sarcină după factorul $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$? Estimaţi (doar ordinul de mărime) diferenţa în sarcina netă care ar putea fi aşteptată între molecula de hidrogen şi atomul de heliu. Presupuneţi că energia cinetică a protonului creşte de la ceva neglijabil pînă la aproximativ 1 Mev în trecerea de la molecula de H_2 la nucleul de He, în timp ce energia cinetică a celor doi electroni creşte prin cîteva zeci de volţi, de la H_2 la He. Dacă, în aceste circumstanţe, molecula de H_2 s-ar fi întîmplat să fie accidental neutră, cît de mult exces de sarcină aţi aştepta să găsiţi într-un litru de heliu la presiune şi temperatură normală? Care ar fi ordinul de mărime al cîmpului electric rezultant?

5.12. Să presupunem că în sistemul laboratorului din figura 5.20 sarcinile pozitive sînt în repaus şi se mişcă doar sarcinile negative. Efectuaţi deducerea forţei asupra sarcinii de probă în mişcare în acest caz.

Aplicare a ideilor din Problema 5.9.

5.13. Într-un accelerator de particule de „fascicule încrucişate" un electron şi un proton, fiecare avînd o energie de 2 GeV trec unul pe lîngă celălalt mergînd în direcţii opuse. Întîlnirea este atît de apropiată încît fiecare este deviat de la direcţia iniţială de zbor cu 10^{-2} radiani. Folosiţi rezultatele problemei 5.9 pentru a estima cea mai mică distanţă de apropiere.

5.14. Ce densitate de sarcină necompensată pe fiecare din firele de cupru din aranjamentul figurii 6.3 ar fi necesară pentru a produce o forţă prin interacţie electrostatică egală în mărime cu aceea pe care am calculat-o pentru interacţia magnetică? Estimaţi intensitatea cîmpului la suprafaţa unui fir cu diametrul de 1 mm care poartă o astfel de sarcină. Comparaţi mărimea acestui cîmp, în volt/cm, cu mărimea cîmpului magnetic la suprafaţa firului din acest exemplu. Este rezultatul accidental, sau puteţi arăta că totdeauna trebuie să se întîmple astfel?

Se arată cum se transformă curentul şi densitatea de sarcină lineară cînd există mai multe feluri de purtători de sarcină.

5.15. Să considerăm o sarcină liniară compusă, din multe feluri de purtători, fiecare cu propria sa viteză. Aşa cum se vede în sistemul laboratorului, componenta k constă din n_k sarcini pe centimetru, de sarcină q_k fiecare, în mişcare cu viteza $v_k = \beta_k c$. În acest sistem, atunci, curentul total I şi densitatea de sarcină liniară λ sînt date de:

$$I = c\sum_k n_k q_k \beta_k \qquad \lambda = \sum_k n_k q_k.$$

Acum să trecem la un sistem în mişcare cu viteza βc. Aşa cum am arătat în relaţia cu figura 5.20, vitezele şi densităţile de sarcină se transformă astfel:

$$\beta_k' = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k} \qquad n_k' = \frac{n_k \gamma_k'}{\gamma_k} \qquad q_k' = q_k.$$

Arătaţi că în noul sistem

$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda) \qquad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right).$$

Aceasta arată că rezultatul nostru anterior este cu totul independent de model. El arată de asemenea, că dacă o sarcină are curent *total* zero şi sarcină *totală* zero într-un sistem, el are astfel în *toate* sistemele, orice ar face curenţii şi sarcinile componente — un fapt simplu plăcut care probabil nu este atît de evident.

Aplicare a ideilor din Problema 5.9.

5.13. Într-un accelerator de particule de „fascicule încrucișate" un electron și un proton, fiecare avînd o energie de 2 GeV trec unul pe lîngă celălalt mergînd în direcții opuse. Întîlnirea este atît de apropiată încît fiecare este deviat de la direcția inițială de zbor cu 10^{-2} radiani. Folosiți rezultatele problemei 5.9 pentru a estima cea mai mică distanță de apropiere.

5.14. Ce densitate de sarcină necompensată pe fiecare din firele de cupru din aranjamentul figurii 6.3 ar fi necesară pentru a produce o forță prin interacție electrostatică egală în mărime cu aceea pe care am calculat-o pentru interacția magnetică? Estimați intensitatea cîmpului la suprafața unui fir cu diametrul de 1 mm care poartă o astfel de sarcină. Comparați mărimea acestui cîmp, în volt/cm, cu mărimea cîmpului magnetic la suprafața firului din acest exemplu. Este rezultatul accidental, sau puteți arăta că totdeauna trebuie să se întîmple astfel?

Se arată cum se transformă curentul și densitatea de sarcină lineară cînd există mai multe feluri de purtători de sarcină.

5.15. Să considerăm o sarcină liniară compusă, din multe feluri de purtători, fiecare cu propria sa viteză. Așa cum se vede în sistemul laboratorului, componenta k constă din n_k sarcini pe centimetru, de sarcină q_k fiecare, în mișcare cu viteza $v_k = \beta_k c$. În acest sistem, atunci, curentul total I și densitatea de sarcină liniară λ sînt date de:

$$I = c\sum_k n_k q_k \beta_k \qquad \lambda = \sum_k n_k q_k.$$

Acum să trecem la un sistem în mișcare cu viteza βc. Așa cum am arătat în relația cu figura 5.20, vitezele și densitățile de sarcină se transformă astfel:

$$\beta_k' = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k} \qquad n_k' = \frac{n_k \gamma_k'}{\gamma_k} \qquad q_k' = q_k.$$

Arătați că în noul sistem

$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda) \qquad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right).$$

Aceasta arată că rezultatul nostru anterior este cu totul independent de model. El arată de asemenea, că dacă o sarcină are curent *total* zero și sarcină *totală* zero într-un sistem, el are astfel în *toate* sistemele, orice ar face curenții și sarcinile componente — un fapt simplu plăcut care probabil nu este atît de evident.

Un studiu al experienței lui Rowland.

6.16. Calculați aproximativ cîmpul magnetic care este de așteptat chiar deasupra discului rotitor în experiența lui Rowland. Luați datele relevante din descrierea din pagina lucrării sale care este reprodusă în figura 6.27. Veți avea nevoie să cunoașteți de asemenea că potențialul discului rotitor, față de plăcile puse la pămînt de deasupra și de dedesubt, a fost în jur de 10 kV în cele mai multe din cazuri. Această informație este desigur dată mai departe în articolul său, ca o descriere a unei părți cruciale a aparatului, magnetometrul „astatic" arătat în tubul vertical din stînga. Acesta este un montaj în care două ace magnetice, orientate opus, sînt legate rigid unul de altul pe o suspensie astfel încît cuplurile produse de cîmpul terestru se anulează unul pe celălalt. Cîmpul produs de discul rotitor, acționînd în principal asupra acului mai apropiat, poate fi atunci detectat în prezența unui cîmp uniform mult mai slab. Aceasta nu a fost în nici un caz singura precauție pe care Rowland a trebuit să o ia.

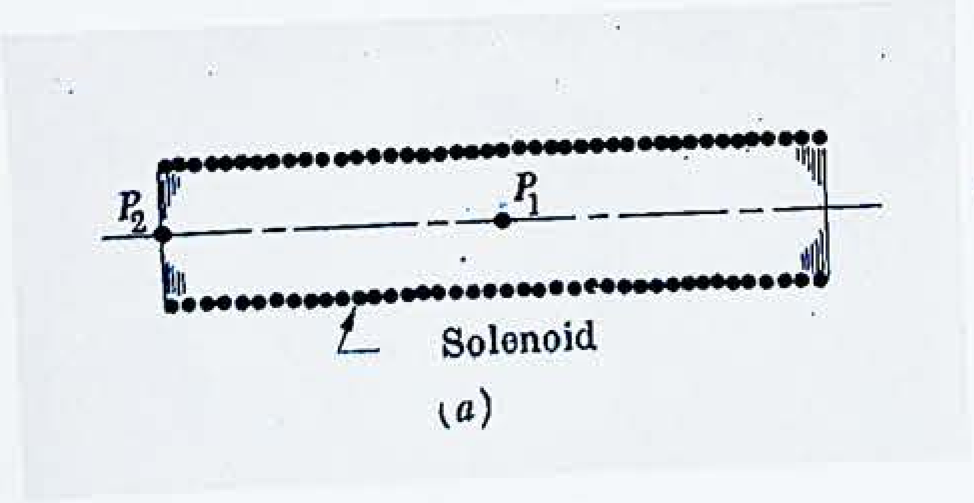
Exercițiu în superpoziție.

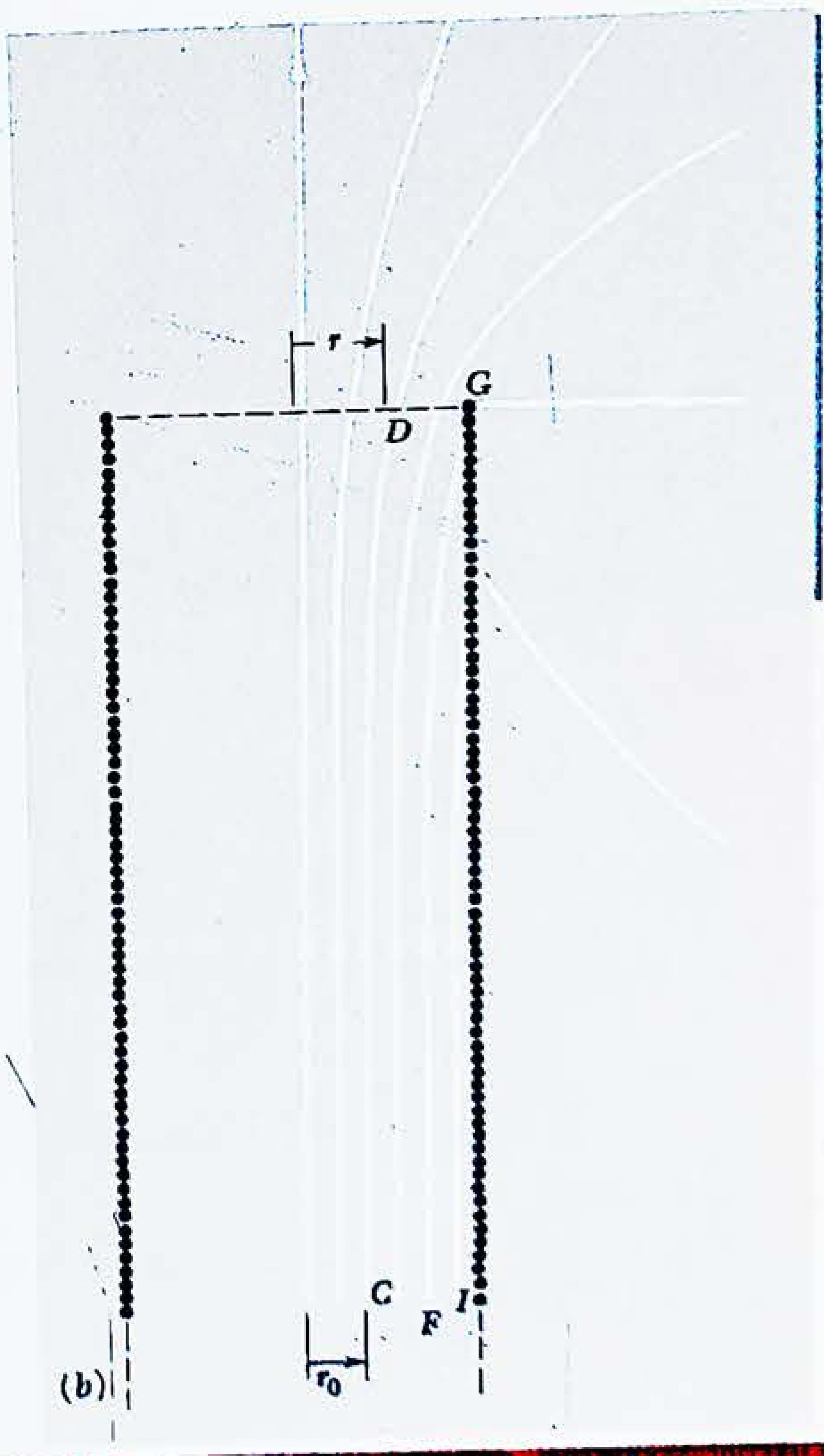
6.17. Un număr de fapte simple despre cîmpul unui solenoid pot fi găsite folosind superpoziția. Ideea este că doi solenoizi de același diametru și lungime L, dacă sînt uniți la capete, alcătuiesc un solenoid de lungime $2L$. Doi solenoizi semi-infiniți îmbinați la un loc alcătuiesc un solenoid infinit și așa mai departe. (Un solenoid semi-infinit este unul care are un capăt aici și celălalt infinit de departe.) Iată cîteva lucruri pe care le puteți arăta astfel:

(a) În solenoidul cu lungime finită din partea (*a*) a figurii, cîmpul magnetic pe axă în punctul P_2 la un capăt este aproximativ jumătate din cîmpul în punctul P_1 la centru. (Este ceva mai mare decît jumătate, sau ceva mai puțin decît jumătate?)

(b) În solenoidul semi-infinit arătat în partea (*b*) a figurii, linia de cîmp FGH care trece chiar prin capătul înfășurării este o linie dreaptă de la G la infinit.

Fig. la problema 6.17.





(c) Fluxul lui **B** prin fața de la capătul solenoidului semiinfinit este exact jumătate din fluxul prin bobină la o distanță mare în interior.

(d) Orice linie de cîmp care este r_0 cm de la axă departe în interiorul bobinei iese la capătul bobinei la o rază r_1 care este exact $\sqrt{2}r_0$. Arătați că aceste afirmații sînt corecte. Ce altceva puteți găsi?

Provocare la invenție.

6.18. Un mod de a produce un cîmp magnetic foarte uniform este de a folosi un solenoid foarte lung și de a lucra doar în secțiunea mediană din interiorul său. Aceasta este adesea neconvenabil, și înseamnă risipă de spațiu și putere. Puteți sugera moduri în care un număr de bobine sau solenoizi scurți ar putea fi combinați în mod convenabil pentru a obține o bună uniformitate a cîmpului pe o regiune limitată? (După ce ați lucrat asupra acestei probleme, priviți la „bobine Helmholtz" în indexul oricărei cărți de referință asupra electricității și magnetismului, și vedeți dacă vreuna dintre invențiile dumneavoastră se aseamănă cu aranjamentul descris acolo.)

6.19. O bobină este înfășurată uniform pe un tor de secțiune transversală dreptunghiulară. Există cu totul N spire de sîrmă. Doar cîteva sînt arătate în figură. Cu atît de multe spire, vom presupune că curentul pe suprafața torului curge exact radial, pe fețele inelare și exact longitudinal pe suprafețele cilindrice interioară și exterioară. Mai întîi convingeți-vă că în această presupunere simetria cere ca cîmpul magnetic să fie orientat peste tot într-o direcție „circumferențială", adică, toate liniile de cîmp sînt cercuri în jurul axei torului. În al doilea rînd, arătați că cîmpul este zero în toate punctele din afara torului, inclusiv interiorul găurii centrale. În al treilea rînd, găsiți mărimea cîmpului în interiorul torului, ca funcție de rază.

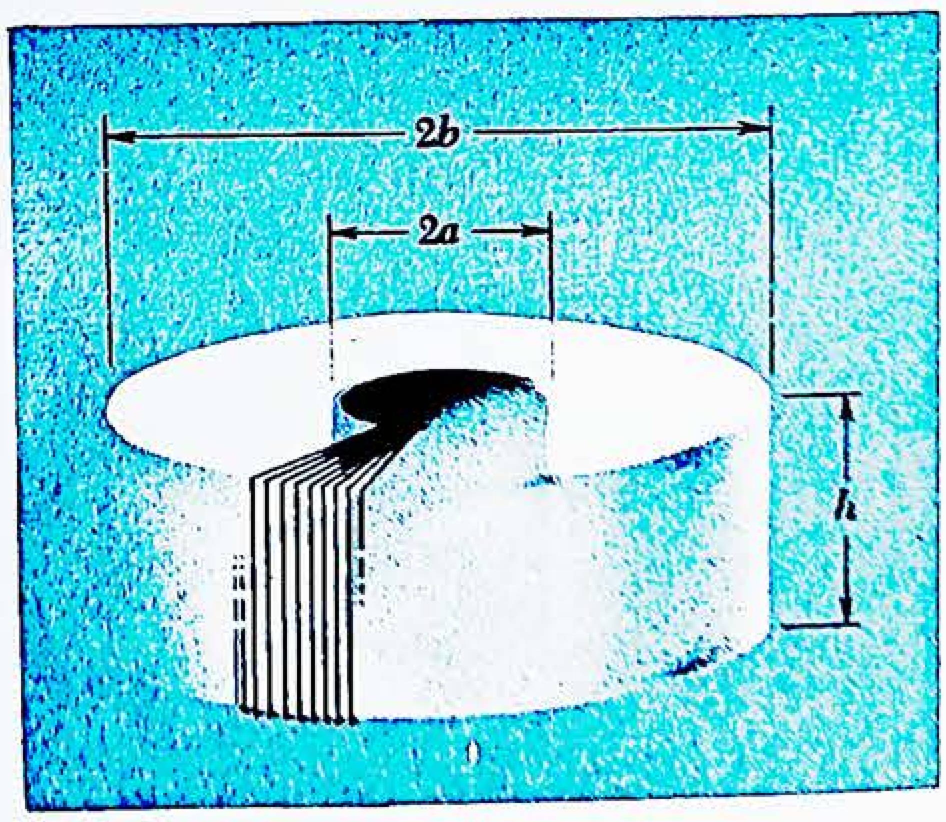
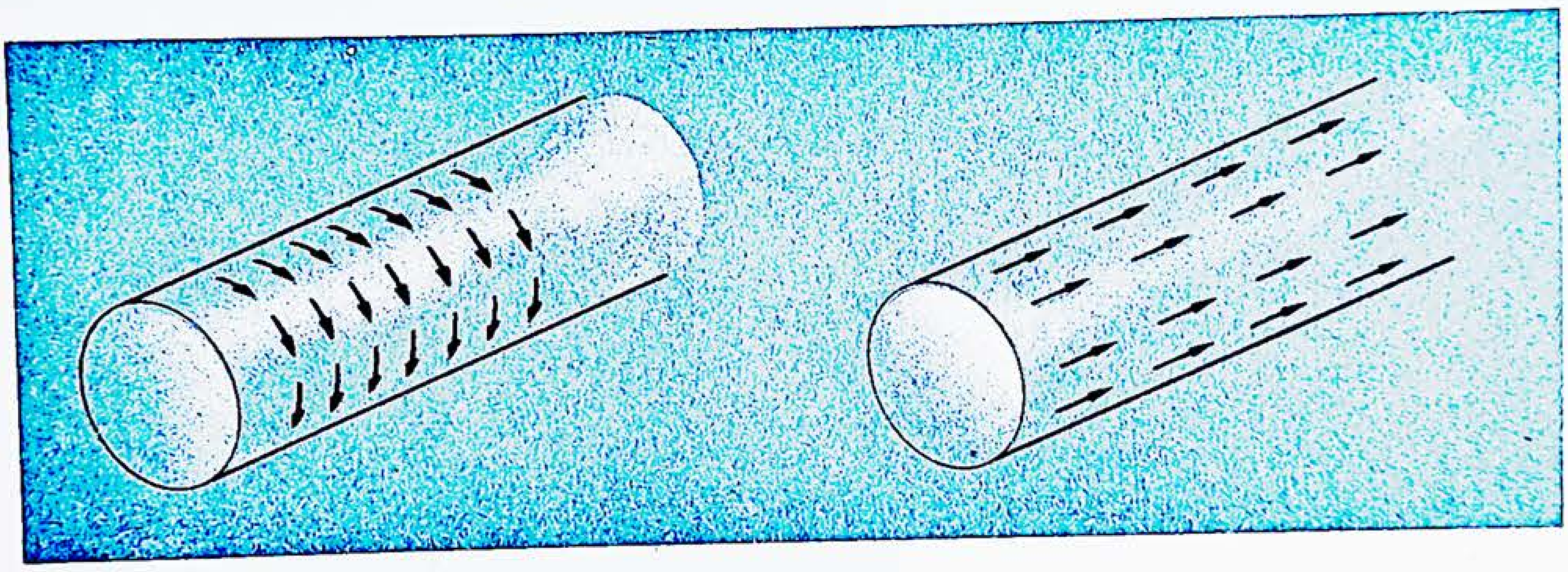


Fig. la problema 6.19.

6.20. Pentru o experiență magnetică delicată, un fizician vrea să anuleze cîmpul magnetic al pămîntului pe un volum în mărime de circa 30 pe 30 cm, astfel încît cîmpul rezidual din această regiune nu va fi mai mare de 10 miligauss în orice punct. Intensitatea cîmpului terestru în acest loc este 0,55 gauss, făcînd un unghi de 30° cu verticala. (Cîmpul terestru însuşi nu variază în nici într-un caz atît de mult în acea regiune, dar într-un laborator există adesea perturbaţii locale.) Sugeraţi un montaj de bobine potrivite pentru scopul propus, şi estimaţi numărul de amperi-spiră necesari pentru sistemul de compensare.

Întrebare pentru discuţie.

6.21. Orice solenoid obişnuit este în realitate o elice. Există o anumită componentă de curgere longitudinală care însoţeşte curgerea circumferenţială principală, deoarece înfăşurarea trebuie să progreseze de la un capăt la celălalt. Să presupunem că privim curentul ca superpoziţie unui strat de curent complet circumferenţial şi a unui „tub" de curent complet longitudinal, aşa cum se arată în figură. Descrieţi cîmpul magnetic al combinaţiei, atît în interiorul cît şi în exteriorul cilindrului. (Presupuneţi că cilindrul este infinit lung.) Puteţi corela raportul intensităţilor cîmpului în interiorul şi în exteriorul cilindrului cu panta de înfăşurare a elicei pe care această distribuţie de curent se presupune că o reprezintă?



Problema 6.21.

Cuplul asupra unei bucle de curent.

6.22. Scopul principal al acestei probleme este de-a găsi cuplul care acţionează asupra unei bucle de curent într-un cîmp magnetic constant. Cîmpul de inducţie constantă **B** este orientat într-o direcţie oarecare în spaţiu. Vom orienta coordonatele astfel încît **B** să fie perpendicular pe axa x, şi bucla de curent să se afle în planul xy, cum se arată în figură. Forma şi mărimea buclei sînt arbitrare; putem gîndi despre curent ca fiind menţinut prin fire răsucite asupra cărora orice forţă

netă este zero. Să considerăm un mic element al buclei și să aflăm contribuția sa la cuplul în jurul axei x. Doar componenta z a forței asupra sa va fi implicată, și deci numai componenta y a cîmpului de inducție **B**, pe care am indicat-o pe diagramă ca $\hat{y}B_y$. Formați integrala care va da cuplul total. Arătați că această integrală va da, pînă la factori constanți, *aria* buclei. *Momentul magnetic* al unei bucle de curent este definit drept un vector **m** de mărime Ia unde I este curentul în amperi, a este aria buclei în metri pătrați, și direcția vectorului este normală la buclă cu o relație de șurub drept față de curent, cum se arată în figură. (Vom întîlni bucla de curent și momentul ei magnetic din nou în capitolul 10.) Arătați acum că rezultatul dumneavoastră implică faptul că cuplul **N** asupra oricărei bucle de curent este dat de ecuația vectorială

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Care este *forța* totală asupra buclei?

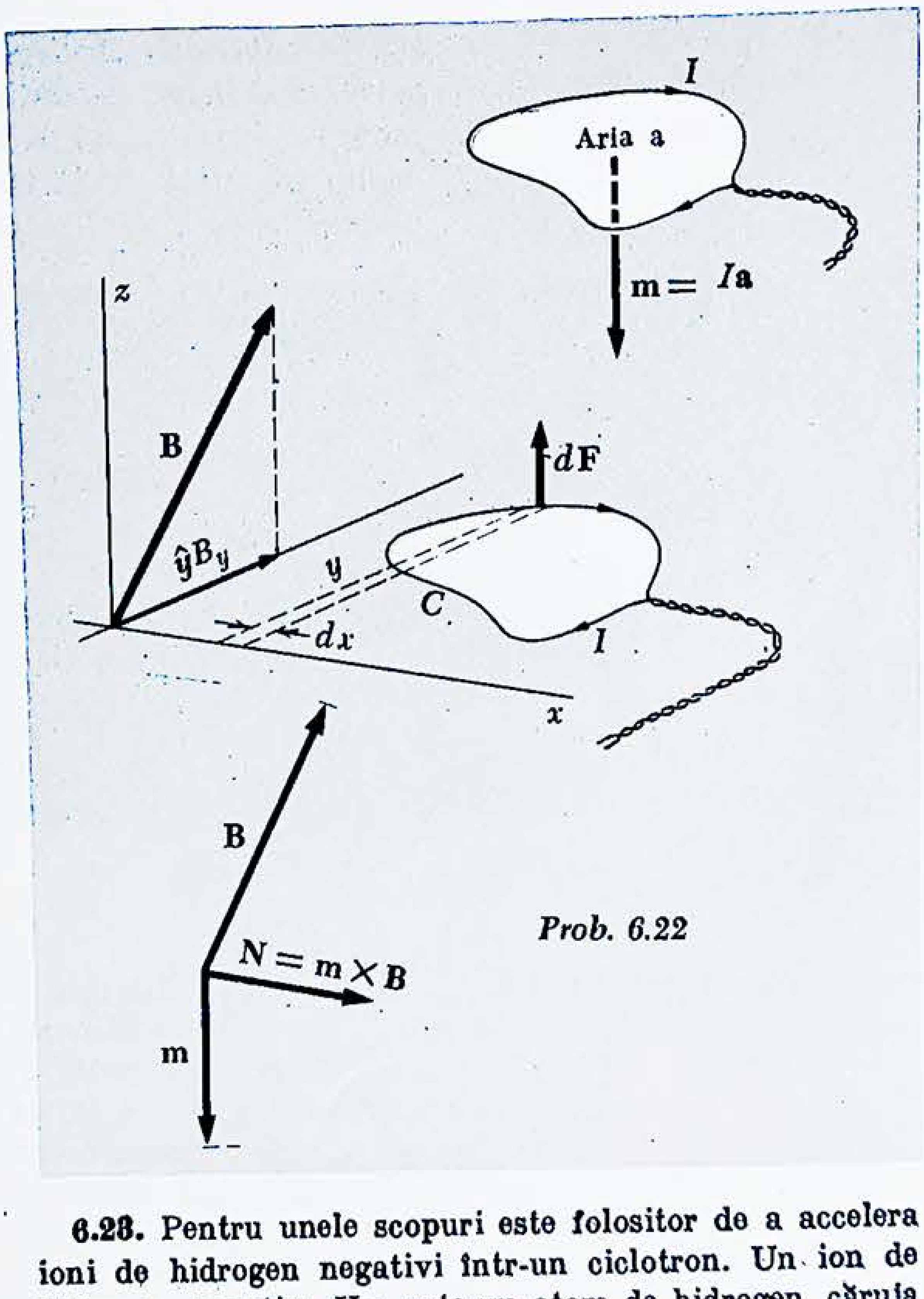


Fig. la problema 6.22.

6.23. Pentru unele scopuri este folositor de a accelera ioni de hidrogen negativi într-un ciclotron. Un ion de hidrogen negativ, H^-, este un atom de hidrogen căruia i s-a atașat un electron suplimentar. Atașamentul este

foarte slab; un cîmp electric de numai $4,5 \times 10^6$ volt/cm (un cîmp destul de mic față la scara atomică) va elibera un electron, lăsînd un atom de hidrogen. Dacă vrem să accelerăm ioni de H^- pînă la o energie cinetică de 1 GeV, care este cîmpul magnetic cel mai înalt pe care îl putem întrebuința pentru ca să îi ținem pe o orbită circulară pînă la energia finală? (Pentru a găsi γ din această problemă aveți nevoie numai de masa de repaus a ionului de H^-, care este desigur practic identică cu aceea a protonului, aproximativ 1 GeV.)

Întrebare pentru discuție.

6.24. Un inventator propune să se facă un vitezometru de avion bazat pe măsurarea cîmpului electric „indus" $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Discutați valoarea acestei propuneri. Este relevant pentru discuție faptul că în atmosfera terestră se găsesc în mod obișnuit cîmpuri electrostatice, de mărime și direcție variabilă destul de greu de prezis, de ordinul a 3 volți/cm. La un moment dat a fost emisă o teorie a orientării porumbelului călător, după care porumbelul, știindu-și într-un mod oarecare viteza, simte mărimea cîmpului „indus" $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, prin aceasta determinînd $\mathbf{B}$ și de aici ceva despre localizarea pe pămînt. Are aceasta sens? Cum se pune problema măsurării lui $\mathbf{B}'$, în vehiculul în mișcare? Cît de multă imprecizie în valoarea dedusă a lui $\mathbf{B}$ ar putea fi introdusă de cîmpurile electrice atmosferice necunoscute de întindere mare și de ordinul de mărime menționat mai sus?

6.25. O traversă metalică de masă m alunecă fără frecare pe două șine conductoare paralele lungi la distanța b între ele. O rezistență R este conectată de-a lungul șinelor la un capăt; în comparație cu R, rezistența barei și a șinelor este neglijabilă. Există un cîmp uniform de inducție $\mathbf{B}$ perpendicular pe planul figurii. La timpul $t = 0$ i se dă traversei o viteză v_0 spre dreapta. Ce se întîmplă apoi? (a) Se oprește vreodată traversa? Dacă da, cînd? (b) Cît de departe merge? (c) Cum apare conservarea energiei?

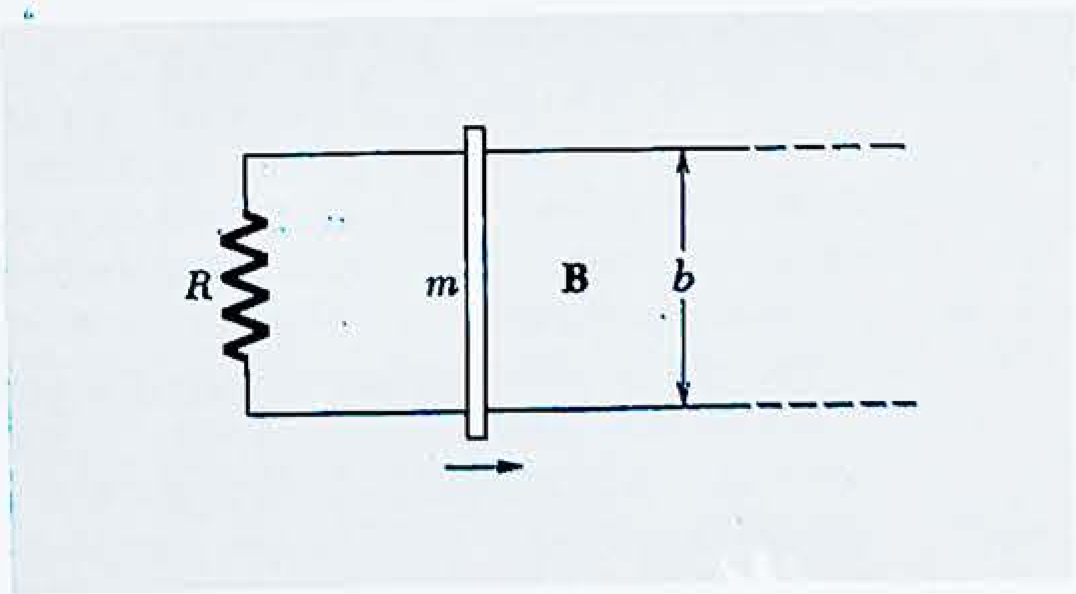


Fig. la problema 6.25.

6.26. Nu există nimic aparte în definirea vitezei relative a sistemelor F și F' de-a lungul direcției $\hat{x}$ cum am făcut în deducerea ecuația 58. Dacă am fi ales viteza de-a lungul axei $\hat{y}$, cum ar arăta transformarea? Dacă preferați, puteți să deduceți în schimb formule generale pentru $E_{\perp}$, $E_{\parallel}$ etc., unde indicii indică o componentă paralelă sau perpendiculară pe **v**.

6.27. Presupuneți că aveți un cîmp electric uniform E_y în direcția y și un cîmp magnetic uniform B_z în direcția z; presupuneți $E_y < cB_z$. Găsiți un sistem de referință în care cîmpul electric este zero. Calculați valoarea lui B în acest sistem. Presupuneți $E_y > cB_z$. În acest caz, puteți găsi un sistem în care cîmpul magnetic este zero?

Paradox?

6.28. Un student spunea, „Aproape m-ați convins că forța dintre curenți, pe care am crezut-o a fi magnetism, este explicată prin cîmpul electric al sarcinilor în mișcare. Dar dacă este așa, de ce nu ecranează placa metalică din figura 5.1, *c* un fir de influența celuilalt?“ Puteți explica aceasta?

Cîmpul în jurul unei pînze de curent.

6.29. Să presupunem că avem o situație în care componenta cîmpului magnetic paralelă cu planul unui strat ar fi avut aceeași *mărime* de ambele părți, dar și-ar fi schimbat *direcția* cu 90° la trecerea prin strat. Ce urmează de aici? Ar exista o forță asupra stratului? S-ar aplica formula noastră pentru forța asupra unui strat de curent la astfel de cazuri?

Tensiuni produse de presiunea magnetică.

6.30. Să presupunem că solenoidul descris în prob. 6.7 este folosit pentru a produce un cîmp foarte puternic pentru un timp foarte scurt conectîndu-l scurt la o sursă de înaltă tensiune, pentru a forța un curent foarte mare prin el. Lăsînd la o parte toate celelalte limitări, să considerăm limita impusă de rezistența de rupere a firului. Presiunea magnetică, ca și presiunea într-un furtun, va avea tendința să desfacă solenoidul. Dacă rezistența de rupere a firului este 2×10^4 newton/cm², care este cîmpul cel mai puternic care ar putea fi conținut în acel solenoid?

R. 4,2 tesla.

Efectul Hall.

6.31. Într-o măsurare a efectului Hall în sodiu metalic, cîmpul transversal a fost determinat ca fiind 25 microvolți/cm cînd densitatea de curent prin conductorul de sodiu era 1 000 A/cm², într-un cîmp magnetic de 1 tesla. Calculați numărul electronilor de conducție pe centimetru cub implicat de această observație și comparați-l cu numărul de atomi din 1 cm³ de sodiu $\left(\text{densitatea sodiului: } 970\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$.

7.16. Faraday descrie cu următoarele cuvinte o încercare nereuşită de a detecta un curent indus cînd o parte din circuit constă din apă în mişcare prin cîmpul magnetic terestru:

„Am făcut de aceea experienţe la Podul Waterloo, întinzînd un fir de cupru de nouă sute şaizeci de picioare* lungime de-a lungul podului, lăsînd de la extremităţi alte fire cu plăci întinse de metal ataşate lor pentru a completa contactul cu apa. Astfel firul şi apa alcătuiau un circuit conductor; şi cînd apa venea sau pleca cu mareele, speram să obţin curenţi. Am obţinut mereu deviaţii la galvanometru, dar ele erau foarte neregulate, şi se datorau altor cauze decît aceleia cercetate. Starea diferită a apei în ceea ce priveşte puritatea pe cele două maluri ale rîului; diferenţa de temperatură, mici diferenţe în plăci, în sudura folosită, în contactul mai mult sau mai puţin perfect făcut prin răsucire; toate produceau efecte; şi deşi am experimentat doar asupra apei care trecea printre arcadele centrale; am folosit plăci de platină în loc de cupru (deşi) am luat toate precauţiile, nu am putut după trei zile să obţin nici un rezultat satisfăcător (*Cercetări experimentale în electricitate*, vol. I, p. 55, Londra, 1839)".

Presupuneţi că componenta verticală a cîmpului a fost 5×10^{-5} tesla, faceţi o apreciere rezonabilă asupra vitezei curenţilor de maree pe Tamisa şi estimaţi mărimea tensiunii induse pe care Faraday încerca să o măsoare.

7.17. Un cadru metalic pătratic este situat, cum se arată în figură, între polii unui electromagnet. Latura de sus a cadrului se află într-o regiune de cîmp magnetic orizontal uniform de intensitate B. Latura de jos a cadrului este în afara regiunii magnetice unde cîmpul, deşi nenul, este neglijabil în această problemă. Arătaţi că dacă cadrul este lăsat liber şi cade sub acţiunea propriei greutăţi, el va primi o viteză în jos care depinde doar de B, pentru un material de cadru dat, şi este independentă de mărimea şi secţiunea firului sau barei din care este alcătuit. Care este această viteză, în m/sec, dacă B este 1,5 tesla iar cadrul este alcătuit din aluminiu (densitate 2,7 g/cm³, rezistivitate $2{,}8\times10^{-6}$ ohm-cm)? Cît de departe va cădea cadrul pînă va atinge viteza finală?

* 1 picior = 30,47 cm (N. trad.).

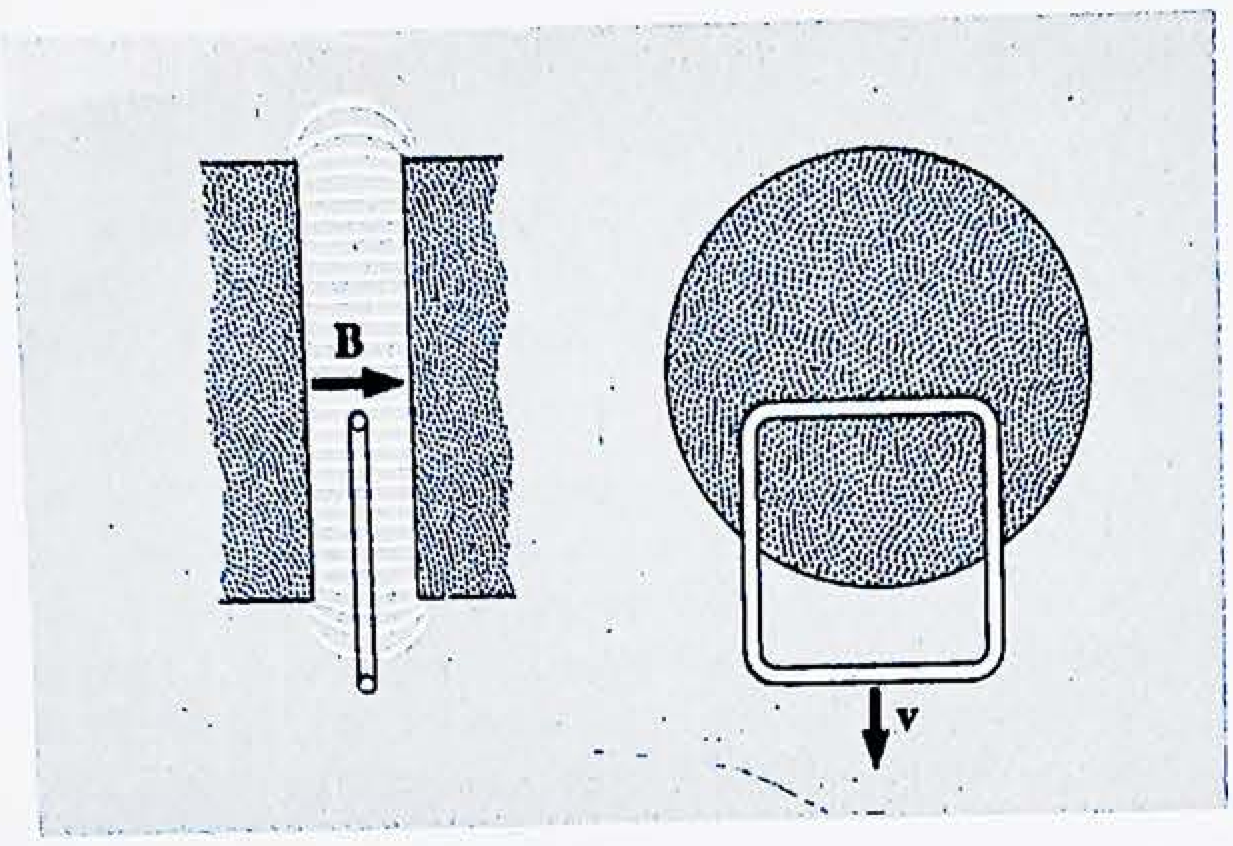


Fig. la problema 7.17.

Întrebare pentru discuție.

7.18. Să presupunem că bucla care se mișcă prin cîmpul **B** al bobinei din figura 7.6 este făcută din sîrmă de rezistență foarte mică. Va produce forța electromotoare $\mathcal{E}$ curgerea unui curent enorm în jurul buclei? Fie I_2 curentul care este făcut să treacă prin buclă și $\mathbf{B}_2$ cîmpul magnetic al acestui curent. Ce puteți spune despre relația dintre $\mathbf{B}_2$ și inducția **B**? Puteți afla ce s-ar putea întîmpla dacă bucla ar fi fost făcută din fire supraconductoare, cu rezistența exact zero?

O întrebare pentru a clarifica înțelesul fluxului printr-un circuit.

7.19. Discutați implicațiile teoremei $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ în cazul inelelor concentrice mare și mic din figura 7.20. Cu un curent dat I_1 în inelul exterior, evident Φ_{21}, fluxul prin inelul interior, descrește dacă R_1 este mărită, deoarece cîmpul la centru devine mai slab. Dar cu curent fixat în inelul interior, de ce Φ_{12}, fluxul prin inelul exterior, *descrește* cînd R_1 crește, menținînd R_2 constant? Trebuie să se facă astfel pentru a satisface teorema.

Aplicație a teoremei de reciprocitate a inductanței mutuale.

7.20. Puteți imagina un mod de a folosi teorema $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ pentru a găsi intensitatea cîmpului magnetic datorat unui curent inelar în planul inelului la o distanță de la inel mult mai mare decît raza? (Indicație: Considerați efectul unei mici variații ΔR_1 în raza inelului exterior din figura 7.20; aceasta trebuie să aibă același efect asupra lui Φ_{12} și asupra lui Φ_{21}.)

Inductanța mutuală a solenoizilor concentrici.

7.21. Figura arată un solenoid de rază a_1 și lungime b_1 situat în interiorul unui solenoid mai mare de rază a_2 și lungime b_2. Numărul total de spire este N_1 pe bobina interioară, N_2 pe cea exterioară. Dezvoltați o formulă pentru inductanța mutuală M.

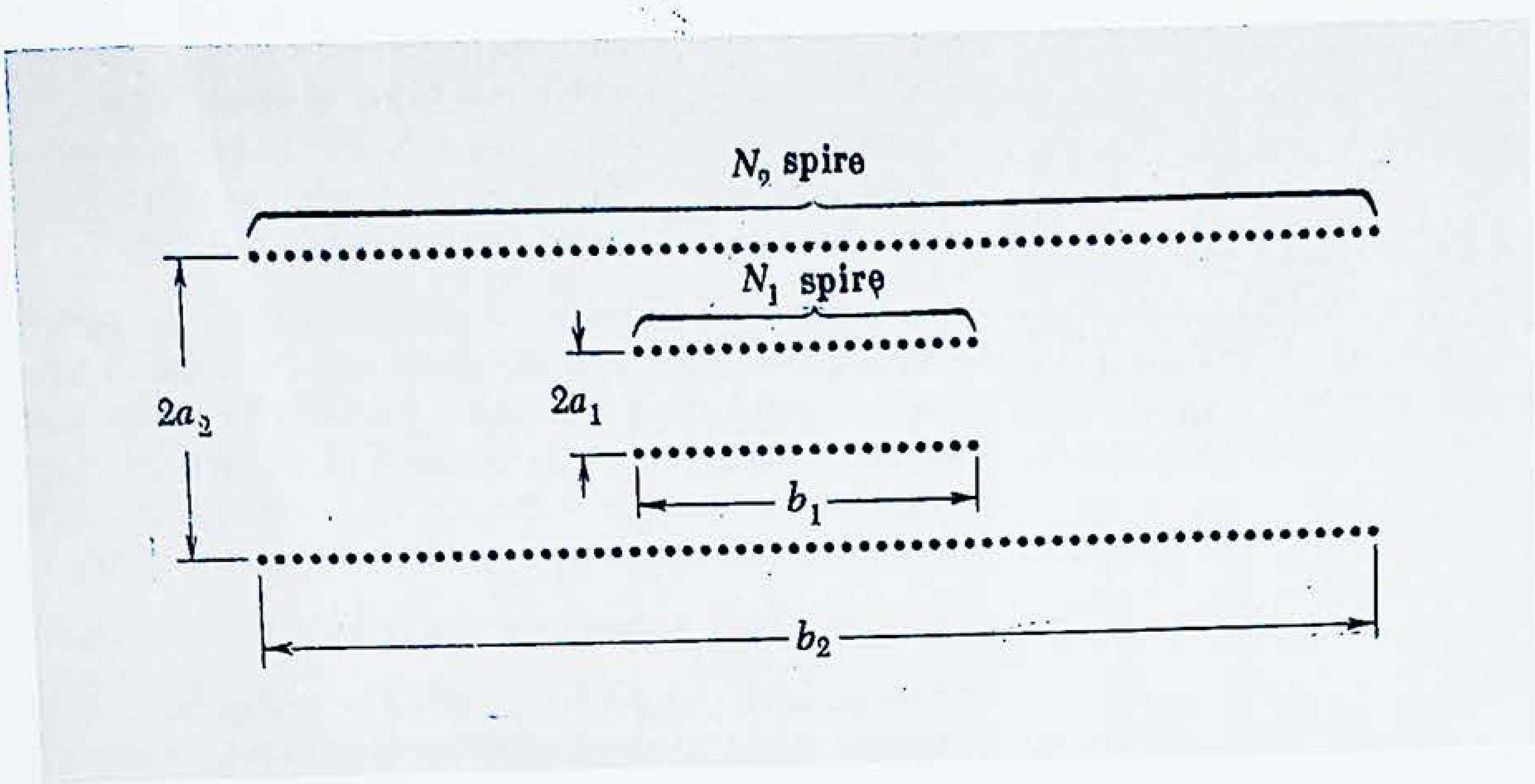


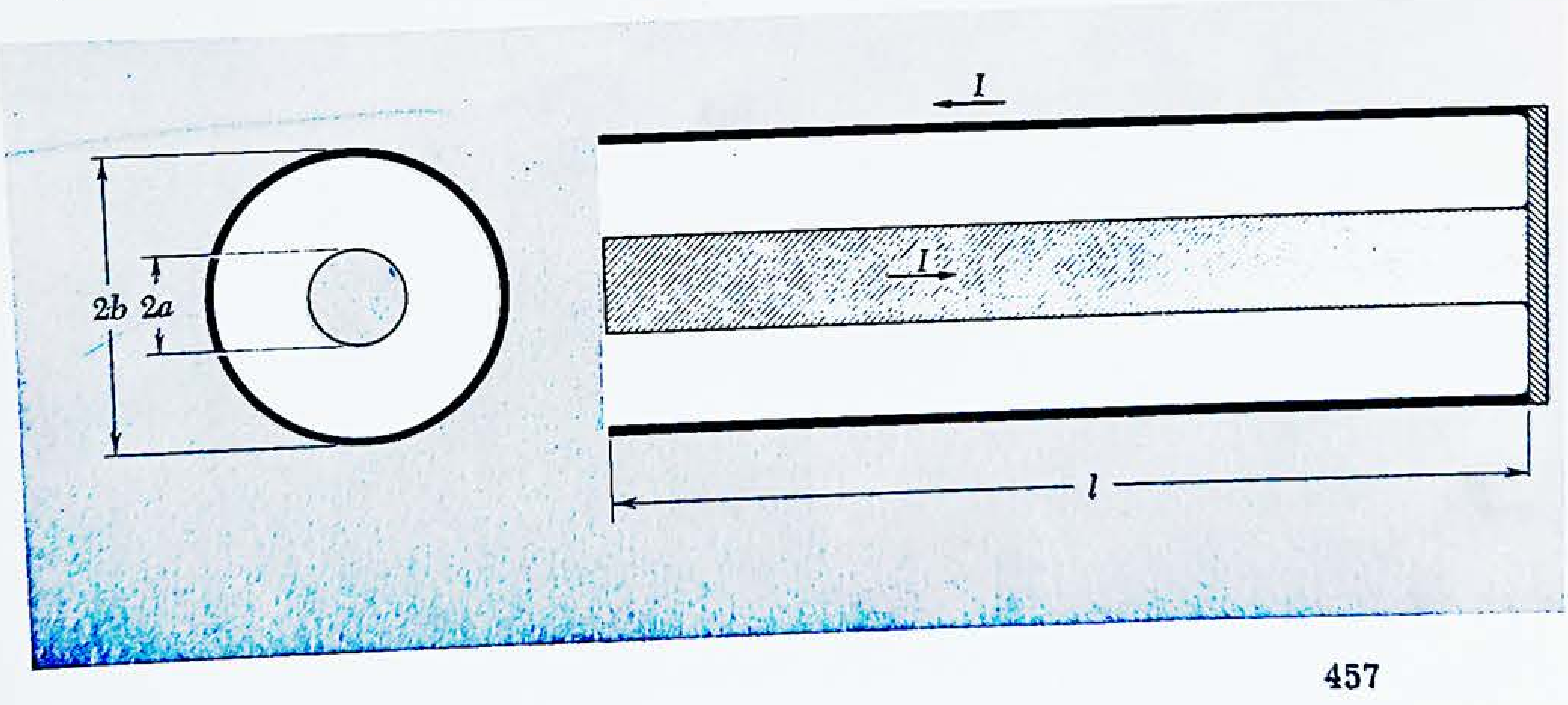
Fig. la problema 7.21.

Autoinductanța calculată cu ajutorul relației de energie.

7.22. Conductorul interior al liniei de transmisie coaxiale din figură constă dintr-o bară metalică solidă de rază a. Conductorul exterior este un tub metalic subțire de rază b. La un capăt un disc metalic este sudat la ambii conductori. Vrem să prezicem auto-inductanța L a unei secțiuni a liniei de lungime. Să presupunem că un curent care trece prin conductorul interior este distribuit uniform pe secțiunea barei. Pentru un curent dat I care este intensitatea cîmpului magnetic B ca funcție de rază, atît în interiorul barei cît și în spațiul inelar?

Calculați energia totală înmagazinată în cîmpul magnetic. Folosiți acum relația generală, energia înmagazinată

Fig. la problema 7.22.



$= \frac{1}{2} LI^2$, pentru a găsi L. Observaţi că acest mod de calcul evită orice probleme care ar putea apărea din faptul că diferite filamente de curent în conductorul interior cuprind cantităţi de flux diferite. Totuşi, rezultatul este valabil doar pentru curenţi lent variabili. De ce?

7.23. Considerăm bucla de curent arătată în figură. Să presupunem că vrem să calculăm fluxul din **B** prin această buclă. *Două* suprafeţe limitate de buclă sînt arătate, în părţile (*a*) şi (*b*) respectiv. Care este diferenţa esenţială dintre ele? Care din ele, dacă este vreuna, este suprafaţa corectă de folosit pentru efectuarea integralei de suprafaţă $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ pentru a afla fluxul? Descrieţi suprafaţa corespunzătoare pentru o bobină cu trei spire. Arătaţi că aceasta este consistent cu afirmaţia noastră anterioară că pentru o bobină compactă de N spire forţa electromotoare este de exact N ori cea care ar fi pentru o singură buclă de aceeaşi mărime şi formă.

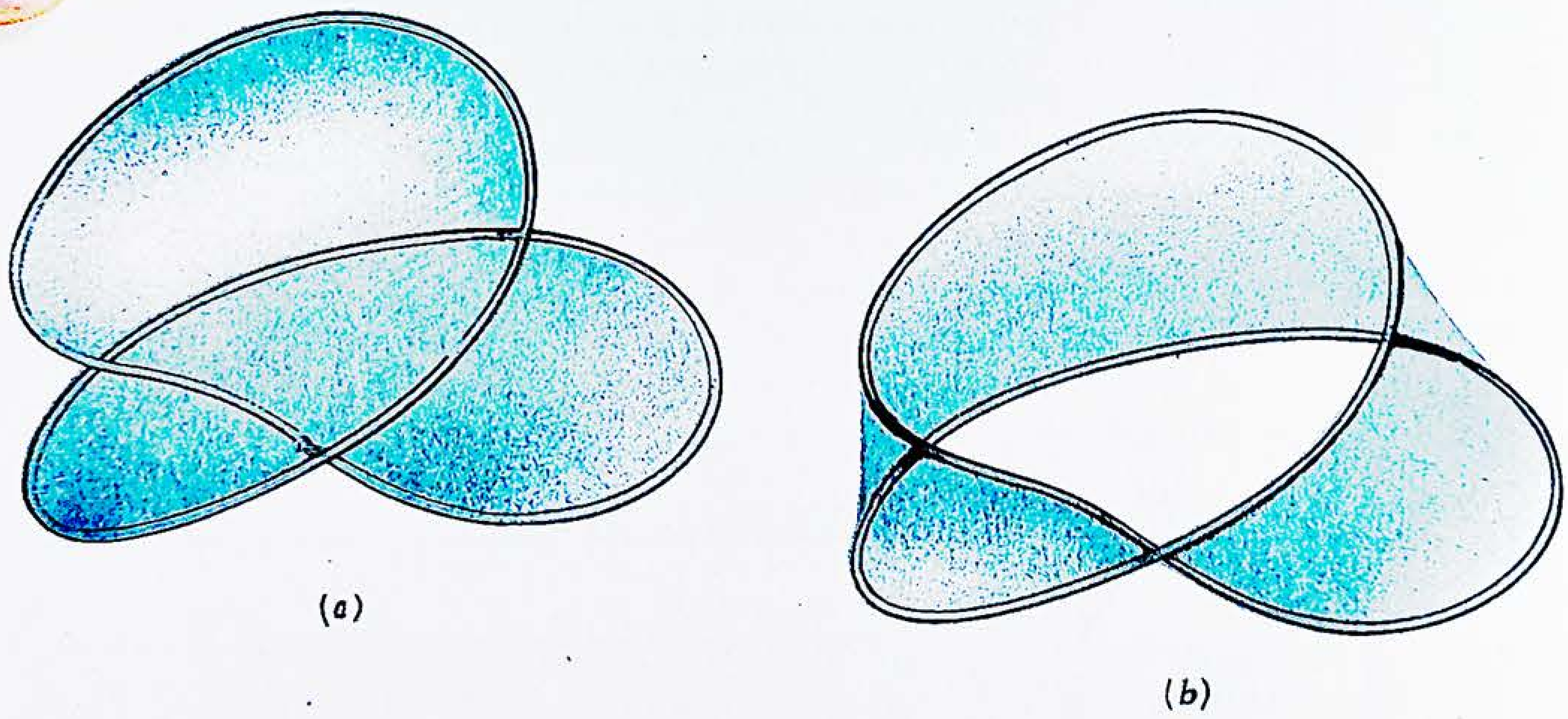


Fig. la problema 7.23.

„Fenomenul lui Arago".

7.24. În cel de-al doilea paragraf citat la începutul cap. 7, Faraday a menţionat „experienţele extraordinare ale lui Arago".

Mai departe, într-o secţiune intitulată — Explicarea Fenomenului Magnetic al lui Arago, el le descrie astfel:

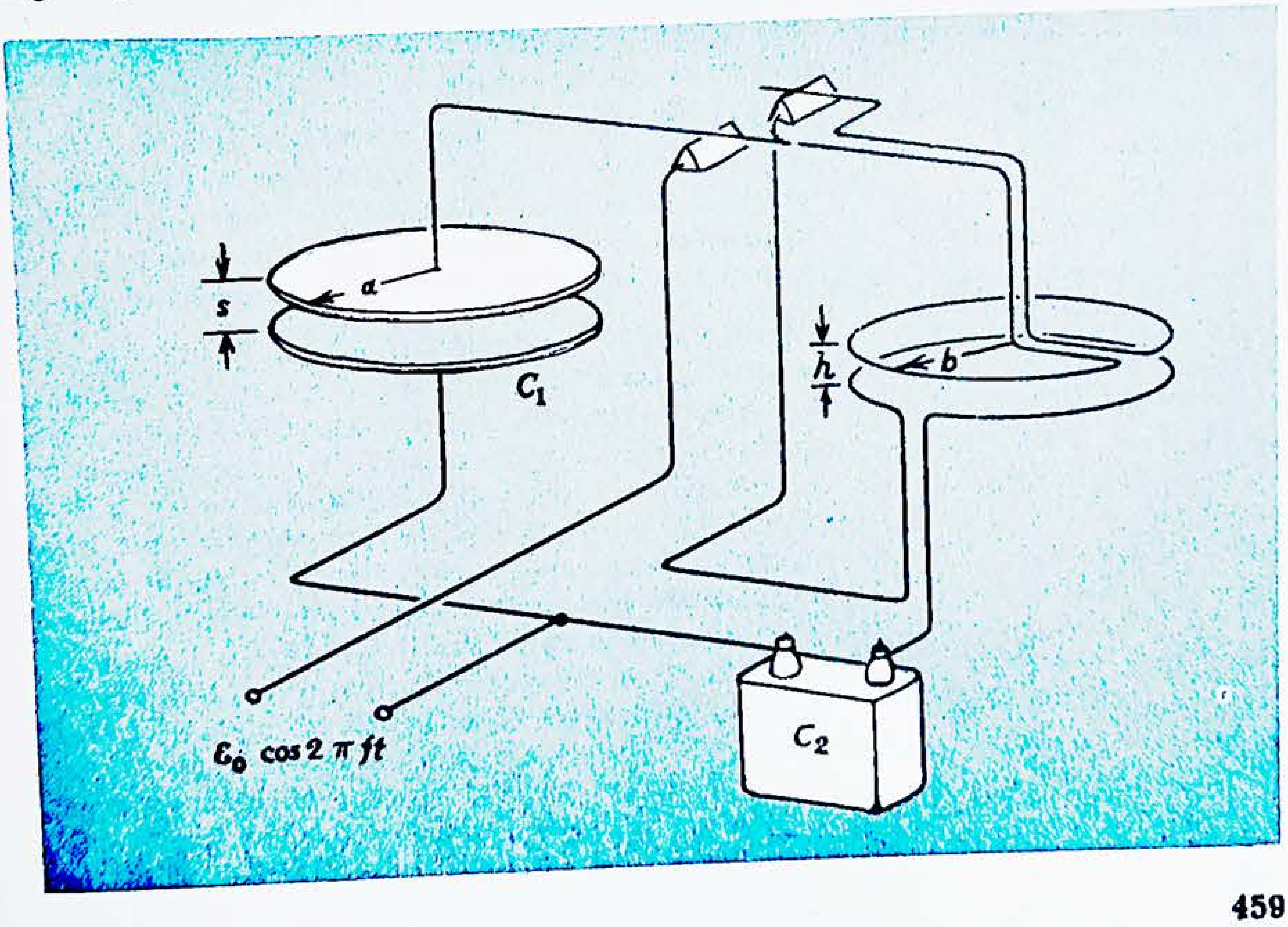
„Dacă o placă de cupru este rotită în apropierea unui ac magnetic, sau magnet, suspendat astfel încît ultimul se poate roti într-un plan paralel cu acela al plăcii, magnetul tinde să urmeze mişcarea plăcii, şi efectul este atît de puternic, încît magneţi sau plăci în greutate de mai multe kilograme pot fi astfel întoarse. Dacă magnetul şi placa sînt în repaus relativ, nici cel mai mic efect, atractiv sau repulsiv, sau de orice alt fel, nu poate fi observat între ele. Acesta este fenomenul descoperit de Arago."

Daţi propria dumneavoastră „explicaţie" la fenomenul lui Arago.

Prezicerea vitezei luminii din rezultatele unei experienţe electrice.

7.25. Constanta c care apare în ecuaţiile lui Maxwell poate fi determinată prin experienţe electrice implicînd doar cîmpuri de joasă frecvenţă. Să considerăm montajul arătat în figură. Forţa dintre plăcile condensatorului este comparată cu forţa dintre firele paralele care poartă curent în aceeaşi direcţie. O tensiune sinusoidală de frecvenţă f cicli/s este aplicată condensatorului plan-paralel C_1 şi de asemenea condensatorului C_2. Sarcina care curge în şi din C_2 constituie curentul în inele. Să presupunem că C_2 şi diferitele distanţe implicate au fost potrivite

Fig. la problema 7.25.



astfel încît forța în jos asupra plăcii superioare a lui C_1 să compenseze exact forța în jos asupra inelului superior. (Desigur, *greutățile* celor două părți trebuie potrivite încît să se echilibreze fără tensiune.) Arătați că în aceste condiții constanta c poate fi calculată din cantități măsurate astfel:

$$c = (2\pi)^{3/2} a \left(\frac{b}{h}\right)^{1/2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right) f \text{ m/s.}$$

Observați că sînt necesare doar măsurători de *distanță* și *timp* (sau frecvență), în afara unei măsurări a raportului capacităților C_1 și C_2. Unitățile electrice, ca atare, nu sînt implicate în rezultat. (Experiența se poate face la o frecvență de 50 cicli/sec dacă C_2 este ales, să spunem, de 10^6 ori C_1 iar inelele de curent sînt făcute din mai multe spire pentru a mări efectul unui curent mic.)

7.26. Discutați posibilitatea de a transmite semnale la distanțe prin inducție electromagnetică. Se poate face telegrafie fără fir care se bazează doar pe legea lui Faraday a inducției?

Capitolul 8

Se arată ce este special în cazul amortizării critice.

8.8. Pentru circuitul RLC amortizat din figura 8.2, dezvoltați o expresie pentru energia totală înmagazinată în circuit, energia în condensator și energie în inductanță, la orice timp t. Arătați că condiția de „amortizare critică" $R = 2\sqrt{L/C}$, este cea în care energia totală este disipată cel mai repede.

Efectul amortizării asupra frecvenței de rezonanță.

8.9. Folosind ec. 10 și 13, exprimați efectul amortizării asupra frecvenței unui circuit RLC serie. Fie $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ frecvența circuitului neamortizat. Presupuneți că se adaugă destulă rezistență pentru a aduce Q de la ∞ pînă la 1000. Prin ce procent este frecvența ω deplasată din ω_0?

8.10. Folosiți rezultatul problemei 7.7 pentru a scrie o formulă pentru auto-inductanța cilindrului conductor deschis arătat în partea (a) a figurii. Curgerea curentului considerat este circumferențială. Ca și în problema 7.7, acceptăm aproximația că cîmpul în interior este uniform pînă la capete. Acum să deschidem circuitul și să introducem un condensator, ca în partea (b) a figurii. Calculați frecvența de rezonanță a acestei combinații. Observați că aceasta este independentă de lungimea b. Primul magnetron care a făcut posibil radarul în cel de-al doilea război mondial conținea opt circuite rezonante de această formă. O secțiune transversală prin anodul de cupru al unuia din aceste tuburi este arătată, chiar în mărime naturală, în partea (c) a figurii. Estimați frecvența radiației emise.

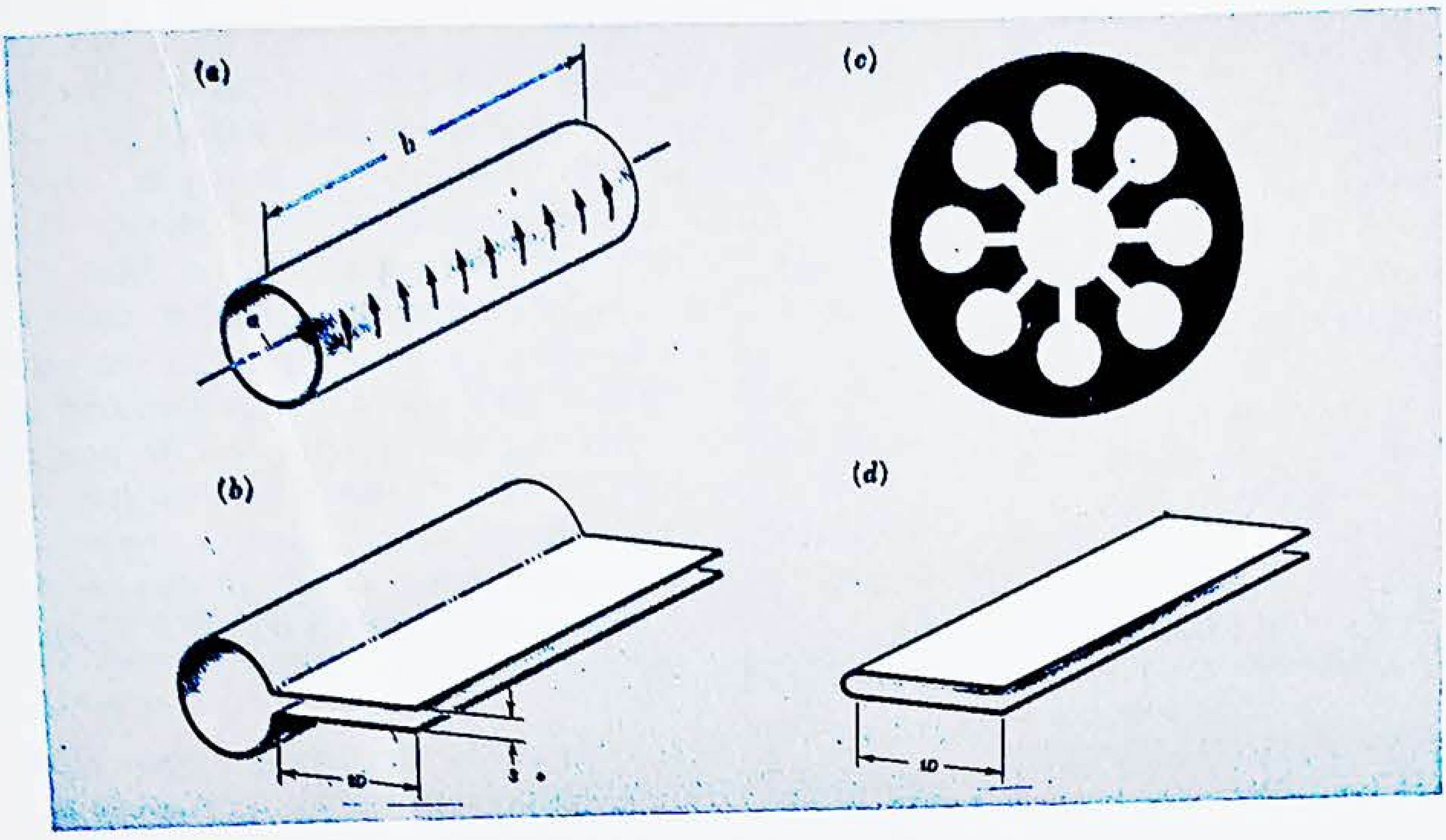


Fig. la problema 8.10.

(Frecvenţa nu este afectată prea mult de faptul că există opt cavităţi şi nu una.) Să presupunem că menţinînd w şi s fixe, încercăm să facem frecvenţa de rezonanţă cît mai mare posibil prin reducerea diametrului cilindrului pînă cînd în final $a = \frac{1}{2}s$ şi dispozitivul arată ca în partea (*d*) a figurii. V-aţi aştepta ca formula dumneavoastră să se aplice bine, în acest caz? Ar fi frecvenţa reală mai mare sau mai mică decît ar prezice formula dumneavoastră?

Capitolul 9

9.16. Un circuit rezonant de „Q ridicat", alcătuit dintr-o elice de cupru şi un condensator făcut din plăci metalice este montat sub un clopot de sticlă astfel încît întreg dispozitivul poate fi vidat. Cu aer la presiune normală sub clopotul de sticlă, frecvenţa de rezonanţă măsurată este $41{,}405 \pm 0{,}002$ Mc/sec. Cînd clopotul de sticlă este evacuat, o redeterminare a frecvenţei dă $41{,}418 +$ $+ 0{,}002$ Mc/sec. Din aceste date, ce concluzie puteţi trage asupra constantei dielectrice a aerului? Puteţi găsi alte efecte care ar putea contribui la variaţie?

9.17. Fenomenul de *hidratare* este important în chimia soluţiilor apoase. Aceasta se datorează faptului că un ion într-o soluţie strînge în jurul său un ciorchine de

molecule de apă, care aderă de ion destul de puternic. [Vezi, de exemplu, G. C. Pimentel, ed., *Chimia, o știință experimentală*, p. 314 (Freeman, San Francisco, 1963); sau L. Pauling, *Chimie generală*, p. 205 (Freeman, San Francisco, 1953).] Forța de atracție dintre un dipol și o sarcină punctuală este răspunzătoare pentru aceasta. Estimați energia necesară pentru a separa un ion care poartă o sarcină e de o moleculă de apă, presupunînd că inițial ionul este localizat la 1,5 angströmi de poziție efectivă a dipolului de H_2O. (Această distanță este de fapt o cantitate destul de vag definită deoarece molecula de apă, privită de aproape, este o distribuție de sarcină, nu un dipol infinitesimal.) Care parte a moleculei de apă se va găsi mai aproape de un ion negativ?

Sferă dielectrică în cîmp uniform.

9.18. Din examinarea liniilor de cîmp din figura 9.29 este posibil a deduce constanta dielectrică a materialului. Liniile au fost trase cu multă precizie. Vedeți dacă puteți găsi vreo trăsătură care este ușor de măsurat și comparat cu teoria, și prin aceasta deduceți, aproximativ, valoarea lui k folosită la obținerea acelei diagrame.

Cavitate sferică în mediu dielectric.

9.19. Într-un condensator mare, intensitatea maximă a cîmpului în dielectricul de ulei, în regim de funcționare nominal, este 90 kV/cm. Constanta dielectrică a uleiului este 2,24. Să presupunem că în ulei există o bulă de gaz. Care este intensitatea cîmpului în interiorul bulei de gaz? (Aceasta este problema sferei dielectrice, întoarsă în afară. Ar trebui să puteți adapta rezultatul nostru pentru sfera dielectrică la acest caz.) Ar fi bulele de gaz foarte de nedorit în condensatorul cu ulei?

Întrebare pentru discuție.

9.20. Care ar fi sensul unei polarizări negative? Credeți că ar putea să apară?

În unele scopuri, simetria triplă este la fel de bună ca și simetria circulară completă.

9.21. Imaginați-vă o moleculă triatomică alcătuită din atomi identici într-o configurație echilaterală. (In realitate, nu sînt cunoscute astfel de molecule, dar nu are

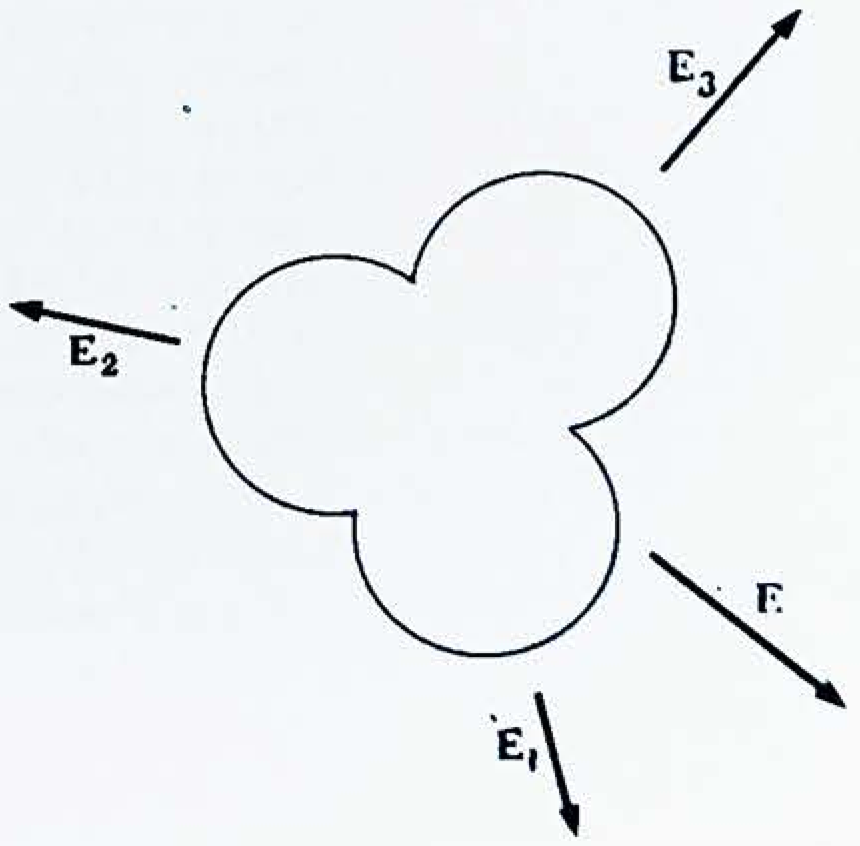


Fig. la problema 9.21.

importanță.) Să considerăm polarizarea acestei molecule printr-un cîmp electric aplicat în planul triunghiului. Este evident din simetria moleculei că polarizabilitatea trebuie să fie aceeași pentru intensitățile cîmpurilor $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ și $\mathbf{E}_3$ aplicate în direcțiile arătate. Ar trebui să puteți arăta că din aceasta, folosind componente și superpoziții, că polarizabilitatea este aceeași pentru un cîmp de intensitate $\mathbf{E}$ aplicat în *orice* direcție în plan. Veți fi demonstrat astfel că orice moleculă cu simetrie triplă este indistingibilă de una cu simetrie circulară completă, cîtă vreme este implicată polarizabilitatea în acel plan. O teoremă asemănătoare cu aceasta în trei dimensiuni ne asigură că molecula tetraedrică de metan din figura 9.13 trebuie să aibă o polarizabilitate sferic simetrică.

O demonstrație că tensorul de polarizare trebuie să fie simetric.

9.22. Problema este de a construi, cu îndrumarea care va fi dată, o demonstrație a simetriei tensorului de polarizabilitate. Pentru simplitate, vom lucra doar în două dimensiuni, dar aceasta este suficient pentru a arăta natura raționamentului — o a treia dimensiune nu aduce nimic nou. Avem un obiect oarecare polarizabil, care nu are nici un fel de simetrie, pe care îl localizăm prin coordonate xy. Un cîmp de intensitate $\mathbf{E}$ induce un moment dipolar $\mathbf{p}$, legat linear de $\mathbf{E}$ prin

$$p_x = \varepsilon_0(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)$$
$$p_y = \varepsilon_0(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y) \qquad (1)$$

Sarcina noastră este de a dovedi că α_{xy} și α_{yx} trebuie să fie egali.

Demonstrația se bazează pe conservarea energiei. Dacă, într-un cîmp aplicat $\mathbf{E}$, un sistem își schimbă momentul său dipolar de la $\mathbf{p}$ la $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$, lucrul efectuat de cîmp este $dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$. După cum s-a explicat în § 9.14, motivul este că $d\mathbf{p}$ reprezintă tocmai cantitatea de deplasare de sarcină din această variație, în timp ce proiecția lui $d\mathbf{p}$ după $\mathbf{E}$ este cantitatea de deplasare de sarcină în direcția cîmpului. Să presupunem că sistemul este într-un cîmp $\mathbf{E}_1$, cu un moment dipolar corespunzător $\mathbf{p}_1$, care va fi dat desigur de ecuația 1. Să numim această stare *I*. Să schimbăm acum cîmpul aplicat pînă la $\mathbf{E}_2$ făcînd ceva cu sursa acestui cîmp. Momentul dipolar se va schimba în $\mathbf{p}_2$ și o anumită cantitate de lucru mecanic W_{12} va fi efectuată, aducînd sistemul în starea *II*. Acum am fi putut efectua această schimbare în multe moduri diferite. Lucrul efectuat, totuși, trebuie să fie același pentru toate aceste căi, dacă energia este conservată, deoarece ele lasă sistemul în aceeași stare finală, anume, polarizat cu un moment dipolar $\mathbf{p}_2$. Să luăm $\mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{p}_1 = 0$ drept stare *I*, și să comparăm două moduri deosebit de simple de a atinge starea *II*. Cele două metode de variere a cîmpului

de la zero la $\mathbf{E}_2$, de componente E_{2x} şi E_{2y}, sînt descrise în schiţa de mai jos:

Prima metodă:

Se lasă $E_y = 0$; se schimbă E_x la E_{2x} Lucru efectuat =
Se lasă $E_x = E_{2x}$; se schimbă E_y la E_{2y} Lucru efectuat =
Lucru total efectuat =

A doua metodă

Se lasă $E_x = 0$; se schimbă E_y la E_{2y} Lucru efectuat =
Se lasă $E_y = E_{2y}$; se schimbă E_x la E_{2x} Lucru efectuat =
Lucru total efectuat =

Lucrul efectuat în primul pas al primei metode este

$$\int_{E_x = 0}^{E_x = E_{2x}} E_x \mathrm{d}p_x$$

iar $\mathrm{d}p_x$ poate fi exprimat în funcţie de $\mathrm{d}E_x$ prin ecuaţia 1. Găsiţi lucrul total efectuat în fiecare dintre metodele de variere, şi egalaţi cele două cantităţi.

Cum se comportă un tensor la rotaţie.

9.23. Pentru a vedea cum se transformă elementele unui tensor la rotaţia coordonatelor, să considerăm pentru simplitate, un caz bidimensional. Să presupunem că vectorii bidimensionali **A** şi **B** sînt legaţi liniar ca mai departe, într-un sistem de coordonate xy particular:

$$B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y; \quad B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y.$$

Coeficienţii α alcătuiesc un tensor. Să considerăm acum o pereche de axe x' şi y' rotite în sens contrar acelor de ceasornic prin unghiul θ faţă de axele x şi y. În noile coordonate vectorii **A** şi **B**, care rămîn neschimbaţi în spaţiu, au diverse componente $A_{x'}$ etc. Care sînt noile componente exprimate în funcţie de cele vechi? Tensorul α aplicat lui **A** trebuie să dea în continuare acelaşi vector **B**. Dacă acesta trebuie să fie adevărat, care trebuie să fie relaţia dintre noile elemente ale tensorului şi cele vechi? Presupuneţi $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$. Arătaţi că această simetrie este păstrată la rotaţie, şi că se poate găsi un unghi θ care face aceşti coeficienţi zero. Se cere doar mai multă răbdare pentru a efectua o analiză asemănătoare în trei dimensiuni, şi a obţine astfel regulile de transformare pentru un tensor cum este tensorul de polarizabilitate.

Forţa dintre doi dipoli.

9.24. Un studiu al forţei dintre dipoli. Doi dipoli dispuşi astfel → → se atrag; doi dipoli dispuşi astfel ↑ ↑ se resping. Explicaţi de ce. Aflaţi mărimea forţei, în fiecare caz. Puteţi reprezenta dipolul prin două sarcini punctuale la o mică distanţă depărtare. Cu ce putere a distanţei variază forţa? Să considerăm acum doi dipoli dispuşi astfel: Care este *direcţia* forţei asupra fiecărui dipol? (Acesta este un bun exemplu de forţă *necentrală*. Forţele necentrale, de altă origine decît electrică, joacă un rol semnificativ în nucleu. Ele sînt răs-

punzătoare pentru faptul că nucleul de deuteriu nu este complet sferic dar ușor deformat, fapt a cărui descoperire a revelat întîia oară prezența unor astfel de forțe între nucleoni.)

Energia unei perechi de dipoli.

9.25. Doi dipoli permanenți au momente dipolare $\mathbf{p}_1$ și $\mathbf{p}_2$ și sînt dispuși cum se arată în partea (a) a figurii, la distanța r unul de altul și făcînd unghiurile θ_1 și θ_2 respectiv cu linia care îi unește. Problema este de a calcula energia acestui sistem, care înseamnă energia necesară pentru a-l aduce în această configurație, pornind cu doi astfel de dipoli infinit depărtați. Aceasta nu cuprinde energia asociată cu crearea de astfel de dipoli. Mărimile dipolilor sînt presupuse fixate odată pentru totdeauna, dar ei pot fi orientați în diverse direcții. Dipolii pot fi aduși în pozițiile lor finale în multe moduri, și lucrul total

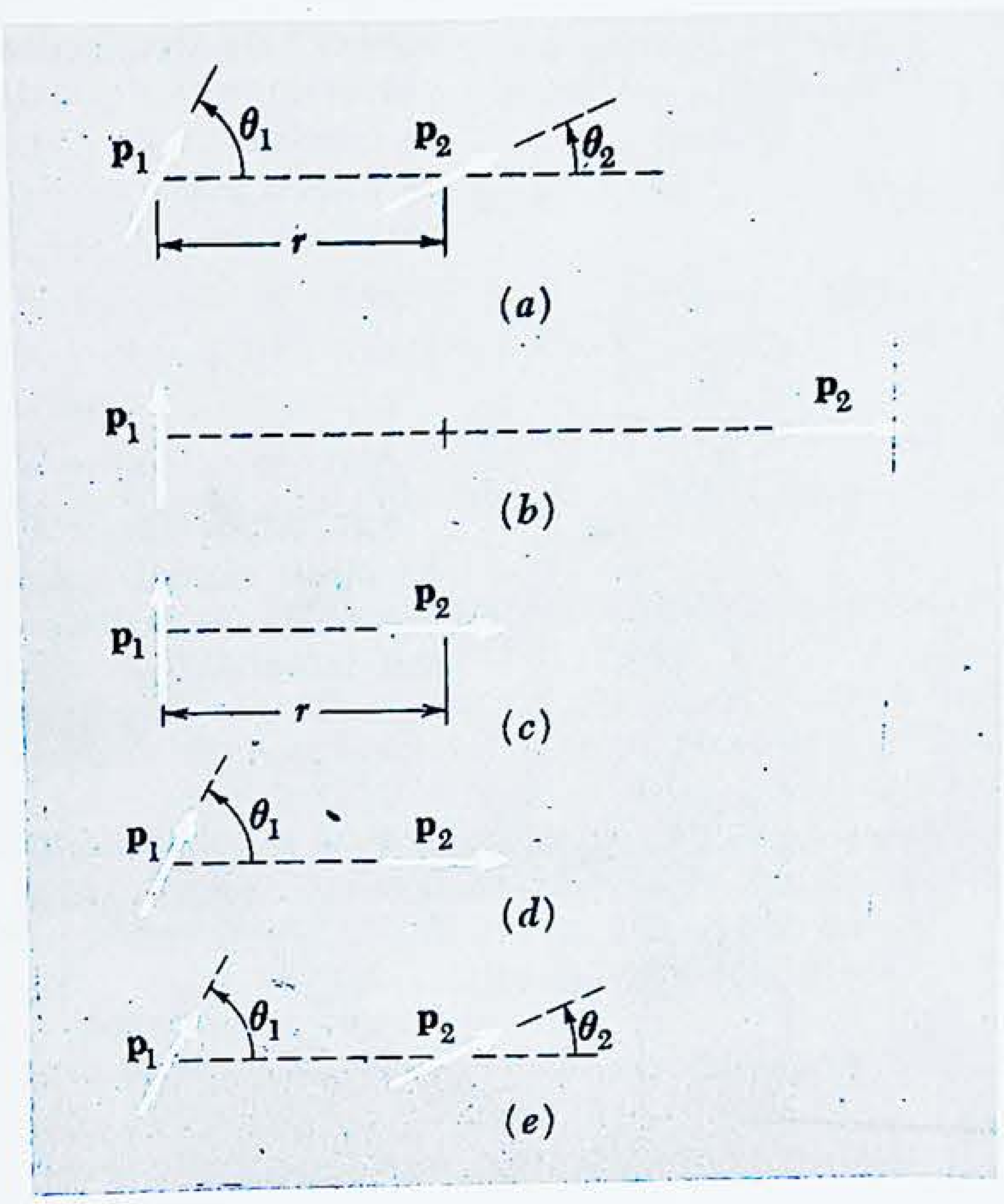


Fig. la problema 9.25.

efectuat trebuie să fie același în toate cazurile. O cale care face calculul foarte simplu este următoarea: Începem cu $\mathbf{p}_1$ și $\mathbf{p}_2$ foarte departe unul de altul, și orientați cum se arată în partea (b) a figurii. Menținînd această orientare, aducem $\mathbf{p}_2$ din dreapta pînă cînd este la distanța r dorită de $\mathbf{p}_1$. Aceasta nu necesită nici un lucru mecanic. De ce nu? Rotiți $\mathbf{p}_1$ în orientarea sa finală. Calculați lucrul necesar pentru a efectua această rotație în cîmpul lui $\mathbf{p}_2$, care este încă orientat de-a lungul lui $\theta = 0$. Acum

rotiți $\mathbf{p}_2$ în orientarea sa finală, $\theta = \theta_2$. Lucrul necesar pentru a efectua această rotație în cîmpul lui $\mathbf{p}_1$ se poate calcula descompunînd $\mathbf{p}_1$ într-o componentă longitudinală $p_1 \cos \theta_1$ și o componentă transversală $p_1 \sin \theta_1$ și tratînd aceste cîmpuri, la poziția lui $\mathbf{p}_2$, în mod separat. Adunați tot lucrul efectuat și arătați că rezultatul se poate scrie

$$W = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2].$$

Energia unui lanț de dipoli.

9.26. Pentru această problemă și următoarea veți avea nevoie de rezultatul prob. 9.25 pentru anumite aranjări foarte simple ale perechii de dipoli. Să considerăm un șir liniar de dipoli egal depărtați, întinzîndu-se de la minus la plus infinit. Presupunem că pozițiile dipolilor sînt fixate și că fiecare dipol, cu moment de mărime p, este liber să se orienteze în orice direcție, ca și cum ar fi montat pe un pivot. Întrebarea este, care este aranjarea de energie minimă? Desigur, dacă avem un șir infinit, energia totală poate fi infinită, dar sîntem interesați în energia pe unitate de lungime de șir. Comparați următoarele aranjări față de energia medie per dipol. Care are cea mai înaltă energie? Care are cea mai joasă energie?

(a) ... ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ...
(b) ... ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ...
(c) ... → → → → → → → → ...
(d) ... ← → ← → ← → ← → ...

9.27. Aflați diferența de energie dintre un șir infinit de dipoli aranjați astfel: ... → → → → → → → → ... și unul în care, la dreapta unui anumit punct b toți dipolii sînt inversați:

... → → → → ← ← ← ← ...
b

Această diferență de energie este asociată cu frontiera b dintre două domenii. $\left[\textit{Notă matematică: } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \frac{\pi^3}{6}.\right]$

Comparați, aproximativ, energia unui șir cu două astfel de frontiere foarte depărtate, ca:

... → → → → → ← ← ← ← ← ← → → → → ...
b b

cu energia unui șir în care cele două frontiere au devenit atît de apropiate cît se poate fără a se „anihila" una pe alta:

... → → → → → → → ← → → → → ...
b b

Față de această diferență de energie, ați spune că cele două frontiere ar tinde să se respingă una pe cealaltă sau să se atragă una pe cealaltă?

Există un mod prin care o întoarcere ar putea să aibă loc mai economic, adică, cu cheltuială mai mică de energie, decît în inversarea bruscă considerată pînă aici? Comparați următoarele imagini de inversare. Poate puteți imagina o frontieră încă mai ieftină.

(a) (Brusc): ... → → → → → ← ← ← ...

(b) ... → → → → → ↑ ← ← ← ...

(c) ... → → → → ↘ ↑ ↙ ← ← ...

Verificare experimentală a formulei Clausius-Mosotti.

9.28. Relația exprimată prin ecuația 72 este numită formula Clausius-Mosotti. Ea este exprimată de obicei prin constanta dielectrică k. Arătați că o formulă echivalentă este $\frac{3}{N}\left(\frac{k-1}{k+2}\right) = \alpha$. Datele tabelate mai jos sînt extrase dintr-un articol de Michels, Jaspers și Sanders, *Physica*, **1**, 627 (1934), care au măsurat constanta dielectrică a hidrogenului pur la diferite presiuni și temperaturi:

Temperatura (°C)	23,8	23,8	23,8	23,8
Presiunea (atmosfere)	1,02	57,5	221,6	1011,6
Densitatea (g/cm³)	0,00118	0,06604	0,2361	0,5780
Constanta dielectrică	1,00052	1,03109	1,11413	1,29633

Cît de bine se potrivește aceasta cu formula lui Clausius-Mosotti?

Întrebare pentru discuție: „Catastrofa $N\alpha/3$".

9.29. Poate catastrofa prezisă de ec. 72, în eventualitatea $N\alpha/3 > 1$, să aibă loc în realitate? Pentru a vedea ce este implicat, să considerăm un „cristal" care constă doar din doi atomi similari, A și B, fixați într-un mod oarecare la distanța d unul de celălalt. Arătați că dacă A este polarizat de-a lungul liniei AB, el generează un cîmp în B care tinde să polarizeze pe B în aceeași direcție. Se poate concepe ca sistemul să intre într-o stare polarizată în care cîmpul lui A să mențină polarizarea lui B și invers? Discutați această întrebare din două puncte de vedere. Mai întîi, calculați distanța la care acest efect ar apărea pentru atomii A și B dacă polarizabilitatea fiecăruia este α. Cum se compară aceasta cu mărimile pe care A și B sînt de așteptat să le aibă? În al doilea rînd, considerați energia sistemului ipotetic polarizat.

Un dielectric „artificial".

9.30. Pentru focalizarea undelor radio scurte au fost făcuți dielectrici artificiali prin montarea unor mici sfere metalice într-o matrice de material plastic, ca atomii într-o rețea cristalină. Plasticul servește doar pentru a ține sferele pe locul lor și are un efect electric neglijabil. Polarizabilitatea unei sfere metalice se poate calcula cum s-a descris în probl. 9.9. Găsiți constanta dielectrică a unei rețele cubice de sfere cu diametrul de 2 cm, cu distanța dintre centre de 4 cm. Este posibil să se obțină $N\alpha/3 > 1$

pentru un astfel de dispozitiv? Cea mai bună şansă este cu o reţea cubică cu feţe centrate, unul din modurile de împachetare cele mai strînse. Ce teoremă ar fi violată dacă o reţea de sfere metalice ar manifesta polarizare indusă spontană?

Capitolul 10

10.14. În discuţia din figura 10.9, am presupus pentru simplitate că aspectul cîmpului de inducţie **B** avea simetrie axială, implicînd faptul că B_r are mărime constantă în jurul inelului. Arătaţi că aceasta nu este în realitate necesar; adică, arătaţi că obţinem ecuaţia 18 chiar dacă B_r nu este constant în jurul inelului.

10.15. Un solenoid cilindric are o înfăşurare într-un singur strat de rază r_0. Este atît de lung încît în vecinătatea unui capăt cîmpul poate fi luat ca acela al unui solenoid semi-infinit. Arătaţi că punctul de pe axa solenoidului unde o mică probă paramagnetică va simţi forţa maximă este situat la distanţa $r_0/\sqrt{15}$ în interior de la capăt.

Cîmpul mediu în regiunea apropiată pentru un dipol electric finit şi un inel de curent.

10.16. În cazul unui dipol alcătuit din două sarcini Q şi $-Q$ separate prin distanţa s, volumul regiunii apropiate, în care cîmpul este esenţial diferit de cîmpul de dipol ideal, este proporţional cu s^3. Intensitatea cîmpului din această regiune este proporţională cu $Q/4\pi\varepsilon_0 s^2$, în puncte similare cînd s variază. Momentul dipolar $p = Qs$, astfel încît dacă micşorăm s menţinînd p constant, ce face produsul volumului şi intensităţii cîmpului? Efectuaţi raţionamentul corespunzător pentru cîmpul magnetic al unei bucle de curent. Morala este: Dacă ne interesăm de cîmpul mediu spaţial în orice volum care conţine dipoli, diferenţa esenţială dintre „interiorul" dipolilor electric şi magnetic *nu* poate fi neglijată, chiar dacă altfel considerăm dipolii drept infinitesimali.

Detecţia magnetică a submarinelor.

10.17. Un submarin cu carcasă de oţel produce o perturbaţie locală a cîmpului magnetic terestru, care face posibilă detecţia unui submarin printr-un instrument sensibil la variaţii foarte mici ale cîmpului. Să presupunem că avem un magnetometru care poate fi purtat la o oarecare distanţă în urma unui avion (pentru a-l îndepărta de perturbaţia avionului însuşi) şi care este capabil de a indica o fluctuaţie de 1 parte în 10^5 în cîmpul înconjurător. Presupunînd carcasa submarinului demagnetizată, prin îndepărtarea oricărei magnetizări remanente, totuşi carcasa reprezintă pentru cîmpul magnetic terestru un mediu magnetic anormal, şi ne aşteptăm ca ea să dezvolte un moment dipolar indus suficient pentru a modifica cîmpul terestru, pe o lungime

de vas, prin aproximativ mărimea cîmpului neperturbat. Dacă aceasta este situaţia, care este distanţa maximă la care detecţia poate fi încă sperată? Să presupunem că printr-o îmbunătăţire de proiectare sensibilitatea magnetometrului a putut fi crescută printr-un factor de doi. Cum ar modifica aceasta numărul de avioane-mile necesare pentru a cerceta o arie dată a oceanului? (În realitate, problema nu este atît de simplă. Fluctuaţiile naturale ale cîmpului dau un „nivel de zgomot" care poate eventual să mascheze anomalia produsă de submarin, oricît de sensibil ar fi magnetometrul. O sursă de astfel de fluctuaţii este foarte simplă: valurile oceanului mişcă apa de mare în cîmpul terestru; apa de mare este un conductor; curentul curge, producînd cîmpuri magnetice.)

Întrebare pentru discuţie.

10.18. Avem două sfere goale de sticlă cu diametrul de 1,2 cm. Una conţine un mic magnet în formă de bară de aproximativ 1 cm lungime. Cealaltă conţine un electret — o bară de material care are o polarizare electrică permanentă. Aceasta ar putea fi descrisă la fel de bine ca o bară făcută dintr-un izolator foarte bun cu o sarcină pozitivă prinsă la un capăt şi o sarcină negativă la celălalt. Consideraţi problema detectării prezenţei a unuia sau a celuilalt dintre acestea, dacă obiectul este ţinut în interiorul pumnului închis al cuiva. Cum aţi explica diferenţa cuiva care avea doar atîta fizică cîtă ştiaţi şi dumneavoastră înainte de a urma acest curs?

10.19. Un dipol magnetic de intensitate m este situat într-un cîmp magnetic omogen de intensitate B_0, cu momentul dipolar orientat în sens opus cîmpului. Arătaţi că în cîmpul combinat, există o anumită suprafaţă sferică,

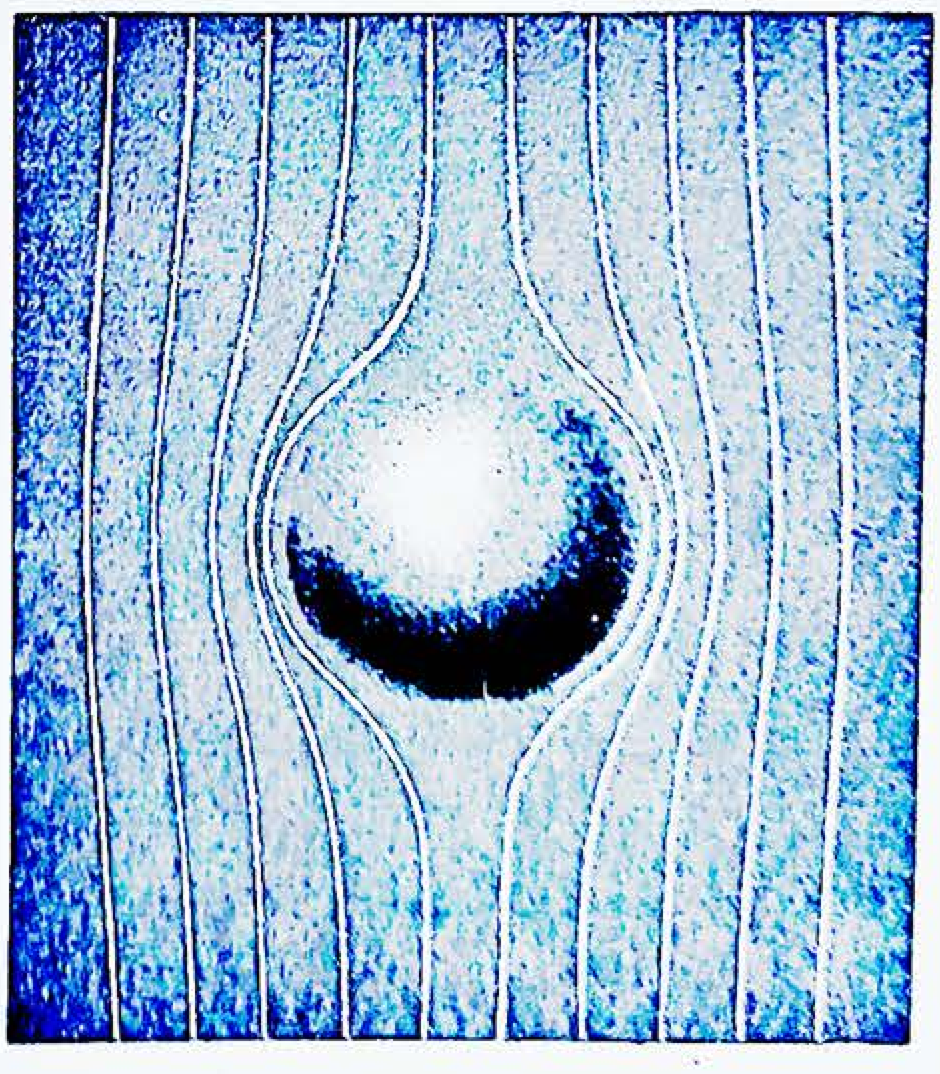
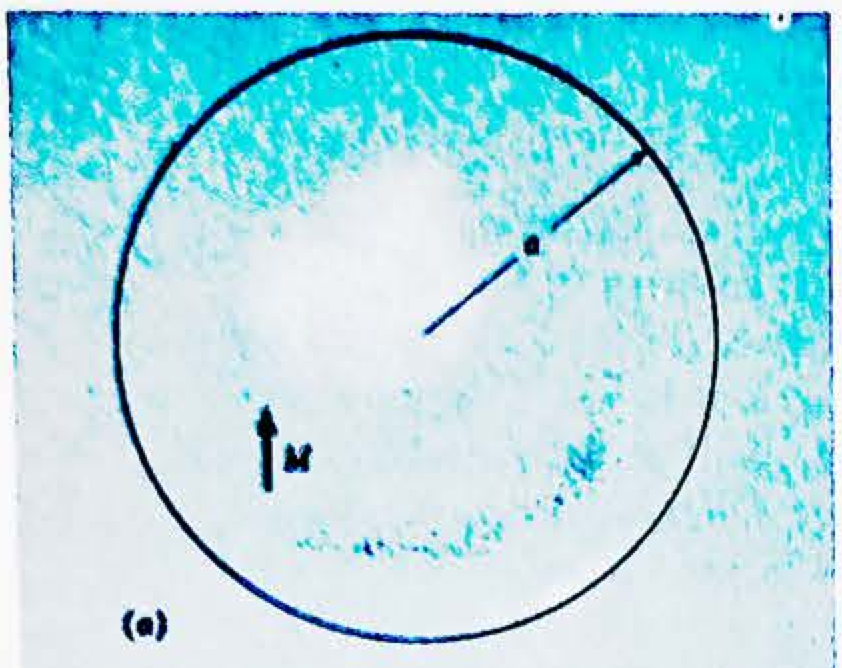


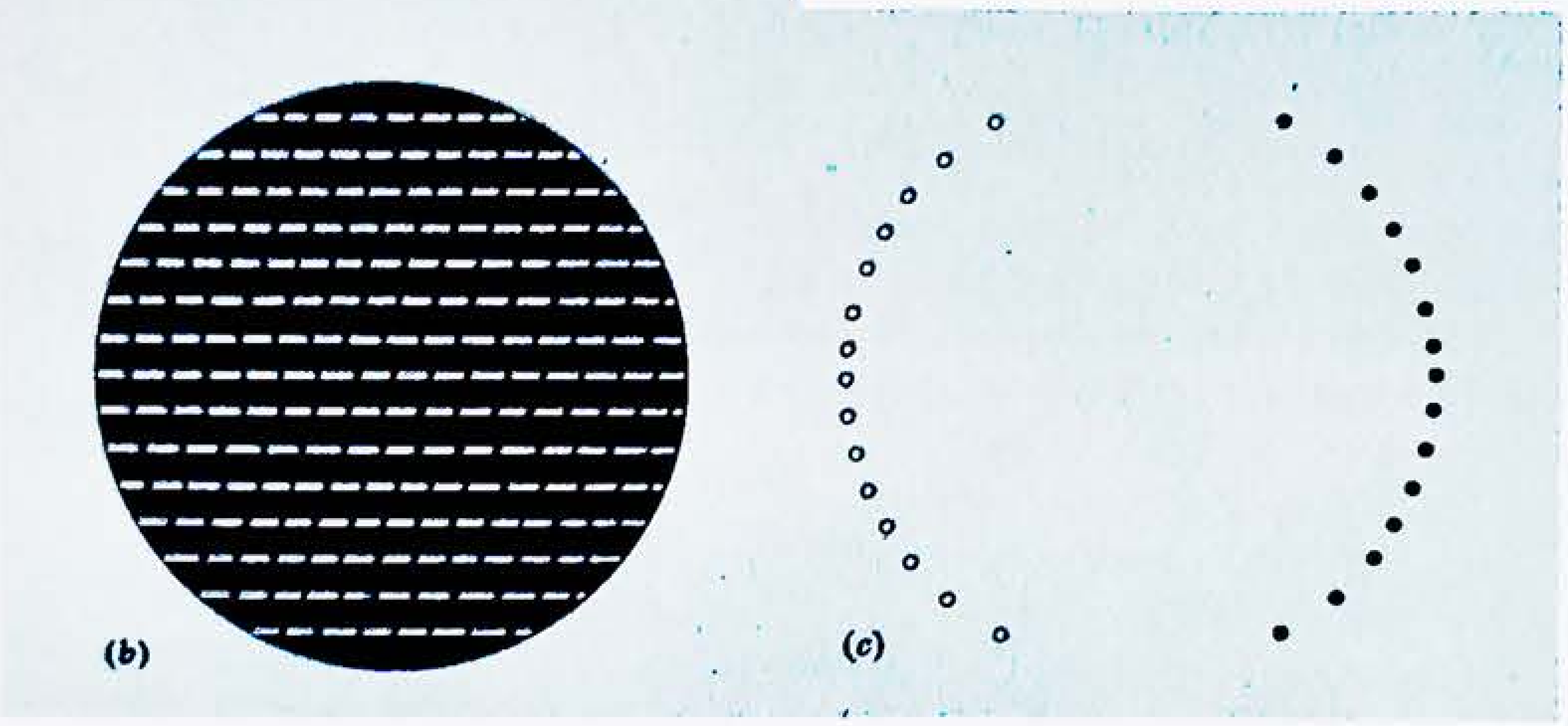
Fig. la problema 10.19.

centrată pe dipol, prin care nu trece nici o linie de cîmp. Cîmpul exterior, se poate spune, a fost „scos afară“ din această sferă. Liniile de cîmp în afara sferei au fost reprezentate în figură. Cum arată liniile de cîmp în interiorul sferei? Care este intensitatea cîmpului imediat în afara sferei, la ecuator? Cîtă vreme ne interesează efectele asupra cîmpului exterior, dipolul ar putea fi înlocuit prin curenți curgînd pe suprafața sferică, dacă am putea obține distribuția de curent corectă. Care este cîmpul în interiorul sferei în acest caz? De ce puteți fi siguri? (Aceasta este o configurație importantă în studiul supraconductibilității. O sferă supraconductoare, într-adevăr, scoate afară tot cîmpul din interiorul ei.)



10.20. Să considerăm sfera uniform magnetizată arătată în figură. Împărțind sfera în straturi de aceeași grosime, puteți arăta că ea este echivalentă cu bobina care poartă curent din partea (*c*) a figurii. Folosind această echivalență, discutați cîmpul magnetic al unei astfel de bobine, atît în interior cît și în exterior. Comparați bobina cu pătura încărcată în rotație din problema 10.6.

Fig. la problema 10.20.

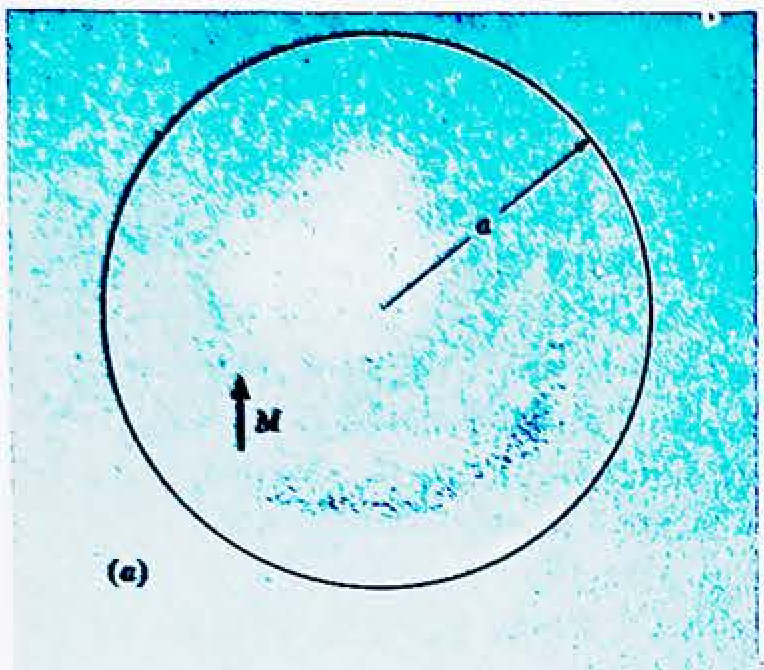


10.21. Dezvoltați ecuații Maxwell așa cum ar apărea dacă am fi avut sarcină magnetică și curenți de sarcină magnetică ca și sarcină electrică și curenți electrici. Introduceți orice simbol nou de care aveți nevoie și definiți atent ce reprezintă. Aveți deosebită grijă asupra semnelor + și —.

Aceasta completează discuția din § 10.5 arătînd ce se întîmplă cu orbitele electronice orientate într-un plan paralel cu cîmpul magnetic aplicat.

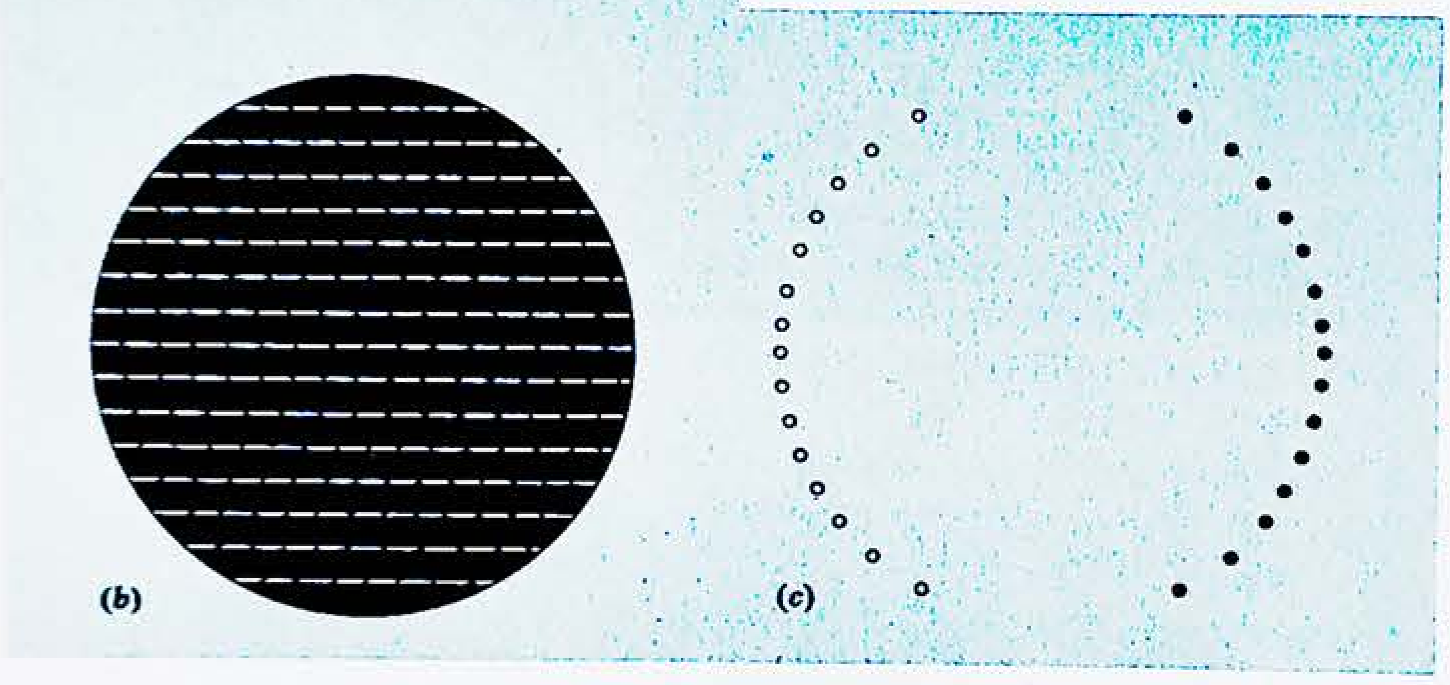
10.22 În § 10.5, ilustrat în figura 10.12, am discutat ce se întîmplă cînd un cîmp magnetic este aplicat perpendicular pe orbita unei particule încărcate care se rotește pe un cerc sub influența unei forțe. În această problemă veți găsi ce se întîmplă cînd liniile de cîmp se află în planul orbitei. Tot ce aveți de făcut este să umpleți spațiile libere în următoarea analiză, după ce veți gîndi atent asupra fiecărui pas:

centrată pe dipol, prin care nu trece nici o linie de cîmp. Cîmpul exterior, se poate spune, a fost „scos afară" din această sferă. Liniile de cîmp în afara sferei au fost reprezentate în figură. Cum arată liniile de cîmp în interiorul sferei? Care este intensitatea cîmpului imediat în afara sferei, la ecuator? Cîtă vreme ne interesează efectele asupra cîmpului exterior, dipolul ar putea fi înlocuit prin curenţi curgînd pe suprafaţa sferică, dacă am putea obţine distribuţia de curent corectă. Care este cîmpul în interiorul sferei în acest caz? De ce puteţi fi siguri? (Aceasta este o configuraţie importantă în studiul supraconductibilităţii. O sferă supraconductoare, într-adevăr, scoate afară tot cîmpul din interiorul ei.)



10.20. Să considerăm sfera uniform magnetizată arătată în figură. Împărţind sfera în straturi de aceeaşi grosime, puteţi arăta că ea este echivalentă cu bobina care poartă curent din partea (c) a figurii. Folosind această echivalenţă, discutaţi cîmpul magnetic al unei astfel de bobine, atît în interior cît şi în exterior. Comparaţi bobina cu pătura încărcată în rotaţie din problema 10.6.

Fig. la problema 10.20.



10.21. Dezvoltaţi ecuaţii Maxwell aşa cum ar apărea dacă am fi avut sarcină magnetică şi curenţi de sarcină magnetică ca şi sarcină electrică şi curenţi electrici. Introduceţi orice simbol nou de care aveţi nevoie şi definiţi atent ce reprezintă. Aveţi deosebită grijă asupra semnelor + şi —.

Aceasta completează discuţia din § 10.5 arătînd ce se întîmplă cu orbitele electronice orientate într-un plan paralel cu cîmpul magnetic aplicat.

10.22 În § 10.5, ilustrat în figura 10.12, am discutat ce se întîmplă cînd un cîmp magnetic este aplicat perpendicular pe orbita unei particule încărcate care se roteşte pe un cerc sub influenţa unei forţe. În această problemă veţi găsi ce se întîmplă cînd liniile de cîmp se află în planul orbitei. Tot ce aveţi de făcut este să umpleţi spaţiile libere în următoarea analiză, după ce veţi gîndi atent asupra fiecărui pas:

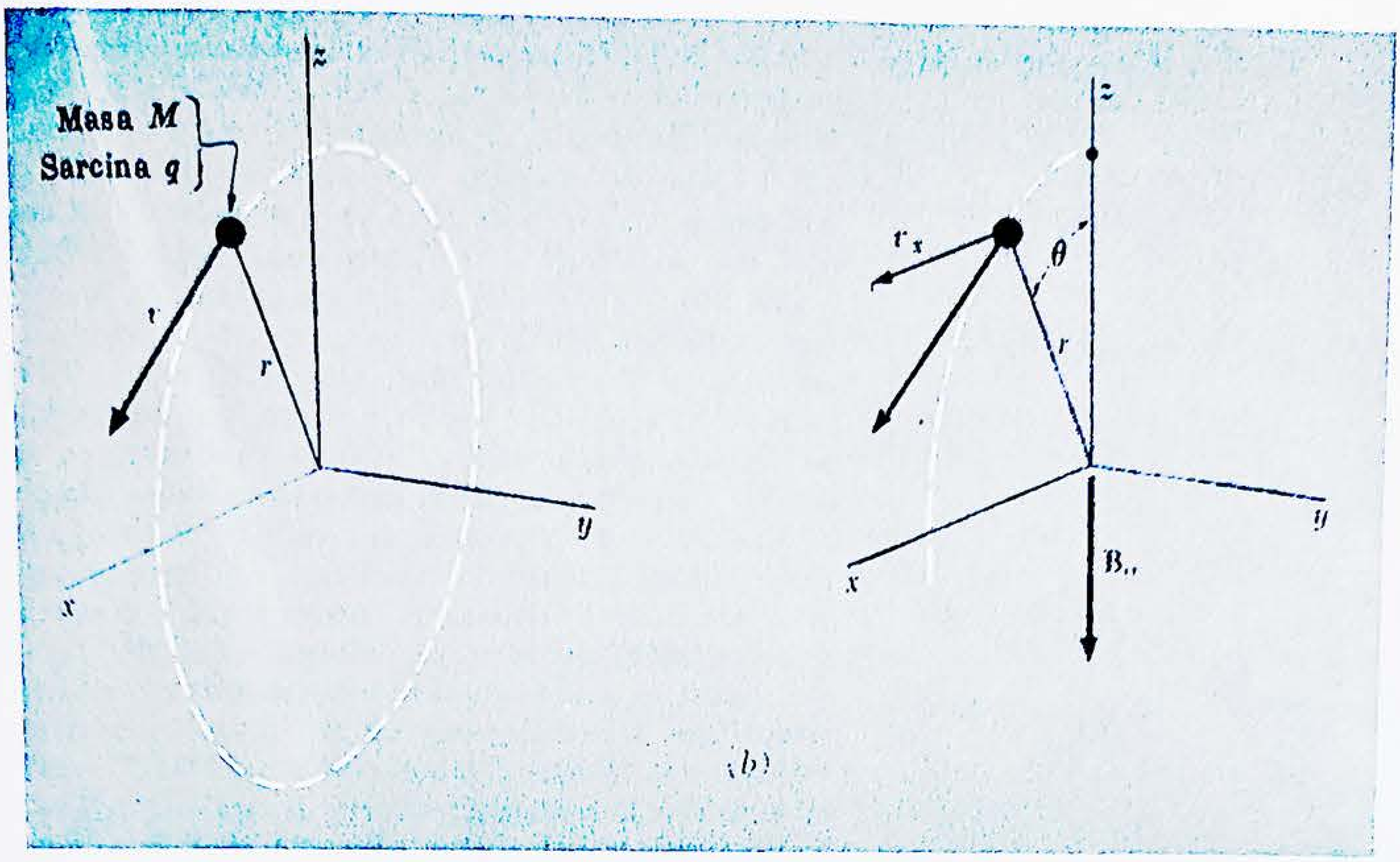


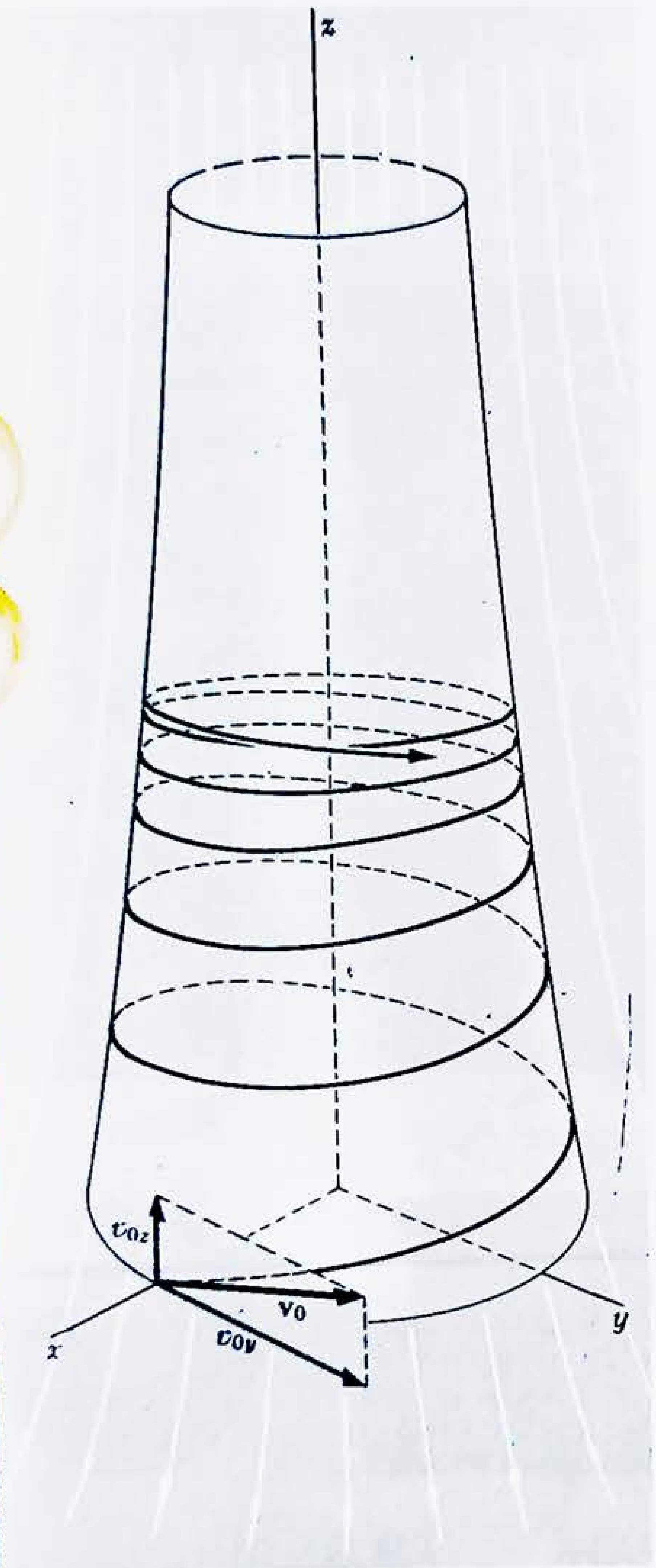
Fig. la problema 10.22.

O particulă de masă M, sarcină q, se rotește cu viteza v pe o traiectorie circulară în planul xz. Ea este menținută pe această traiectorie printr-o forță centrală a cărei origine nu ne preocupă; vezi partea (*a*) a figurii. Momentul cinetic **L**, asociat cu această mișcare, este un vector în direcție ...., de mărime $L =$ .... (Desenați pe diagramă.) Conectăm acum un cîmp magnetic $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}}B$ ca în partea (*b*) a figurii. Cu particula în mișcare încă în planul xz, acesta va produce o nouă forță, de mărime .... și direcție .... care acționează asupra particulei. (Indicați pe diagramă.) Presupunem că această forță este atît de slabă încît modifică mișcarea particulei doar treptat. Atunci am putea media efectul forței pe o orbită circulară completă. Forța se mediază la zero, dar *cuplul* rezultînd din ea nu. Cuplul instantaneu în jurul axei .... are mărimea ...., iar media pe un cerc întreg este .... Deci cuplul mediu este un vector **N**, de mărime $N =$ .... și direcție .... Deoarece cuplul este rata de variație a momentului cinetic, aceasta ne spune că momentul cinetic **L**, se va ...., cu scurgerea timpului. Comparînd aceasta cu ceea ce s-a întîmplat cînd orbita era perpendiculară pe cîmp (fig. 10.12), observăm că .... În cazul de acum mișcarea particulei, așa cum apare unui observator privind de jos în sus de-a lungul axei z, ar arăta astfel: (faceți o schiță).

Un electron liber într-un cîmp magnetic variabil.

10.23. În § 10.5 am găsit că raza orbitei unei particule încărcate rămîne neschimbată cînd se instalează un cîmp **B** extern uniform – se schimbă doar viteza orbitală. Dar aceasta era adevărat doar dacă $\Delta v \ll v_0$, ceea ce este același lucru cu a spune că forța magnetică qvB este mult mai mică decît forța F_0 care leagă particula de un centru oarecare de atracție. Un caz interesant în care această presupunere evident *nu* poate să fie verificată este acela al electronului liber, nelegat de nimic. Ce se întîmplă în acest caz? Pentru a studia aceasta, porniți cu o particulă de sarcină q, masă M, în mișcare pe un cerc într-un cîmp magnetic **B**. Aceasta este vechea situație a „ciclotronului", guvernată de condiția $Mv^2/r = qvB$. Să presupunem că B este variat lent. Un cîmp electric indus va accelera particula în direcția mișcării și relația $dv = (qr/2M)dB$ va avea loc, întocmai ca și în celălalt caz. Arătați că aceasta și condiția de ciclotron conduc la o relație între B și r. Demonstrați că: (1) momentul magnetic al orbitei rămîne constant cînd B variază; (2) cantitatea de flux Φ a cîmpului exterior **B** care este cuprinsă în interiorul orbitei rămîne constantă cînd B variază. (Descriind variația lui B drept înceată, înțelegem că el se schimbă doar printr-o mică fracțiune din mărimea sa pe perioada unei revoluții. Atunci traiectoria particulei va fi aproape circulară și aproape închisă în fiecare revoluție, astfel încît are sens să vorbim despre moment orbital și flux închis de orbită.)

Fig. la problema 10.24.



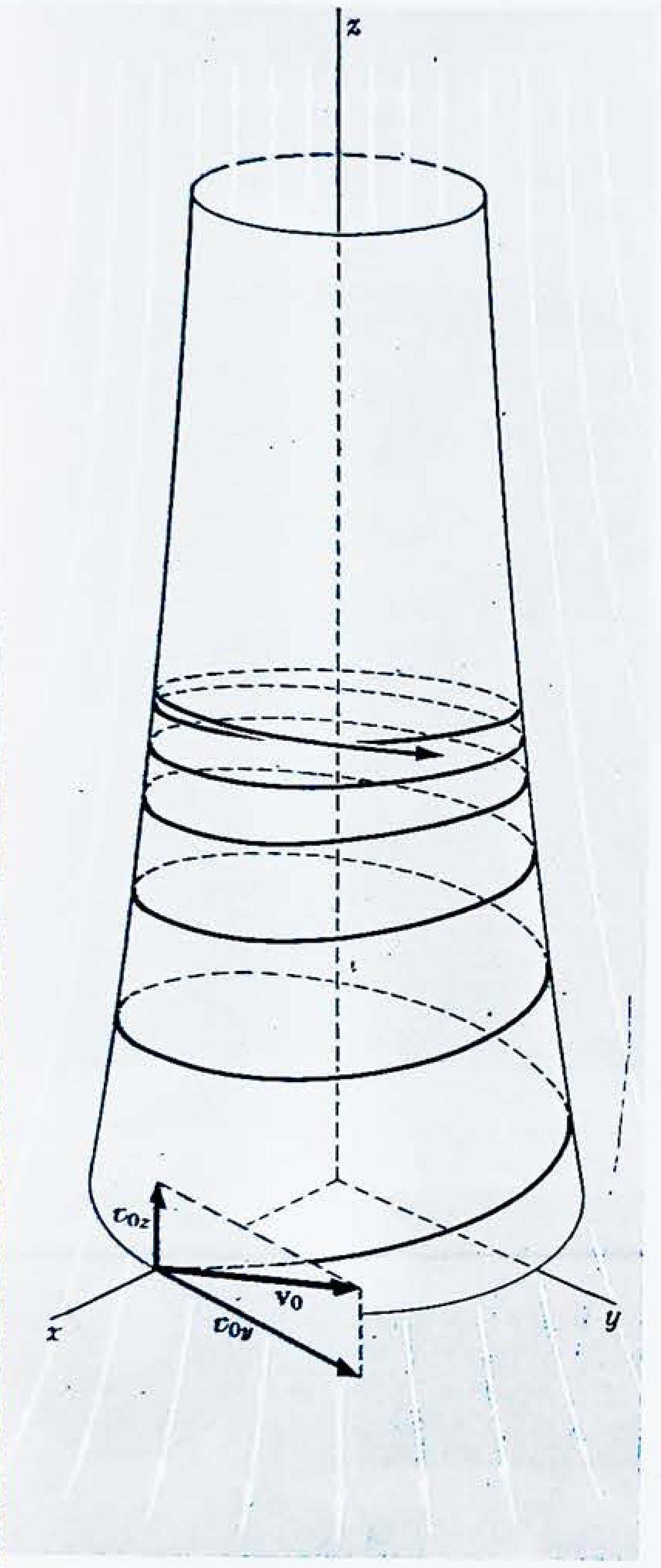
Orbite electronice într-un cîmp convergent.

10.24. Concluziile (1) și (2) din problema 10.23 sînt deosebit de utile pentru prezicerea traiectoriilor electronilor sau ionilor în cîmpuri magnetice care sînt constante în timp dar variază treptat în spațiu, de exemplu, electronii captați în centura Van Allen în jurul pămîntului. Corespunzător condiției noastre din prob. 10.23 de variație lentă a lui B, considerăm aici cîmpuri a căror variație spațială este relativ mică pe o distanță egală cu „raza de ciclotron", pentru particula implicată. Să considerăm cazul particular al unui cîmp magnetic orientat în general în direcția z negativă, dar crescînd în intensitate în direcția z pozitivă, cum se indică prin liniile din figură. O particulă pozitivă trece planul xy așa cum se arată, mișcîndu-se cu viteza v_0 într-o direcție orientată ușor în sus. Dacă privim aceasta dintr-un sistem de referință în mișcare în direcția z cu viteza v_{0z}, vedem un cîmp exterior cu o componentă B_z prin orbită. Folosiți acum concluziile prob. 10.23 pentru a discuta și explica comportarea particulei schițată în figură. Observați că există o diferență în acest caz: Pare să existe o forță orientată în jos asupra particulei. Cum explicați aceasta? Reamintind că un cîmp magnetic static nu poate efectua lucru asupra unei particule încărcate, discutați variația diverselor componente ale vitezei, așa cum apar în sistemul laboratorului. Ce ați avea nevoie să cunoașteți pentru a prezice cît de departe pe suprafața în formă de trompetă va descrie particula spiralei înainte să se întoarcă și să o ia înapoi?

Un electron liber într-un cîmp magnetic variabil.

10.23. În § 10.5 am găsit că raza orbitei unei particule încărcate rămîne neschimbată cînd se instalează un cîmp **B** extern uniform — se schimbă doar viteza orbitală. Dar aceasta era adevărat doar dacă $\Delta v \ll v_0$, ceea ce este acelaşi lucru cu a spune că forţa magnetică qvB este mult mai mică decît forţa F_0 care leagă particula de un centru oarecare de atracţie. Un caz interesant în care această presupunere evident *nu* poate să fie verificată este acela al electronului liber, nelegat de nimic. Ce se întîmplă în acest caz? Pentru a studia aceasta, porniţi cu o particulă de sarcină q, masă M, în mişcare pe un cerc într-un cîmp magnetic **B**. Aceasta este vechea situaţie a „ciclotronului", guvernată de condiţia $Mv^2/r = qvB$. Să presupunem că B este variat lent. Un cîmp electric indus va accelera particula în direcţia mişcării şi relaţia $dv = (qr/2M)dB$ va avea loc, întocmai ca şi în celălalt caz. Arătaţi că aceasta şi condiţia de ciclotron conduc la o relaţie între B şi r. Demonstraţi că: (1) momentul magnetic al orbitei rămîne constant cînd B variază; (2) cantitatea de flux Φ a cîmpului exterior **B** care este cuprinsă în interiorul orbitei rămîne constantă cînd B variază. (Descriind variaţia lui B drept înceată, înţelegem că el se schimbă doar printr-o mică fracţiune din mărimea sa pe perioada unei revoluţii. Atunci traiectoria particulei va fi aproape circulară şi aproape închisă în fiecare revoluţie, astfel încît are sens să vorbim despre moment orbital şi flux închis de orbită.)

Fig. la problema 10.24.



Orbite electronice într-un cîmp convergent.

10.24. Concluziile (1) şi (2) din problema 10.23 sînt deosebit de utile pentru prezicerea traiectoriilor electronilor sau ionilor în cîmpuri magnetice care sînt constante în timp dar variază treptat în spaţiu, de exemplu, electronii captaţi în centura Van Allen în jurul pămîntului. Corespunzător condiţiei noastre din prob. 10.23 de variaţie lentă a lui B, considerăm aici cîmpuri a căror variaţie spaţială este relativ mică pe o distanţă egală cu „raza de ciclotron", pentru particula implicată. Să considerăm cazul particular al unui cîmp magnetic orientat în general în direcţia z negativă, dar crescînd în intensitate în direcţia z pozitivă, cum se indică prin liniile din figură. O particulă pozitivă trece planul xy aşa cum se arată, mişcîndu-se cu viteza v_0 într-o direcţie orientată uşor în sus. Dacă privim aceasta dintr-un sistem de referinţă în mişcare în direcţia z cu viteza v_{0z}, vedem un cîmp exterior cu o componentă B_z prin orbită. Folosiţi acum concluziile prob. 10.23 pentru a discuta şi explica comportarea particulei schiţată în figură. Observaţi că există o diferenţă în acest caz: Pare să existe o forţă orientată în jos asupra particulei. Cum explicaţi aceasta? Reamintind că un cîmp magnetic static nu poate efectua lucru asupra unei particule încărcate, discutaţi variaţia diverselor componente ale vitezei, aşa cum apar în sistemul laboratorului. Ce aţi avea nevoie să cunoaşteţi pentru a prezice cît de departe pe suprafaţa în formă de trompetă va descrie particula spiralei înainte să se întoarcă şi să o ia înapoi?

O remarcă avansată și o problemă care o ilustrează.

10.25. Cineva care cunoaște cîte ceva despre teoria cuantică a atomului ar putea fi încurcat de un punct din analiza noastră din § 10.5, a efectului unui cîmp magnetic asupra vitezei orbitale a unui electron atomic. Cînd viteza variază în timp ce r rămîne constant, momentul cinetic mvr variază. Dar momentul cinetic al unei orbite electronice este presupus a fi un multiplu întreg de constanta $h/2\pi$, h fiind constanta cuantică universală, constanta lui Planck. Cum poate varia mvr fără a viola această lege cuantică fundamentală? Rezolvarea acestui paradox este importantă pentru mecanica cuantică a particulelor încărcate, dar nu este specifică teoriei cuantice. Cînd considerăm conservarea energiei pentru o particulă care poartă sarcina q, în mișcare într-un cîmp electrostatic extern $\mathbf{E}$, totdeauna includem, alături de energia cinetică $\frac{1}{2}mv^2$, energia potențială $q\varphi$, unde φ este potențialul electric scalar la poziția particulei. Nu ar trebui să fim surprinși să găsim că atunci cînd discutăm conservarea impulsului, nu trebuie să considerăm numai impulsul comun $M\mathbf{v}$ dar de asemenea o cantitate care implică potențialul vector al cîmpului magnetic, $\mathbf{A}$. Apare că impulsul trebuie luat ca $M\mathbf{v} + q\mathbf{A}$, unde $\mathbf{A}$ este potențialul vector al cîmpului extern evaluat la poziția particulei. Am putea numi $M\mathbf{v}$ „impuls cinetic" și $q\mathbf{A}$ „impuls potențial". (În relativitate includerea termenului $q\mathbf{A}$ este un pas evident deoarece, așa cum energia și impulsul alcătuiesc un „quadri-vector", tot așa fac φ și A, potențialele scalar și vector ale cîmpului.) Momentul cinetic care ne interesează aici trebuie atunci să fie, nu chiar

$$\mathbf{r} \times (M\mathbf{v}), \quad \text{ci} \quad \mathbf{r} \times (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$$

Întoarceți-vă acum la cazul sarcinii în rotație la capătul coardei, din figura 10.12. Verificați mai întîi că un potențial vector potrivit pentru cîmpul $\mathbf{B}$ în direcția z negativă este $\mathbf{A} = (B/2)\ (-\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x)$. Apoi găsiți ce se întîmplă cu momentul cinetic $\mathbf{r} \times [M\mathbf{v} + (q/\mathbf{A})]$ cînd este instalat cîmpul.

INDEX

Acid clorhidric, momentul dipolar electric al 323, 364
Adair, R.K. 22 n*
Admitanţă, 303—305
Aliniere spontană a spinilor, 410—411
Alnico V, curba B—H pentru, 414
Aluminiu, 372
Amoniac, molecule de, 333
Amortizare, a circuitului rezonant, 291,
critică, 294
Ampère, André Marie, 168, 190, 242, 377, 405
Amper (unitate), 128, 451
Antiparticulă,
Arago, François, 242, 459
Arago, fenomenul lui, 459
Atom, curent electric în, 385—387
structura electrică, 325

B, definiţie, 202
B, şi H şi M, relaţia în interiorul unui cilindru uniform magnetizat, 408
unitate de măsură, 207—208,
Bandă de curent superficial, echivalentă unui bloc uniform magnetizat, 397
Bară conductoare în mişcare în cîmp magnetic, 245—248
Biot-Savart, formula lui, 200—201, 276
Bioxid de carbon, molecula de, 329
Bobină toroidală, 450
energie înmagazinată în, 272
inductanţă a, 267
Bobină, cîmpul magnetic, al 203—206
legată în serie, inductanţa, 286
toroidală, 450
Buclă de curent, cîmpul magnetic al, 377
cuplul asupra, 393, 451—452
în mişcare într-un cîmp magnetic, 248—256
în reţea, 147
potenţial vector al, 377—382
staţionară, cu sursa cîmpului în mişcare, 256—257
Butelia de Leyda, 364

Cameră de ionizare, 441
Capacitate, definiţie, 114
unitate de, 115—116, 140, 155—156
Cavendish, Henry, 25—26
Cavitatea rezonantă ca circuit LC, 312
Celulă, rezistenţa internă, 154—155
voltaică, 150
standard Weston, 151—153
Centura van Allen, 472
Chamberlain, O.E., 21 n
Chu, W.T., 22 n
Cilindri, magnetizaţi, 403—404
paraleli conductori, 432—433
polarizaţi, 402—403
cîmp electric al, 403, 404
Ciocniri, 135—138
timp mediu între, 137
variaţia de viteză în, 136
Circuit, 144—149
de curent alternativ, 290
putere şi energie în, 306—310
echivalent, 446—447
LC, cavitatea rezonantă a, 312
LR, 268—271
constanta de timp a, 155
RC, 155
constanta de timp a, 155—156
RLC, 290
paralel, 311
rezonant (vezi Circuit)
Circuit rezonant, 290—294
amortizare a, 292, 294
frecvenţă în, 295
pentru magnetron, 460—461
Q al, 292
relaţie cu lărgimea rezonanţei, 300
RLC, 311
Circulaţie, 83—85, 180
definiţie, 83
Cîmp electric-intensitatea cîmpului electric, 32—35
al dipolului electric, 321—322
al discului încărcat, 58—62
al foii de sarcină infinite, 36
al liniei de sarcină, 44—45
al sarcinii punctuale cu viteză constantă, 177
derivare din potenţial, 40—41, 56—57
de cuadrupol, 433
distribuţie continuă de sarcină, 20—21, 36—37
echilibru în, 82
energie înmagazinată în, 71—73 51—53,
flux al, 26, 37—42
integrală de suprafaţă, 39
legea lui Gauss, 23—26, 39—42

* n arată că referirea se află într-o notă de subsol a paginii indicate.

indus, 260—261
integrala de linie a, 37, 54—55
în conductori, 101
în interiorul cavității unui conductor, 108—109
în material polarizat, 337
în materie, comparat cu cazul magnetic, 400
în sisteme de referință diferite, 173—175
la suprafața conductorilor, 103—105
legi de transformare pentru, 176, 213—214
macroscopic, 338
reprezentare grafică, 19, 32—34
(*vezi de asemenea* Sarcină în mișcare)
Cîmp electromagnetic, legi de transformare pentru, 213—214
Cîmp electrostatic, echilibru în, 82
legi de transformare pentru, 176
(*vezi de asemenea* Cîmp electric)
Cîmp magnetic (inducția magnetică) al buclei de curent, 377—383
al conductorului liniar, 203
al foiței de curent, 207—208
al inelului de curent, 201—202
al solenoidului, 203—206
bară conductoare în mișcare prin, 245—248
buclă în mișcare prin, 248—256
conducție în, 217—220
definiție, 202
Cîmp magnetic (inducție magnetică), 376
divergență a, 194, 376
efect asupra proceselor chimice, 374
energie înmagazinată în, 271—273
forța asupra diverselor substanțe în, 370—372
integrală de linie în, 210
în materie, în comparație cu cazul electric, 400
microscopic, 338
rotor, de 212
transformări ale, 231—232
unitate de inducție, 207—208
Cîmpul **H**, definiție, 390
relație cu curenții liberi, 391, 450 și **B** și **M**,
relație în interiorul unui cilindru uniform magnetizat, 393
Cîmpul magnetic al Pămîntului, 415—416
Clausius — Mosotti, formula, 467
Clorură, de cupru, 372, 373
de sodiu, 372, 373
CO (monoxid de carbon), molecula, 333
Condensator, 114—118
asimetric, 99, 118
cu plăci paralele, 114
cu vid, 314
definiție, 96, 114
energie înmagazinată în, 109—110, 366—367
plan paralel, 114
sferic, 107, 125
umplut cu dielectric, 340—341
Conductivitate electrică, 114—129
a apei de mare, 222
a diverse substanțe, 142
a metalelor, 142
legea lui Ohm, și 132—134, 139—141
unități pentru, 134
Conductor, 100—123
Cîmpul electric în, 101
Cîmpul electric în cavitatea unui conductor, 109—110
Cîmpul electric la suprafață, 104—105
metalic, paramagnetismul, 394
potențiale și sarcini pe mai mulți, 117—119
sarcină punctuală lîngă conductorul plan, 111—112
sferic, concentric, 110
Conducție în cîmp magnetic, 217—220
Conservarea sarcinii, 19—20, 131, 273
Constanta lui Planck, 392
Constanta dielectrică, 18
a diverselor substanțe, 315
Continuitate, ecuație de, 273
Contracție Lorentz, 195
Corelația direcțiilor vitezelor, 136
Coulomb, Charles de, 26
Coulomb (unitate), 24, 451
Coulomb, legea lui, 22—26, 190
legea lui Gauss și, 41
Cristal ionii, stabilitate și coeziune a, 29—31
Cuantificarea sarcinii, 21—22, 173
Cuplu, asupra buclei de curent, 393, 451—452
asupra dipolului electric, 323
asupra dipolului magnetic, 393
Curba B—H pentru Alnico V, 414
pentru fier, 414
Curent alternativ, 294—301
reprezentarea prin numere complexe, 301—303
Curent de deplasare, 276—277
Curent de sarcină legată, 359—363
legat densitate de, 406
Curenți, 128—162, 145
disiparea energiei prin trecere, 149
fluctuații în, 138—139
liberi și legați, 406
paraleli, forța dintre, 206—207
staționari, 130—132
variabili, 154—157

Densitate de curent, definiție, 130
liber, 406
Densitate de polarizare, 334
Densitate de sarcină liniară, 44
Deplasare electrică D, 350, 406
Derivată parțială, 57 n
Diamagnetism, 371, 373, 395
al orbitelor electronice, 390—392
Dielectric, artificial, 467—468
definiție, 315
Diferență de potențial, definiție, 56
Diodă, curent limitat prin sarcina spațială, 131, 442—443
de vid, ca o componentă neohmică, 125, 139—140

plană, 131
Dipoli electrici, 319—322
cîmpul, 321—322
cuplul şi forţa asupra, 323—324
forţa dintre, 464
Dipoli magnetici, cîmpul comparat cu cîmpul dipolului electric, 381—382
cuplul asupra, 393
forţa asupra, 383—385
unitate de, 385
Dipoli, reţea liniară, de, 466
Direcţii de magnetizare uşoară, 412
Disc, încărcat, potenţialul şi cîmpul, 62—67
magnetizat, 403—404, 416—417
polarizat, 335—336
Distribuţie de curent, echivalentă magnetizării neuniforme, 399
Distribuţie de sarcină, continuă, 36—37
momentele, 317—320
liniară, 44—45
potenţial de, 60—61
sferică, 39—40
singularităţi în, 36
superficială, 45
timp de relaxare, 140—141, 156—157
Divergenţă, 53—55, 73
a cîmpului magnetic, 212, 376
în coordonate carteziene, 75—79
Domenii magnetice, 413—414
Drude, P.K.G., 140
Düker, H. 425

Echilibru în cîmp electrostatic, 82
Ecran gravitaţional, 124
Ecuaţia lui Laplace, 81—82
exemplu de metodă de relaxare, 436
de metodă variaţională, 438—439
foaia elastică şi, 437—438
în două dimensiuni, 120
unicitatea soluţiei, 88—91, 107—109
Ecuaţia lui Poisson, 61, 81
Ecuaţiile lui Maxwell, 279—280
Efectul Hall, 219—220
exemplu de, 454
Einstein, Albert, 148—149
Electrodinamică cuantică, 19
Electromagnet, 417—418
Electroni, egalitatea sarcinii, 22
numărul într-un gram de aprcape orice, 391—394
Electrostatica, definiţie, 19
Elice, cîmp magnetic al, 451
Energie a reţelei cristaline, 30—32
a sistemelor de sarcini, 1—31, 28—48
definiţie, 57
disipare, la curgere de curent, 149—150
înmagazinată în cîmp magnetic, 271—273
înmagazinată în condensator, 101—102
potenţială, 28

„Factor de calitate", 292
Farad, 114, 155
Faraday, Michael, 164, 274—276
descoperirea inducţiei de, 242—244
experienţa de la podul Waterloo, 455
reconstruirea unei experienţe a lui, 216
Fascicul de electroni deflecţie pe fir încărcat, 425
Fero magnetism, 372, 374, 356, 409—415
Feynman, R.P., 122
Fier, Curba B-H pentru, 414
fier magnetic Armco, 418
direcţii de magnetizare uşoară, 412
în cîmp magnetic, 372, 373
magnetism de saturaţie în, 410—411
punct Curie al, 410
Fluctuaţii în curentul electric, 139
Flux, al cîmpului electric, 22—26, 38—42
Legea lui Gauss, 39—42
integrală de suprafaţă, 39
magnetic, 250
Foiţă de curent, forţa asupra, 208—209
cîmpul magnetic al, 207—208
Formula de adunare a vitezelor, 192
Forţă, asupra dipolului magnetic, 383—385
asupra diverselor substanţe, în cîmp magnetic, 372—374
asupra foiţei de curent, 208—209
asupra particulei încărcate în cîmp electric, 188
asupra sarcinii în mişcare, 167—171, 186—190 conservativă, 27
cu rază de acţiune finită, 83
între curenţi paraleli, 207
magnetică, definiţie, 165
(vezi de asemenea, lege invers pătratică)
Franklin, Benjamin, 364
Frecvenţa în circuite rezonante, 295
Frontieră de domeniu magnetic, 412
deplasare de, 413
Funcţia complementară, 297
Funcţii armonice, 81, 434

Galaxie, cîmp magnetic, în, 287
Galvani, Luigi, 150, 164
Gauss (unitate a lui **B**), 207
Gaze ionizate, 139
Generator Van de Graaff, 132, 141, 150, 157
Gheaţă, mecanismul de polarizare al, 361—362
variaţia constantei dielectrice cu frecvenţa, 358
Gilbert, William, 164
Gradient, 57
al intensităţii cîmpului magnetic, 371
Grafit, 142, 372
diamagnetism cu al, 392
Gravitatea ca forţă asupra purtătorilor de sarcină, 101
Gray, Stephen, 100

H, şi **B** şi **M**, definiţie, 406
relaţie cu curenţii liberi, 406—450
relaţie în interiorul cilindrului uniform magnetizat, 408
unităţi de, 451
H⁻, accelerarea ionilor de, 452—453
Heliu, atomul de, 170
Henry, Joseph, 263

Henry (unitate de inductanţă), 263—264
Hertz, Heinrich Rudolf, 164
Hidratare, 462
Hidrogen, atomul de, 325
  cîmpul magnetic în, 222
  molecula de, 170
Histereză, 414
H_2O, 372
  molecula, 333
  variaţia constanţei dielectrice cu frecvenţa, 358
Hughes, V.W., 21

Impedanţă, 304—306
Inductanţă, a bobinelor cuplate în serie, 286
  auto —, 267—268
  circuit LR, 268—271
  mutuală, 263—265
  teoremă de reciprocitate, 265—267
Inducţie, 242—284
  descoperirea de către Faraday a, 242—244
  legea lui Faraday a, 259
  magnetică, 408
Inducţie electromagnetică (vezi inducţie)
Inel, cîmp magnetic al, 201—202
Informaţie, stocare magnetică a, 415
Integrală, de suprafaţă, 39
  eliptică, 64
  particulară, 297
Integrală de linie, a cîmpului electric, 54
  în cîmp magnetic, 210
  pe curbă închisă, 83
Inversiune pe sferă, 432
Ioni, conducţia prin, 135
  distribuţia haotică a vitezelor, 138
Izolator, 100
  (*vezi de asemenea*, Conductor)
Jaspers, A., 467
Joule (unitate) 56, 449, 451

King, J.G., 21 n

Larsen, R.C., 21 n
Lawton, W.R., 25 n
Legea forţei Lorentz, 166, 202
Legea lui Faraday a inducţiei, 259
Legea lui Gauss, 39
  aplicată, în interiorul mediului dielectric, 348—349
  la discul încărcat, 62
  la distribuţia de sarcină sferică, 42
  la distribuţia liniară de sarcină, 45
  la sarcina superficială, 29, 45
  la suprafaţa unui conductor, 104
  în formă diferenţială, 75
  pentru purtători de sarcină în mişcare, 169
Legea lui Lenz, 254, 264
Legea lui Ohm, 132
  abateri de la, în metale, 139
  eşec, al 123—125, 139
Lege de conservare a sarcinii, 20
Lege de transformare a forţei, 188—189
Lege invers pătratică, domeniul de valabilitate, 25
  verificare, a 25
Leipuner, L.B., 22 n
Linii de cîmp electrici, 34—35
  metodă de demonstrare, 375
Lorentz, H.A., 140, 164
Lovell, B., 26 n
Lumină, viteză, a independenţa de lungime de undă, 25

Magnetită, 372, 374
Magnetizare, 396
  de saturaţie, 410
  neuniformă, 413
Magnetohidrodinamică, 210
Magnet permanent, 410—415
  cîmp al, 375, 401—405
Magnetron, circuit rezonant pentru, 460—461
Masă, variaţie, a, 170
Maxwell, James Clerk, 113, 148, 276
M, B, şi H, relaţie în interiorul cilindrului uniform magnetizat 408
Mecanică cuantică în paramagnetism şi diamagnetism, 394
Membrană celulară, capacitate a, 114, 365
Metan, polarizabilitatea moleculei de, 329
Metanol, 333
Metoda de relaxare 121, 435—436
  imaginilor, 112
Michels, A., 467
Microfarad, 116
MKS, unităţi, 23
Mobilitate ionică, 440
Molecule polare, 332—333, 357
Möllenstedt, G., 425
Moment de cuadripol, 320
Moment dipolar, electric, 319
  indus, 325—329
  permanent, 331—333
  magnetic, 379—380
  al sarcinii pe orbită, 386—387
  asociat cu spinul electronic, 392—394, 410
  orbital, 385—386
Moment unghiular, conservare în cîmp magnetic, 473
  orbital, relaţie cu momentul magnetic, 387
Momentele unor distribuţii de sarcină, 317—320
  (*vezi de asemenea* Moment dipolar)
Monopol magnetic, 376
Monoxid de carbon, molecula de, 333
Mosotti, formula lui Clausius, — 467

Neutron, efecte magnetice asupra, 404
Newton, Isaac, 43
Newton (unitate), 449, 451
NH_3 (amoniac) molecula, 333
Nichel, punctul Curie pentru, 410
$NiSO_4$ (sulfat de nichel) 372, 373
Nod într-o reţea, 132, 147

Oersted, Hans Christian, 164, 172, 244
Ohm (unitate), 134, 451
Operatorul lui Laplace, 79
definiţie, 80
pentru funcţii cu simetrie sferică, 429
Orbită electronică, diamagnetism al, 390—392
moment magnetic al, 387
Oxid de azot, paramagnetismul, al 394
Oxigen lichid, în cîmp magnetic, 372, 374
paramagnetism al, 394

Paramagnetism, 372, 373, 394
Perechi de dipoli, energie, 465—466
Permeabilitate energetică a spaţiului vid, 450
magnetică, 409
Permitivitatea dielectrică a spaţiului vid, 449
Picofarad, 116
Planck, Constanta lui, 18, 392
Plimpton, S.J., 26 n
Polarizabilitatea atomică, 328
susceptibilitatea electrică şi 351—355
Polarizare, variaţii de energie la, 355—356
magnetică, 396
Pol magnetic, 376—377, 408
Pol nord, definiţie, 376 n
Porumbel călător, orientare a, 453
Potenţial, 56—97
al două sarcini punctuale, 60
al dipolului electric, 321
al discului încărcat, 62
al distribuţiei de sarcină, 60
al distribuţiei liniare de sarcină, 61
definiţie, 38, 56
derivarea cîmpului din, 59
scalar magnetic, 404
vector, 213, 265—266
al unei mini bucle de curent, 377—383
Yukawa, 429
Pozitronium, 20
Priestley, Joseph, 25
Principiu variaţional, 122
Problemă cu valori pe frontieră, 107, 120
Proiectarea unui magnet de deflexie, 417—419
Proton-electron, balanţa de sarcină, 21
Punct Curie, 410, 397
Putere în circuite de curent alternativ, 306—310

Q de circuit rezonant, 292
relaţia cu lărgimea rezonanţei, 300

Raport giromagnetic, 387 n
Raport magnetomecanic orbital, 387
Reactanţă inductivă, 296
Remanenţă, 414
Reprezentare conformă, 120
Reprezentarea complexă a curentului alternativ, 302—303
Reţea, de curent alternativ, 301—303
de curent continuu, 147
în punte, 161
în scară, 446
Reţea cristalină, energia electrică, a 30
a clorurii de sodiu, 30
Rezistenţă, 133
a firului uniform, 143
internă a pilelor, 154
între cilindri concentrici, 129
Rezistenţe, 145 n
în paralel, 147
în serie, 147
Rezistivitate, 133
a diverselor substanţe, 142
de volum, 133
Rotor, 83—93
al cîmpului magnetic, 212
al cîmpului vitezelor, 82
ecuaţia fundamentală pentru, 85
în coordonate carteziene, 86
scris ca determinant, 89
Rotor-metru, 90
Rowland, Henry, 233

Sanders, P., 467
Sarcină (electrică), 2—29, 18
conservare a, 19—20, 131, 273
cuantificare, a, 21—22, 173
distribuţie de (vezi Distribuţie de sarcină)
energia sistemului de, 26
interacţia dintre (legea lui Coulomb), 23
invarianţa de, 170
liberă şi legată, 348—349
mai mică decît e, 22
pozitivă şi negativă, 19
(vezi de asemenea sarcină în mişcare)
în mişcare, 167—196
forţa asupra, 186
măsurare a, 167
Sarcină magnetică, absenţa de, 375, 397
Sarcină punctuală, cu viteză constantă, cîmp electric al, 178
lîngă plan conductor, 111
natură a, 23
sfera şi, 432
Sarcină superficială, forţa asupra, 68
Scînteie electrică, 140
Semiconductor, 81, 140, 142
Sferă conductoare, sarcină punctuală şi, 432
în cîmp uniform, 365—366
Sferă dielectrică, 346—348, 365—366
Sferă polarizată, 342—346
Sisteme de referinţă în rotaţie, 390—391
Sistem izolat, definiţie, 4, 20
Sistem linear, 119
Sodiu, 372, 373
conductivitate a, 125—126
Solenoid, 221
cîmp magnetic al, 222, 450

superpoziţie, 449—450
pentru producerea unui cîmp puternic 370—371
Solomon, L.H., 26 n
Spaţiu vid, permeabilitate a, 450
permitivitate a, 449
Spini electronici, efectul temperaturii asupra alinierii, 394, 411
momentul magnetic şi, 392, 410
Superpoziţie, a cîmpurilor solenoidale, 449—450
a potenţialelor, 60
fronturilor de undă, 283—284
definiţie, 25
Supraconductibilitate, 141
Suprafeţe echipotenţiale, 65
definiţie, 61
Susceptibilitate electrică, 341
polarizabilitatea atomică şi 351—355
Susceptibilitate magnetică, 395—396
a diverselor substanţe, 416
molară, 395

Temperatură, efectul asupra alinierii spinilor electronici, 394—411
efect asupra conductivităţii, 142
Tensiune electromotoare (tem), 150
Tensor, 133 n, 139
comportarea la rotaţii a, 464
pentru polarizabilitatea moleculară, 329—331, 464
Teorema de unicitate, 107
Teorema, divergenţei, 74
lui Gauss, 75
lui Stokes, 86
Teorie fenomenologică, 374
Tesla (unitate), 450, 451
Timp de relaxare al distribuţiei de sarcină 156
Transformare, a cîmpurilor electric, 230
Lorentz, 164, 173
Tranziţii în circuite de curent alternativ, 295
Tub de flux magnetic, 234
Front de undă, 281—282
superpoziţia de, 283—284

Unde electromagnetice, 280
trăsături generale ale, 284
Unghi de fază, 297, 301
Unităţi, 24

Viteza luminii, independenţa de lungime de undă, 10
Viteză unghiulară Larmor, 390—391
Vitezele purtătorilor de sarcină, 118—123
Vîrf de rezonanţă, lărgime a, 300
Volt, 56, 451
Volta, Alessandro, 150, 164

Waage, Harold, M., 375
Watt (unitate), 150
Weber (unitate), 451
Weber/m², 450
Whipple, F.L., 26 n
Whittaker, Edmund, 350

Nr. colilor de tipar: 30
Bun de tipar: 25.02.1982

Com. nr. 10 143/7097
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.

SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI (SI), (MKSA raționalizat) unități de mecanică și de electricitate

Mărime	Simbol	Unitate	Definiție
lungime	s	metru	unități fundamentale
masă	m	kilogram	unități fundamentale
timp	t	secundă	unități fundamentale
viteză	v	m/s	$v = ds/dt$
impuls	$\mathbf{p}$	kg·m/s	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
forță	$\mathbf{F}$	newton	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
lucru mecanic, energie	W	joule	$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
putere	P	watt	$P = dW/dt$
sarcină	q	coulomb	$q = \int I\,dt$
densitate de sarcină	ρ	coulomb/m³	$q = \int \rho dv$
intensitatea curentului	I	amper	unitate fundamentală
densitate de curent	$\mathbf{J}$	amper/m²	$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$
potențial electric	φ, V	volt	$W = q(\varphi_2 - \varphi_1)$
tensiune electromotoare, tensiune electrică	ε, U	volt	$W = q\mathcal{E}$
intensitatea cîmpului electric	$\mathbf{E}$	volt/m	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
inducție magnetică	$\mathbf{B}$	tesla	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
conductivitate	σ	(ohm.m)⁻¹	$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$
rezistivitate	ρ	ohm·m	$\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$
rezistență	R	ohm	$I = U/R$
flux magnetic	Φ	weber	$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$
capacitate	C	farad	$q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$
inductanță	L, M	henry	$\mathcal{E} = -L dI/dt$
moment dipolar electric	$\mathbf{p}$	coulomb·m	$\mathbf{p} = q\mathbf{s}$
moment dipolar magnetic	$\mathbf{m}$	amper·m²	$\mathbf{m} = I\mathbf{a}$
intensitatea cîmpului magnetic	$\mathbf{H}$	amper/m	$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{liber}$